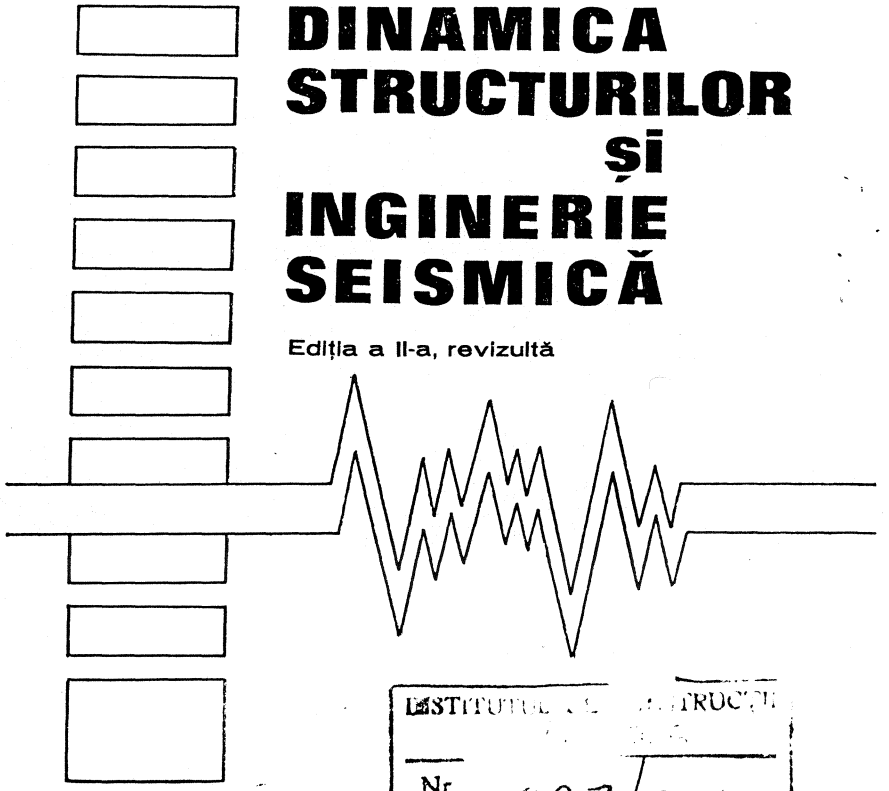
624.042
I-34

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

MIHAIL IFRIM

DINAMICA STRUCTURILOR ȘI INGINERIE SEISMICĂ

Ediția a II-a, revizuită



INSTITUTUL ... CONSTRUCȚII
Nr. inv. 1627/244

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI

„Non scholae, sed vitae dicimus".

(Nu pentru școală, ci pentru viață învățăm)

Seneca — *Epistole morale*

INTRODUCERE

Lucrarea are la bază, în principal, textul cuprins în ediția apărută în anul 1973, în care s-au introdus ameliorări de ordin teoretic și aplicativ. Această operație a fost necesară, în special, datorită perfecționării domeniului și mai ales consecințelor pe care le-au suferit diferitele categorii de construcții după puternicul cutremur înregistrat în țara noastră la 4 martie 1977. În acest sens, s-a avut în vedere o reconsiderare mai substanțială a părții a II-a a lucrării care tratează problemele specifice ingineriei seismice. Atenția acordată acestor aspecte a fost impusă de învățămintele ce au rezultat din analiza comportării reale a construcțiilor, ca urmare a celei mai puternice mișcări seismice ce s-a manifestat în țara noastră în ultimul secol.

În general, orientarea și organizarea materialului nu au suferit modificări esențiale, întrucît răsturnări spectaculoase, de fond, în acest domeniu nu s-au produs în ultimul deceniu. Datorită limitării spațiului tipografic, majoritatea aspectelor teoretice și aplicative au fost succint prezentate, iar la altele, de strictă specialitate, s-a renunțat cu bunăștiință.

Cuprinsul lucrării urmărește cursul pe care autorul îl predă sub această formă, pentru prima dată în învățămîntul superior din România, la Facultatea de Construcții Civile, Industriale și Agricole din Institutul de Construcții București, începînd din anul universitar 1970—1971. În decursul anilor, autorul a fost încurajat în această responsabilă misiune, de a introduce un curs în afara tradiției învățămîntului superior de construcții, în primul rînd de tinerii săi studenți, interesați totdeauna de noțiuni și cunoștințe noi, chiar de avangardă, și sensibili la probleme de rafinament științific și tehnic care să se situeze peste cerințele formale ale unor domenii în curs de perimare.

Lucrarea depășește în anumite părți cadrul strict necesar instruirii studenților din facultățile cu profil de construcții. Aspectele suplimentare tratate vor contribui desigur la pregătirea doctoranzilor în acest domeniu, precum și la perfecționarea inginerilor din proiectare și execuție care urmează cursul postuniversitar de „Dinamica structurilor și inginerie seismică", organizat în Institutul de Construcții din București.

S-a urmărit să se prezinte problemele de bază ale dinamicii structurilor și ingineriei seismice în asemenea manieră încît acestea să devină accesibile unui număr cît mai mare de ingineri, care doresc să se inițieze în acest domeniu de importanță tehnică deosebită. În mod deliberat nu au fost introduse formulări ermetice și sofisticate, tocmai cu intenția nedisimulată de a nu crea falsa iluzie că conceptele dinamicii teoretice și aplicate reprezintă apanajul exclusiv al unei „elite" tehnice. Am ținut seama, pe cît mi-a fost posibil de reflexia, plină de semnificații, aparținînd lui J. W. Goethe și anume că „unele cărți par a fi scrise nu pentru ca să învețe cineva din ele, ci pentru a se ști că autorul lor a știut ceva". Cu acest gînd am elaborat prima ediție a acestei cărți și cu aceleași sentimente mi-am propus, cu unele amendamente, să elaborez această nouă ediție.

Dinamica structurilor și ingineria seismică reprezintă o disciplină cu caracter fundamental, de vîrf, în ramura construcțiilor întrucît asociază, într-o formă unitară, cunoștințe multidisciplinare în special din matematică (ecuații diferențiale, analiză matriceală, calcul numeric etc.), fizică, mecanică teoretică, din statica și stabilitatea structurilor, rezistența și teoria elasticității, precum și din celelalte ramuri ale tehnicii construcțiilor, legate de proprietățile fizico-mecanice ale materialelor.

Din punctul de vedere al dificultăților, noțiunile au fost expuse diferențiat și într-o ordine corespunzătoare. Dezvoltările teoretice sînt însoțite de aplicații numerice reprezentative, care contribuie la înțelegerea și aprofundarea diferitelor aspecte specifice fenomenelor dinamice. S-a pus un accent deosebit pe formulările matriceale, proprii rezolvării cu ajutorul calculatoarelor electronice. Revoluția calculului automat a permis abordarea unor aspecte anterior inaccesibile dinamicii structurilor, permițînd analize deosebit de riguroase și de anvergură (metoda elementului finit, algoritme cu matrice cu dimensiuni mari, analize spațiale complexe etc.). În acest sens, s-a urmărit o tratare cît mai corectă, din punct de vedere fizic și matematic, ținînd seama, pe cît a fost posibil și la nivelul cunoștințelor actuale, de comportarea reală a structurilor de rezistență ale construcțiilor. De asemenea, s-a insistat asupra metodelor de discretizare a sistemelor continue, care permit utilizarea în condiții optime a calculului automat. Cu toate acestea, în lucrare au fost incluse și unele metode directe, cu caracter aproximativ, care pot furniza rezultate satisfăcătoare pentru anumite categorii de structuri, la predimensionarea sau chiar dimensionarea elementelor de rezistență.

Expunerile din prezenta lucrare sînt organizate în trei părți, asociate unitar între ele. În prima parte se prezintă concepțiile de bază ale dinamicii structurilor, caracteristicile de definire ale sistemelor dinamice, precum și analiza răspunsului produs de acțiuni specifice proceselor tehnologice și industriale. Partea a doua este consacrată în întregime ingineriei seismice, iar partea a treia cuprinde în exclusivitate metode numerice aproximative cu privire la calculul structurilor la acțiuni laterale.

La redactarea lucrării s-a folosit un amplu material documentar. Ținînd în vedere explozia de informație științifică și tehnică din ultimele decenii, s-au consultat selectiv cele mai reprezentative studii și cercetări din literatura internațională. Au fost introduse și contribuții originale obținute de cercetătorii români în acest domeniu, printre care sînt menționate și unele aparținînd autorului.

În ansamblu, întregul material cuprins în lucrare (expus în formă unitară și sistematizată) pune accentul asupra analizei și proiectării structurilor reale în concept dinamic, pe baza unor modele fizice și matematice acceptabile.

În încheiere, țin să aduc mulțumiri solicitudinii pe care mi-a acordat-o conducerea Editurii Didactice și Pedagogice și în mod expres redacției de specialitate. Un gînd de recunoștință se îndreaptă către prietenii mei tineri, șef de lucrări dr. ing. Florin Macavei și asistent ing. Ion Vlad, pentru sprijinul ce mi l-au dat la definitivarea acestei noi ediții.

Dr. ing. MIHAIL IFRIM,
Profesor la Institutul de Construcții București

NOTAȚII ȘI SIMBOLURI

Cu scopul de a da posibilitatea unei parcurgeri mai ușoare a materialului cuprins în această lucrare, se prezintă în continuare principalele notații și simboluri folosite. Se menționează faptul că unele dintre acestea au semnificații duble în funcție de mărimea pe care o reprezintă. În afara acestor notații, pe parcursul lucrării se introduc și altele, cu caracter mai puțin general, care se definesc direct în text, acolo unde intervin.

$a(t)$ — accelerație liniară;
A — amplitudine a mișcării;
B/A — beton armat;
c — coeficient de amortizare viscoasă (umedă);
c_{cr} — coeficient de amortizare critică;
E — energie (cinetică sau potențială);
E — modul de elasticitate longitudinală;
f — frecvență proprie (naturală), fără considerarea amortizării;
f^* — frecvență proprie, cu considerarea amortizării;
f_i — frecvență proprie de ordinul i, a unui sistem dinamic cu mai multe GLD ($i = 1, 2, ..., n$);
$F(t)$ — forțe exterioare, variabile în timp;
F_0 — valoarea de amplitudine a forței exterioare armonice;
g — accelerație gravitațională;
G — modul de elasticitate transversală;
GLD — grade de libertate dinamice;
GLD — sistem cu un singur GLD;
$nGLD$ — sistem cu mai multe GLD;
i — indice pentru ordinul modului propriu de vibrație ($i = 1, 2, ..., n$);
I — moment de inerție geometric;
$I(t)$ — forțe de inerție generate de vibrațiile libere;
$J(t)$ — forțe de inerție generate de vibrațiile forțate;
j, k — indici pentru coordonatele dinamice discrete ($j, k = 1, 2, ..., n$);
k — coeficient de rigiditate, definit ca acțiune;
m — masă concentrată;
M — moment încovoietor;
n — numărul GLD al unui sistem dinamic discret;
Q — încărcare gravitațională;
r — coeficient de rigiditate, definit ca reacțiune;
R — rigiditate relativă de nivel;
SD — spectru seismic al deplasărilor relative;
SV — spectru seismic al (pseudo)vitezelor relative;
SA — spectru seismic al (pseudo)accelerațiilor absolute;
t — variabilă temporală;
T — perioadă proprie (naturală), fără considerarea amortizării;
T^* — perioadă proprie, cu considerarea amortizării;

T_i — perioadă proprie de ordinul i, a unui sistem dinamic cu mai multe GLD ($i = 1, 2, ..., n$);
TR — coeficient de transmisibilitate;
T, $\mathcal{T}$ — forță tăietoare;
$u_0(t)$ — deplasare cu caracter perturbator, la baza structurii;
$v(t)$ — viteză liniară;
$x(t)$ — coordonată dinamică, în mișcare rectilinie;
x_{st} — deplasare statică pe direcția GLD;
δ — coeficient de flexibilitate;
$\delta(t)$ — impuls Dirac;
Δ — decrement logaritmic al amortizării vîscoase;
$\Delta(t)$ — interval de timp incremental;
Δ_{st} — deplasare statică;
$\eta_i(t)$ — coordonată generalizată, modală;
μ — factor de ductilitate;
μ — coeficient dinamic (CD) sau factor de amplificare dinamică (FAD), fără considerarea amortizării;
μ^* — coeficient dinamic (CD) sau factor de amplificare dinamică (FAD), cu considerarea amortizării;
ν — fracțiune din amortizarea critică;
Φ — ordonatele vectorilor proprii;
θ — pulsația perturbației armonice exterioare;
ω — pulsația proprie (naturală), fără considerarea amortizării;
ω^* — pulsația proprie, cu considerarea amortizării;
ω_i — pulsația proprie de ordinul i, a unui sistem dinamic cu mai multe GLD ($i = 1, 2, ..., n$);
$[\ ]$ — matrice pătrată sau rectangulară;
$[\ \searrow]$ — matrice diagonală;
$[\ ]^T$ — matrice transpusă;
$[\ ]^{-1}$ — matrice inversă;
$\{\ \}$ — matrice coloană sau vector coloană;
$[D]$ — matrice de flexibilitate, definită în coordonate dinamice;
$[\mathcal{D}]$ — matrice dinamică;
$[I]$ — matrice unitate sau identică;
$[K]$ — matrice de rigiditate, definită în coordonatele totale ale structurii;
$[M]$ — matrice de inerție, a maselor;
$[R]$ — matrice de rigiditate, definită în coordonate dinamice;
$[\Phi]$ — matrice modală;
$[\Omega]$ — matrice spectrală;
$\{\Phi\}$ — vector propriu.

Partea I

ANALIZA DINAMICĂ A STRUCTURILOR

1

CONCEPTE FUNDAMENTALE ÎN DINAMICA STRUCTURILOR

1.1. OBIECTUL DINAMICII STRUCTURILOR

Dinamica structurilor este o disciplină riguros individualizată, din cadrul mecanicii teoretice şi aplicate, care dezvoltă metode de investigare specifice cu privire la calculul şi comportarea structurilor de rezistenţă supuse unor cauze variabile în timp, numite *acţiuni dinamice* (excitaţii sau perturbaţii dinamice exterioare).

Structurile de rezistenţă au proprietăţi sau caracteristici bine precizate, care definesc *parametrii* de modelare fizică şi matematică a *sistemului dinamic* corespunzător, denumit şi *sistem oscilant*.

Structurile inginereşti, care posedă proprietăţi inerţiale (mase concentrate sau distribuite) şi elastice (flexibilitate sau rigiditate), sînt capabile să efectueze, sub acţiunea unor cauze exterioare cu caracter dinamic, mişcări relative (numite oscilaţii), în jurul unei anumite poziţii de echilibru. Întrucît mişcarea unei asemenea structuri (devenită sistem dinamic sau oscilant) se repetă în timp după anumite legi de variaţie, tipul de comportare dinamică a sistemului se numeşte *mişcare vibratorie* sau *vibraţie*.

Acţiunile dinamice generează forţe de inerţie, care intervin în exprimarea condiţiilor de echilibru dinamic instantaneu, spre deosebire de acţiunile statice care reprezintă încărcări exterioare constante în timp. Din acest motiv sistemele dinamice se mai definesc ca *sisteme inerţiale*. În consecinţă, dacă în calculul static efectele înregistrate au valori unice (de vîrf sau maxime), în calculul dinamic efectele au un pronunţat caracter variabil şi se exprimă pe timpul istoric (time history) al aplicării acţiunilor exterioare. De aceea, dinamica structurilor reprezintă un domeniu mult mai larg şi complex de preocupări în raport cu abordarea clasică a problemelor din statica structurilor.

Diversitatea cauzelor care produc efecte dinamice (alternative, mobile, cu aplicare bruscă etc.) conduce la rezolvări diferenţiate ale sistemelor dinamice, cărora le corespund şi soluţii structurale particulare adaptate specificului acţiunilor dominante şi destinaţiei construcţiei. În această situaţie, este evident că proiectarea unei structuri în concept dinamic reprezintă totdeauna o situaţie nouă cu particularităţi bine precizate, întrucît proiectarea în concept exclusiv static devine în majoritatea cazurilor o problemă de rutină. Astfel, la proiectarea statică (la acţiuni gravitaţionale) a unei structuri de rezistenţă pentru o clădire înaltă, concepţia este unică, în schimb se diferenţiază în cazul acţiunilor cu caracter variabil provenite din vînt în rafale (acţiune dinamică directă) sau din mişcarea seismică (acţiune dinamică indirectă).

Acţiunile dinamice, indiferent de provenienţa lor, produc procese vibratorii cărora le sînt asociate mărimile cinematice fundamentale: deplasări, viteze şi acceleraţii. Efectele fundamentale şi consecinţele acestora: eforturi secţionale, deformaţii şi tensiuni, variabile pe timpul istoric al acţiunii sau chiar după dispariţia acesteia, poartă denumirea generică de *răspuns dinamic*. Prin urmare, noţiunea de răspuns dinamic are un caracter general, substituind orice stare caracteristică care se manifestă într-o structură, ca urmare a solicitărilor dinamice exterioare, indiferent de natura acestora. Răspunsul dinamic al unei structuri depinde de tipul şi intensitatea acţiunilor la care este supusă, de mărimea şi distribuţia maselor (care introduc în sistem forţe inerţiale generalizate), precum şi de „forţele rezistente" ale sistemului. În dinamica structurilor, se înţelege prin forţe rezistente totalitatea forţelor care se opun mişcării sistemului oscilant, adică forţele elastice (de revenire), şi forţele de amortizare (de disipare energetică).

Obiectivul principal în dinamica structurilor îl constituie analiza din punct de vedere dinamic a relaţiilor existente între acţiunile dinamice exterioare, parametrii de definire ai sistemului oscilant şi răspunsul dinamic exprimat în mărimi cinematice fundamentale. Este evident că această relaţie, care se exprimă prin ecuaţii de condiţie specifice fenomenelor dinamice, este tributară corectitudinii şi rigurozităţii în care s-a realizat modelarea tuturor factorilor care descriu relaţia acţiune-răspuns. Prin *analiză dinamică* se înţelege în primul rînd ansamblul de procedee şi metode care permit exprimarea matematică a relaţiei acţiune-răspuns, în vederea evaluării calitative şi cantitative a stării variabile de tensiune şi deformaţie din elementele şi structurile de rezistenţă. Aceasta reprezintă de fapt problema standard a dinamicii structurilor.

În această lucrare se va considera că atît acţiunile, cît şi sistemul dinamic pot fi definite, cu suficientă exactitate, independent de caracteristicile mişcării. Chiar şi în aceste condiţii, răspunsul dinamic se estimează mai mult sau mai puţin satisfăcător, în funcţie de complexitatea factorilor care intervin în procesele care se analizează. În cazul în care elementele unei structuri de rezistenţă sînt realizate din material caracterizat fizic ca omogen, izotrop, continuu şi perfect elastic, iar deplasările instantanee care se produc sînt reduse, astfel încît modificările de ordin geometric devin nesemnificative, sistemul dinamic poate fi modelat din punct de vedere matematic cu destulă exactitate. În aceste condiţii, evaluarea caracteristicilor de răspuns devine o problemă fezabilă, fără a prezenta dificultăţi importante. Studiile bazate pe aceste ipoteze, cu privire la liniaritatea fizică şi geometrică a comportării sistemului oscilant, fac obiectul *analizei dinamice liniare a structurilor*.

În situaţia contrarie, cînd caracteristicile de ordin fizic şi geometric nu corespund parţial sau în totalitate ipotezelor enunţate anterior, modelarea sistemului dinamic este extrem de dificilă, iar determinarea răspunsului dinamic este uneori imposibilă, în limitele exigenţelor impuse de fenomenele reale. Această comportare a sistemului oscilant, cu neliniarităţi fizice şi geometrice, caracterizează *analiza dinamică neliniară a structurilor*. Asupra acestor aspecte, extrem de importante privind modelarea relaţiei acţiune-răspuns, prin idealizarea sistemului real, se va reveni pe parcursul lucrării, subliniindu-se consecinţele teoretice şi practice pe care le implică.

În dinamica structurilor se utilizează strategii specifice de modelare şi interpretare a relaţiei acţiune-răspuns, din punct de vedere mecanic, fizic, geometric şi matematic, care să permită abordarea fără dificultăţi majore a celor mai reprezentative probleme din activitatea profesională a inginerilor structurişti. În acest sens, o influenţă decisivă o au tipurile şi particularităţile structurilor analizate, în care pot fi predominante deformaţiile axiale, de forfecare (lunecare), de încovoiere sau de torsiune (deci efectele secundare se pot neglija), sau cînd unele dintre acestea au o pondere comparabilă, astfel încît este necesar să se ia în considerare efectul lor simultan. De asemenea, un rol important revine modelării acţiunilor (reale sau simulate), astfel încît descrierea fenomenelor dinamice efective să nu fie alterată.

În general, sursele care generează fenomene vibratorii pot avea efecte favorabile sau defavorabile în practica inginerească. Astfel, există surse dinamice care pot avea consecințe favorabile în numeroase activități tehnologice, dintre care pot fi menționate următoarele: funcționarea sitelor de granulare, compactarea betoanelor, compactarea pămîntului, baterea piloților (prin efecte produse de șocuri), poansonarea niturilor (tot prin șocuri), concasarea și măcinarea în fabricile de ciment, dizlocări prin explozii, penetrări prin vibrații întreținute etc. Unele din aceste surse, cu implicații favorabile în procesele menționate, prezintă totuși efecte dăunătoare din punct de vedere psihofiziologic și uneori structural. Sursele dinamice, care au efecte defavorabile directe asupra structurilor de rezistență, pot avea următoarea geneză: mașini sau agregate neechilibrate, echipamente sau instalații industriale care produc șocuri, acțiuni mobile provenite din trafic rutier, feroviar sau industrial, cutremurele de pămînt, vînt în rafale, explozii etc. În toate aceste situații problema esențială constă în a elimina sau a limita efectele distructive, posibile, pe care le-ar putea avea asupra structurilor de rezistență. În cazul cînd nu sînt realizabile aceste cerințe, inginerul este obligat să proiecteze structurile în condiții de siguranță ridicată, astfel încît să reziste efectelor defavorabile, de scurtă sau lungă durată, produse de acțiunile dinamice generatoare de vibrații intensive. În acest scop se aplică procedeele și metodele de analiză dinamică a structurilor care fac obiectul prezentei lucrări.

Utilizarea tehnicilor de calcul moderne, prin extinderea calculului automat și în dinamica structurilor, a contribuit la studierea și elucidarea multor fenomene care, în trecutul nu prea îndepărtat, păreau imposibil de abordat prin mijloace tradiționale de operare. În același timp, formulări teoretice moderne au permis rezolvarea la un nivel înalt calitativ și cantitativ a unor modele dinamice deosebit de sofisticate.

1.2. NOȚIUNI PRINCIPALE UTILIZATE ÎN DINAMICA STRUCTURILOR

Cu scopul de a înlesni parcurgerea materialului cuprins în această lucrare, se vor defini cele mai importante noțiuni care au o frecvență majoră în studiile de dinamica structurilor. Alte noțiuni, ce vor interveni ulterior, vor fi explicate direct în text.

● *Acțiune dinamică* (excitație-perturbație-sursă). Prin acțiune dinamică (generalizată) se definește orice cauză exterioară, rapid variabilă în timp, care se manifestă asupra unui sistem oscilant (dinamic) generînd efecte inerțiale.

● *Amortizare.* Capacitatea de amortizare caracterizează fenomenul de disipare a energiei unui sistem dinamic, ca urmare a prezenței forțelor rezistente (care se opun mișcării).

● *Amortizare critică.* Valoare limită a amortizării vîscoase la care sistemul dinamic, părăsind starea de repaus, revine la poziția inițială fără să oscileze. Mărimea amortizării critice depinde exclusiv de caracteristicile fizice ale sistemului.

● *Amortizare uscată.* În cazul în care disiparea energiei sistemului dinamic este datorată unor forțe rezistente de mărime constantă (independente de deplasare și viteză), sistemul posedă amortizare de tip uscat (modelul Coulomb).

● *Amortizare vîscoasă* sau *umedă.* Un sistem dinamic conține amortizare vîscoasă (internă) cînd disiparea energiei rezultă din forțe rezistente proporționale cu viteza (modelul Newton).

● *Amplitudine.* Valoarea maximă a cauzei (acțiune) sau a efectului (răspuns) se numește amplitudine. Amplitudinea are un caracter instantaneu atît pe durata acțiunii dinamice, cît și pe durata răspunsului dinamic.

● *Armonică.* Se înțelege prin armonică, componenta acțiunii sau răspunsului descrisă, din punct de vedere matematic, de o funcție trigonometrică simplă (sinusoidală sau cosinusoidală).

● *Bătăi.* Fenomenul de bătăi rezultă în urma asocierii (suprapunerii) a două mișcări armonice (cu caracter permanent) ale căror frecvențe sînt foarte apropiate între ele (fără să coincidă). Consecința fenomenului de bătăi constă în creșteri și descreșteri periodice ale amplitudinilor relative corespunzătoare mișcării rezultante.

● *Ciclu.* Totalitatea valorilor caracteristice care se manifestă pe durata unei perioade, cînd acțiunea sau răspunsul sînt evaluate prin funcții armonice sau periodice, definește un ciclu.

● *Coeficient dinamic* (CD) sau *factor de amplificare dinamică* (FAD). În cazul acțiunilor cu caracter armonic sau periodic, coeficientul dinamic, numit și factor de amplificare dinamică, pune în evidență efectul aplicării dinamice (în raport cu cel static) a excitației exterioare. Este un coeficient adimensional și reprezintă raportul dintre răspunsul dinamic maxim (în regim staționar) și răspunsul static produs de valoarea de amplitudine a excitației.

● *Constantă elastică.* Deformabilitatea unui sistem elastic poate fi caracterizată prin constante elastice specifice care se exprimă prin *coeficienți de flexibilitate* și *coeficienți de rigiditate.* În general, coeficienții de flexibilitate reprezintă efecte produse de cauze egale cu unitatea, iar coeficienții de rigiditate, cauze care produc efecte egale cu unitatea. În dinamica structurilor, atît efectele, cît și cauzele se exprimă în raport cu coordonatele dinamice ale sistemului (grade de libertate dinamice).

● *Coordonate dinamice,* numite și *grade de libertate dinamice* (GLD). Prin coordonate dinamice sau GLD se definesc parametrii *independenți* necesari pentru a preciza complet poziția unui sistem dinamic în orice moment al mișcării. În același timp, numărul coordonatelor dinamice sau GLD poate fi definit ca fiind egal cu numărul *minim* de legături simple necesare pentru a fixa sistemul dinamic în poziție de repaus.

● *Coordonate generalizate* sau *modale.* Coordonatele generalizate sînt specifice exprimării răspunsului dinamic forțat prin ecuații decuplate, depinzînd exclusiv de caracteristicile modale ale sistemului.

● *Decrement logaritmic al amortizării.* Decrementul logaritmic al amortizării este, prin definiție, logaritmul natural al raportului dintre două amplitudini succesive de același semn sau cuprinse în intervalul de timp de o perioadă (în cazul vibrației libere a unui sistem cu un singur GLD caracterizat prin amortizare vîscoasă).

● *Elongație.* Valoarea instantanee a cauzei (acțiune) sau a efectului (răspuns) în raport cu un anumit reper de referință.

● *Excitație.* Întrucît excitația reprezintă în dinamica structurilor o cauză exterioară variabilă în timp, definirea este identică cu cea dată acțiunii dinamice.

● *Formă proprie de vibrație* (vector propriu). Configurația geometrică a unui sistem dinamic cu mai multe GLD (definită prin ordonate adimensionale), care vibrează liber cu o anumită frecvență proprie, poartă denumirea de formă proprie de oscilație. Formele proprii de vibrație, egale în număr cu GLD ale sistemului, sînt descrise de funcții armonice simple (staționare) și sînt compatibile cu constrîngerile elastice.

● *Fracțiune din amortizarea critică*. Raportul dintre coeficientul de amortizare efectivă c și coeficientul de amortizare critică c_{cr} al unui sistem cu amortizare vîscoasă este numărul adimensional care definește fracțiunea din amortizarea critică $\nu = c/c_{cr}$.

● *Frecvență*. Frecvența unei componente armonice reprezintă numărul de oscilații complete (sau cicli) pe o durată de timp egală cu o secundă. Frecvența se mai exprimă prin inversul perioadei (exprimată în secunde) și se măsoară în Hertz-i (Hz).

● *Frecvența de rezonanță*. Frecvența proprie a sistemului, care generează fenomenul de rezonanță, se numește frecvență de rezonanță.

● *Frecvență proprie de vibrație*. Frecvența proprie sau naturală este o caracteristică intrinsecă a sistemului și corespunde fiecărei forme proprii de vibrație. Numărul frecvențelor proprii de vibrații este egal cu numărul GLD al sistemului dinamic.

● *Frecvență proprie fundamentală*. Valoarea cea mai mică (joasă) a frecvenței unui sistem cu mai multe GLD reprezintă (prin convenție) frecvența proprie fundamentală.

● *Grade de libertate dinamice* (GLD). Definirea GLD ale sistemelor este identică cu cea corespunzătoare coordonatelor dinamice, și reprezintă necunoscutele tuturor problemelor de dinamica structurilor.

● *Impuls*. Produsul dintre forță și timpul infinitezimal de aplicare asupra sistemului se numește impuls. Forța, depinzînd de timp, are valoarea zero în afara duratei de acționare a impulsului.

● *Matrice modală*. Totalitatea vectorilor proprii (formelor proprii de vibrație) definește matricea modală a sistemului. Această matrice este pătrată, avînd rangul egal cu numărul GLD al sistemului dinamic.

● *Matrice spectrală*. Prin definiție, matricea spectrală este o matrice diagonală constituită din valorile proprii ale sistemului dinamic (frecvențe, perioade sau pulsații). Matricele spectrală și modală sînt matrice asociate.

● *Mișcare armonică*. Mișcarea armonică este descrisă de funcții (de timp) trigonometrice simple (sinusoidale sau cosinusoidale).

● *Mișcare periodică*. Mișcarea periodică, care se repetă identic la intervale egale de timp, este definită prin funcții periodice, care pot fi deci descompuse în serii Fourier (convergente). Fiecare termen al seriei Fourier reprezintă o componentă a mișcării, cu caracter armonic.

● *Mișcare vibratorie* sau *oscilatorie*. Mișcarea în timp, pe care o efectuează un sistem elastic-inerțial în jurul unei anumite poziții de echilibru relativ, se numește mișcare vibratorie. Această mișcare poate fi exprimată prin funcții armonice simple, periodice sau oarecare.

● *Mod propriu de vibrație*. În cazul sistemelor cu mai multe GLD, prin mod propriu de vibrație se înțelege ansamblul format de o frecvență proprie și forma proprie de vibrație corespunzătoare. Modurile proprii de vibrație sînt caracteristici dinamice proprii ale sistemelor și reprezintă, de asemenea, asocierea dintre valorile proprii și vectorii proprii corespunzători. Totalitatea

modurilor proprii, definită prin asocierea matricelor spectrală și modală, este egală în număr cu GLD ale sistemului analizat.

● *Mod fundamental de vibrație*. Modul de vibrație căruia îi corespunde frecvența cea mai joasă (fundamentală) se numește mod fundamental de vibrație.

● *Modulație*. Fenomenul de modulație se caracterizează prin variația unui anumit parametru caracteristic funcției de răspuns (frecvența sau amplitudinea). Cînd frecvența devine variabilă rezultă o *modulație în frecvență*, iar cînd variază amplitudinea se obține o *modulație în amplitudine*.

● *Perioadă*. Timpul minim necesar pentru ca o mișcare periodică simplă sau oarecare să se repete identic poartă denumirea de perioadă. Perioada, care se măsoară în secunde, este egală cu inversul frecvenței ($T = 1/f$).

● *Perioadă de rezonanță, perioadă fundamentală* și *perioadă proprie*. Aceste perioade se obțin prin inversarea frecvenței de rezonanță, respectiv prin inversarea frecvențelor fundamentale și proprii.

● *Pulsație*. Pulsația unei mișcări periodice, numită și frecvență circulară, reprezintă numărul de oscilații complete (cicli) într-un interval de timp egal cu 2π secunde. Pulsația se măsoară în radiani pe secundă și se mai poate obține direct prin intermediul frecvenței sau perioadei ($\omega = 2\pi f = 2\pi/T$).

● *Pulsație de rezonanță, pulsație fundamentală* și *pulsație proprie*. Exprimarea acestor pulsații se poate obține direct din definițiile de mai sus.

● *Răspuns dinamic*. În mod generic, prin răspuns dinamic se înțelege mărimea oricărui efect mecanic, variabil în timp, caracteristic sistemului dinamic, în urma aplicării unei acțiuni exterioare. Răspunsul dinamic se poate exprima în mărimi cinematice fundamentale (deplasări, viteze și accelerații) sau prin alte stări derivate (forțe generalizate, energii, eforturi secționale, tensiuni și deformații).

● *Răspuns dinamic forțat*. Efectele mecanice (variabile în timp) pe care le înregistrează un sistem dinamic pe timpul istoric al aplicării acțiunii (time history) caracterizează răspunsul forțat (în general tranzitoriu sau permanent-staționar).

● *Răspuns dinamic liber*. Răspunsul dinamic liber (răspuns tranzitoriu) se manifestă, în anumite condiții inițiale, după ce cauza care a pus în mișcare sistemul dinamic a încetat.

● *Rezonanță*. Cînd una din frecvențele proprii ale unui sistem dinamic cu mai multe GLD coincide cu frecvența unei componente armonice a acțiunii exterioare se produce fenomenul de rezonanță, caracterizat prin amplificarea accentuată a răspunsului dinamic. În vecinătatea rezonanței, cînd valorile celor două frecvențe (sistem-acțiune) sînt apropiate (dar nu coincid), rezultă fenomenul de bătăi.

● *Semnal*. Prin semnal (în sens mecanic) se înțelege orice funcție caracteristică acțiunii sau răspunsului. Dacă semnalul caracterizează acțiunea se numește *semnal de intrare* (input) sau funcție de intrare, iar dacă se referă la răspuns, *semnal de ieșire* (output) sau funcție de ieșire. În general, într-un sistem operațional, un semnal (cu caracter determinist sau aleatoriu) poate introduce sau reda o informație de orice natură (fizică, mecanică, electromagnetică, sonoră, economică, biologică etc.).

● *Sistem dinamic* sau *sistem oscilant*. În analiza liniară, sistemul dinamic reprezintă o asociere (interconectată) între următoarele caracteristici fundamentale: *inerțială* (generată de mișcare), *disipativă* (generată de capacitatea

de amortizare) și *elastică* (generată de proprietățile de deformabilitate), care nu se modifică pe toată durata mișcării. În analiza neliniară apar variații parțiale sau totale ale acestor caracteristici.

● *Sistem dinamic echivalent.* Se numește sistem dinamic echivalent, acel sistem care poate înlocui orice sistem dinamic mai complicat, în vederea simplificării operațiilor de analiză numerică, fără ca fenomenele reale (calitative și cantitative) să fie alterate. Modelarea fizică și matematică a sistemului dinamic echivalent se face pe baza unor criterii de echivalență specifice.

● *Sistem dinamic liniar.* Un sistem dinamic are comportare liniară cînd este caracterizat prin liniaritate fizică și geometrică (proprietățile inerțiale, disipative și elastice de definire nu se modifică în timp).

● *Sistem dinamic neliniar.* Un sistem dinamic are comportare neliniară atunci cînd prezintă neliniarități de ordin fizic sau geometric (unele din proprietățile de definire devin variabile în timp).

● *Spectru de răspuns.* Reprezentarea grafică a variației răspunsului maxim (exprimat în mărimi specifice), în funcție de caracteristicile sistemului dinamic și acțiunea exterioară definește spectrul de răspuns.

● *Transmisibilitate.* În cazul unui sistem dinamic acționat în regim permanent și staționar, raportul dintre răspunsul maxim și valoarea de amplitudine a excitației exterioare (exprimate în mărimi compatibile) reprezintă coeficientul de transmisibilitate sau transmisibilitatea.

● *Turația.* Într-o mișcare periodică, se înțelege prin turație numărul de cicli într-un interval de timp de un minut. Turația n se măsoară în rotații pe minut (r.p.m.) și deci $n = 60f = 60/T = 30\omega/\pi$.

● *Valori proprii.* Totalitatea frecvențelor proprii de vibrație (perioade sau pulsații), corespunzătoare unui sistem dinamic cu mai multe GLD, reprezintă valorile proprii ale sistemului.

● *Vectori proprii.* Totalitatea formelor proprii de vibrație ale unui sistem dinamic cu mai multe GLD definește vectorii proprii ai sistemului. Ordonatele care precizează configurația geometrică a fiecărei forme proprii, corespunzătoare unei anumite frecvențe proprii, alcătuiesc un vector propriu sau o matrice coloană (submatrice).

● *Vibrație.* Vibrația reprezintă mișcarea repetată, cu caracter alternant și variabilă în timp, a unui sistem dinamic, în jurul unei anumite poziții de echilibru.

● *Vibrație forțată* sau *vibrație întreținută* (V.F.). Un sistem dinamic efectuează o vibrație forțată cît timp cauza perturbatoare exterioară se manifestă asupra sistemului.

● *Vibrație proprie* (V.P.). Vibrația proprie a unui sistem dinamic reprezintă o stare particulară a vibrației libere (independentă de condițiile inițiale). Într-o vibrație proprie, toate punctele materiale ale sistemului descriu o mișcare armonică simplă.

● *Vibrație liberă* (V.L.). Un sistem dinamic execută o vibrație liberă după ce cauza perturbatoare exterioară, care a scos sistemul din poziția de repaus, a încetat. Vibrația liberă se definește numai pe baza condițiilor inițiale ale mișcării, exprimate prin deplasări și viteze. Ea se poate exprima prin intermediul vibrațiilor proprii, care reprezintă de fapt soluții particulare ale mișcării. Vibrația liberă poate fi descrisă de funcții periodice sau oarecare.

1927/244

1.3. MODELAREA RELAȚIEI ACȚIUNE-SISTEM-RĂSPUNS

Toate acțiunile variabile în timp, care generează efecte cu caracter dinamic asupra sistemelor oscilante exprimate prin parametrii specifici ai mișcării, sînt guvernate de relația operațională descrisă de diagrama bloc din figura 1.1. Deci orice efect dinamic structural, rezultat printr-o analiză numerică sau în urma unei investigații experimentale, poartă denumirea generică de răspuns dinamic.

Prin *răspuns dinamic* R se înțelege starea instantanee, definită în termeni mecanici, a unui *sistem dinamic* S supus unor *acțiuni* A exterioare reale sau simulate (în anumite condiții restrictive) și variabile în timp.

Analiza dinamică a structurilor, al cărui scop fundamental îl reprezintă evaluarea în timp a stării de tensiune și deformație a structurilor, se bazează pe metode și procedee riguroase de rezolvare care permit exprimarea unor relații analitice (scenarii și strategii specifice) în care sînt implicate funcțiile de intrare (acțiunile), sistemul caracterizat prin funcțiile proprii, precum și funcțiile care definesc ieșirile din sistem (răspunsul). Răspunsul unui sistem dinamic se estimează, în general, prin intermediul acelor parametri care pot permite interpretarea, din punct de vedere ingineresc, a comportării unei structuri la un anumit tip particular de acțiune.

În vederea elaborării unui scenariu analitic de tip acțiune-sistem-răspuns, este necesară o definire riguroasă a fiecărui factor component al acestei relații, pe baza unei modelări fizice și matematice corespunzătoare. În acest sens, toți parametrii care intervin în relația *A-S-R* (acțiune-răspuns, intrare-ieșire sau input-output) urmează să fie modelați astfel încît să reflecte și să evalueze cît mai fidel fenomenele dinamice și evenimentele mecanice care se dezvoltă într-o structură de rezistență, pe toată durata aplicării acțiunilor exterioare. În același timp modelarea trebuie să aibă în vedere posibilitatea unei abordări satisfăcătoare din punct de vedere matematic a fenomenelor dinamice.

Modelarea și uneori simularea caracteristicilor de definire a tuturor factorilor din relația *A-S-R* reprezintă aparent o operație abstractă, dar uneori cu consecințe imprevizibile în actul decizional. O alterare a acestor caracteristici de definire poate conduce, chiar în cazul aplicării unor metode matematice rafinate de rezolvare, la rezultate nu numai incorecte, ci chiar la falsifi-

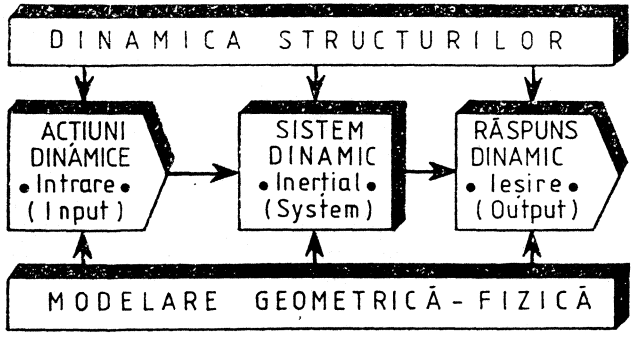


Fig. 1.1

care, pînă la limita absurdului, a fenomenelor reale. În această situație, pregătirea științifică și tehnică a inginerului de concepție, asociată cu inventivitatea inginerului analist sînt determinante, întrucît literatura tehnică de specialitate, oricît de bogată și diversă ar fi nu poate furniza soluții sau rețete pentru toate cazurile cu care se confruntă tehnica și tehnologiile din domeniul construcțiilor civile, industriale, rutiere, feroviare, hidrotehnice, nucleare etc.

În prezent, se constată că există încă o mare discrepanță între modul și concepția de proiectare a structurilor la acțiuni cu caracter static (gravitaționale sau laterale convenționale) și proiectarea la acțiuni dinamice variabile în timp, întrucît gradul de complexitate și de abordare în cel din urmă caz este cu mult peste regulile de rutină și de gîndire structurală, ceea ce cere proiectantului un nivel mult mai ridicat de competență profesională. În realitate, în afara încărcărilor proprii, toate acțiunile ce se aplică asupra structurilor au un caracter pur dinamic, avînd o intensitate mai mult sau mai puțin ridicată.

Importanța proiectării structurilor în concept dinamic a fost pusă în evidență mai ales în ultimele decenii, odată cu evoluția tehnologică și industrială, precum și cu dezvoltarea urbană, în zonele afectate de mișcări seismice intensive. În aceeași perioadă de timp și metodele specifice de investigare teoretică și experimentală au cunoscut o evoluție rapidă, spectaculoasă.

Diversitatea modelării relației *A-S-R*, dar în special a sistemului, trebuie să țină seama atît de aspectele tehnice, cît și de cele cu consecințe economice. De exemplu, în cazul unor acțiuni dinamice de excepție, cum ar fi cele generate de mișcarea seismică, proiectarea în domeniul exclusiv elastic este o imposibilitate tehnică, uneori chiar riscantă. Proiectarea în domeniul pur elastic implică investiții economice nejustificabile, dacă se are în vedere că în cazul cutremurelor puternice toate structurile de rezistență suferă degradări sau avarii, făcîndu-se bineînțeles abstracție de fenomenul de cedare integrală (colaps). În asemenea situații, criteriile de modelare a sistemului (structurii) vor avea în vedere conceptul comportării inelastice, peste limita elastică de comportare. Aceste aspecte ale modelării sistemului reprezintă deziderate fundamentale în dinamica structurilor, deoarece niciodată o structură de rezistență nu se comportă exclusiv în domeniul elastic fără incursiuni postelastice, mai ales atunci cînd sînt supuse unor acțiuni variabile și intensive.

Principiile modelării sînt încă destul de vagi, fără a avea un caracter de generalizare. Ele rămîn în majoritatea situațiilor subiective, cu toate avantajele analizelor matematice rafinate cu care sînt însoțite. Complicarea artificială a problemelor de dinamica structurilor, uneori în mod fantezist, chiar abuziv din punctul de vedere al aparatului matematic utilizat are în cele mai multe situații un rol derutant, iar în anumite situații aproape negativ, asupra proiectanților de structuri, care își asumă integral responsabilitatea tehnică și socială asupra obiectivelor proiectate. Sofisticarea modelării, în afara faptului că nu contribuie totdeauna la elucidarea tuturor aspectelor de ordin practic, poate să producă derută printre proiectanții de structuri și implicit să-i îndepărteze de la abordarea în concept dinamic a multor situații în care acest mod de a pune problema devine inevitabil.

În continuare se vor expune principalele criterii cu privire la modelarea factorilor care definesc relația *A-S-R*.

1.4. MODELAREA ACȚIUNILOR DINAMICE

Acțiunile cu caracter dinamic, variabile în timp după anumite legi matematice sau oarecare, depind în mod decisiv de cauza care le generează. Multitudinea surselor perturbatoare și caracteristicile acestora este practic nelimitată, dar o sinteză și clasificare a acestora poate fi făcută, avînd în vedere principalele elemente dominante cu caracter general. În acest sens, în diagrama bloc din figura 1.2 sînt prezentate sintetic caracteristicile surselor exterioare care introduc efecte dinamice semnificative în structurile de rezistență.

Toate categoriile de acțiuni dinamice se caracterizează vectorial prin poziție, direcție și intensitate, avînd o pronunțată variabilitate în timp. Specificul fundamental al acțiunilor dinamice, spre deosebire de cele statice, constă în faptul că produc efecte inerțiale importante în elementele structurale. Este evident că analiza dinamică este operantă numai în situațiile în care intensitatea acțiunii conduce la efecte dinamice cel puțin comparabile cu efectele produse de încărcările statice de exploatare curentă.

În continuare se va prezenta o descriere succintă a principalelor caracteristici ale surselor clasificate în figura 1.2.

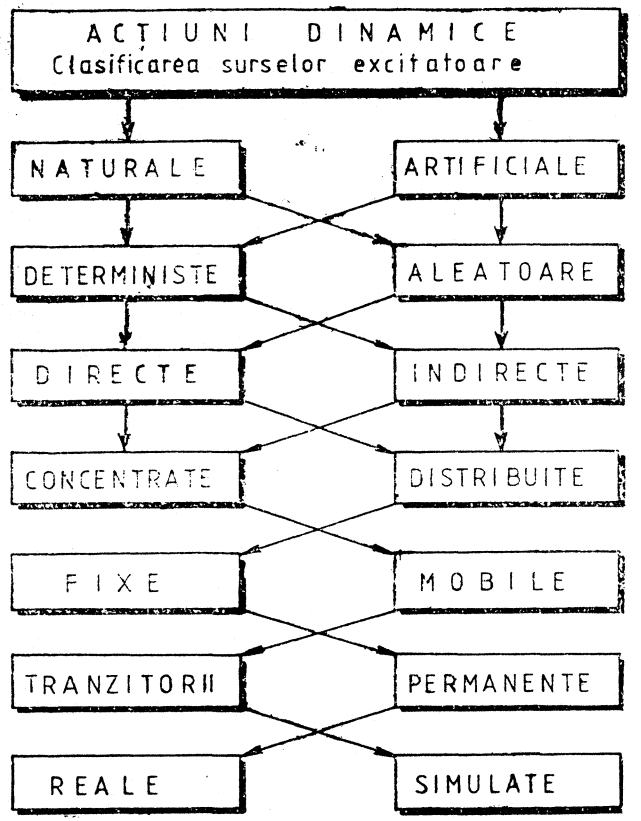


Fig. 1.2

● *Acțiunile naturale*, independente activităților umane, provin în general din mișcările seismice, presiunile vîntului în rafale, variații de temperatură (climatice), acțiuni hidrodinamice în cazul diluviilor etc.

● *Acțiunile artificiale*, proprii activităților umane, provin din procesele tehnologice industriale (motoare de acționare, mașini-unelte, electro- și turbocompresoare, electrogeneratoare, pompe hidraulice, prese etc.), din trafic (rutier, feroviar, industrial etc.), din explozii etc.

● *Acțiunile deterministe* se caracterizează printr-o variație complet definită în timp.

● *Acțiunile aleatoare* (întîmplătoare, cauzale sau random) sînt acele acțiuni a căror variație nu este pe deplin definită în timp și care poate fi caracterizată numai pe baze statistice.

● *Acțiunile directe* se aplică direct asupra elementelor portante ale structurii de rezistență.

● *Acțiunile indirecte* sînt acele acțiuni care se transmit structurilor prin medii de propagare (explozii subterane, acțiuni seismice, procese industriale, trafic etc.).

● *Acțiunile concentrate* și *distribuite* depind de modul discret sau continuu de aplicare.

● *Acțiunile fixe* sau *mobile* rezultă din destinația surselor și din funcția structurilor de rezistență (punctele de aplicare sînt fixe, respectiv variabile în timp).

● *Acțiunile tranzitorii* sînt acțiuni de scurtă durată, impulsive (șocuri produse de echipamente și agregate industriale, vînt în rafale, acțiuni seismice bruște, explozii etc.).

● *Acțiunile permanente* sînt acțiuni de lungă durată care se manifestă în general în procesele tehnologice industriale.

● *Acțiunile reale* sînt în general caracteristice proceselor artificiale și mai puțin celor naturale (cu pronunțat caracter aleatoriu).

● *Acțiunile simulate* sînt acele acțiuni care, pe baza unor criterii de stimulare a unor surse întîmplătoare (vînt, cutremur etc.), permit o interpretare statistică a fenomenelor.

Se menționează faptul că toate acțiunile dinamice, independent de proveniența lor, au o istorie în timp (time history) de care trebuie ținut seama în analiza numerică. Este evident că acțiunile statice au un pronunțat caracter convențional și sînt lipsite de o istorie în timp.

Modelarea acțiunilor (în special a celor deterministe) poate fi abordată prin exprimarea variației acestora prin *funcții periodice* (simple sau oarecare) sau *neperiodice*.

Acțiunile de tip periodic provin în general din neechilibrarea agregatelor industriale, care generează mișcări de rotație. Acestea pot avea o variație armonică simplă (fig. 1.3, *a*) sau periodică oarecare (fig. 1.3, *b*). În cazul acțiunilor de tip periodic, se aplică analiza Fourier, care permite descompunerea acestora într-o sumă convergentă de componente de tip armonic. Detalii asupra dezvoltării funcțiilor periodice oarecare în serii Fourier sînt cuprinse în § 1.7.5. Acțiunile de tip neperiodic se tratează ca atare, utilizînd tehnici

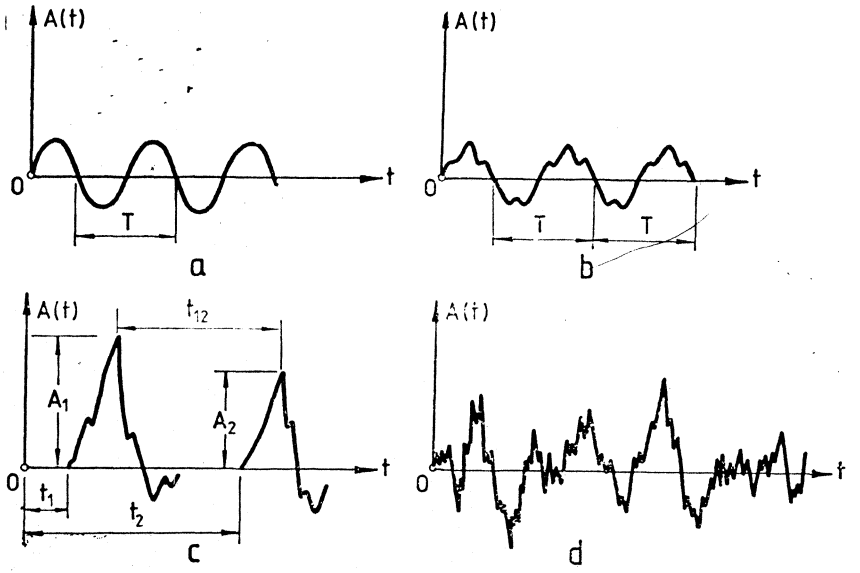


Fig. 1.3

specifice de modelare. Acțiunile neperiodice pot fi de scurtă durată — impulsive (fig. 1.3, *c*) sau de lungă durată — permanente (fig. 1.3, *d*).

1.5. MODELAREA SISTEMULUI DINAMIC. MODEL MATEMATIC

Sistemele dinamice fiind definite prin excelență *sisteme inerțiale* este evident că cel mai important element constitutiv îl reprezintă masa. Pentru ca mișcarea acesteia să fie posibilă, este necesar să i se conecteze un element elastic (suport elastic), care să întrețină în timp mișcarea (oscilația) în jurul unei anumite poziții de echilibru. Deci cel mai simplu sistem dinamic poate fi obținut prin asamblarea unei mase m și a unui element elastic (caracterizat prin flexibilitatea δ sau rigiditatea k) în anumite condiții de fixare în plan sau în spațiu (fig. 1.4, *a*). Dacă unui astfel de sistem simplu i se atașează și un

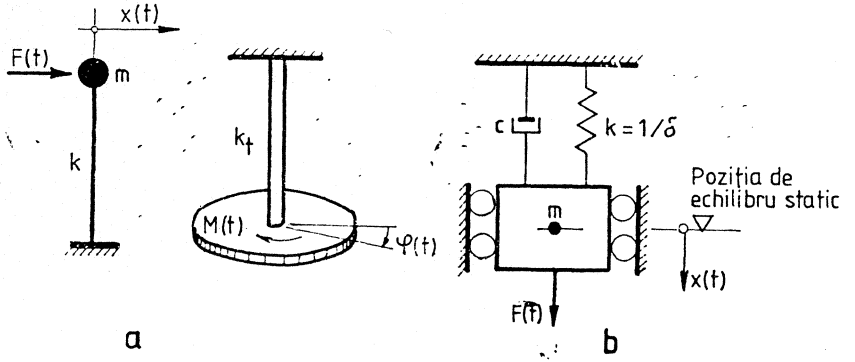


Fig. 1.4

element disipativ, caracterizat printr-un coeficient de amortizare internă *c*, se obține un sistem dinamic complet (fig. 1.4, *b*). Asemenea sisteme pot reprezenta modele dinamice ale unor sisteme (structuri) reale, reduse la forme idealizate. Este clar că sistemul dinamic din figura 1.4, *b* pus în mișcare va oscila pe direcție gravitațională, față de poziția de echilibru static.

În general prin *sistem dinamic* se înțelege asocierea, în anumite condiții de compatibilitate a mișcării, a unor *caracteristici inerțiale, disipative* și *elastice*. Toate aceste caracteristici, care trebuie să fie identice proprietăților reale de comportare ale unei structuri, urmează a fi modelate, pe bază teoretică sau experimentală, în limitele și posibilitățile cunoștințelor actuale privind proprietățile fizico-mecanice ale materialelor.

Descrierea analitică a comportării unui sistem dinamic se exprimă pe baza unui *model matematic*. Modelul matematic devine identic cu *modelul dinamic* atunci cînd toate caracteristicile de definire ale sistemului dinamic sînt complet precizate din punct de vedere fizic. Cu cît modelul matematic reflectă mai riguros comportarea fizică a modelului dinamic, cu atît rezultatele obținute pe cale analitică vor fi mai precise.

În diagrama bloc din figura 1.5 se prezintă sintetic caracteristicile de definire, precum și comportarea în timp a sistemelor dinamice. Rezultă clar că identificarea sistemului dinamic este o operație extrem de complexă și dificilă, întrucît proprietățile acestuia guvernează comportarea sa dinamică sub acțiunea perturbațiilor exterioare. În final analistul construiește modelul matematic pe baza acestor proprietăți care reprezintă de fapt o idealizare a sistemului fizic real. Definirea, în condiții acceptabile, a modelului matematic este fundamentală deoarece dictează formularea matematică și rezolvarea problemei.

În funcție de comportarea lor fizică sistemele dinamice se împart în *sisteme cu comportare liniară* și *sisteme cu comportare neliniară*, deoarece tehnicile de modelare fizică și matematică diferă.

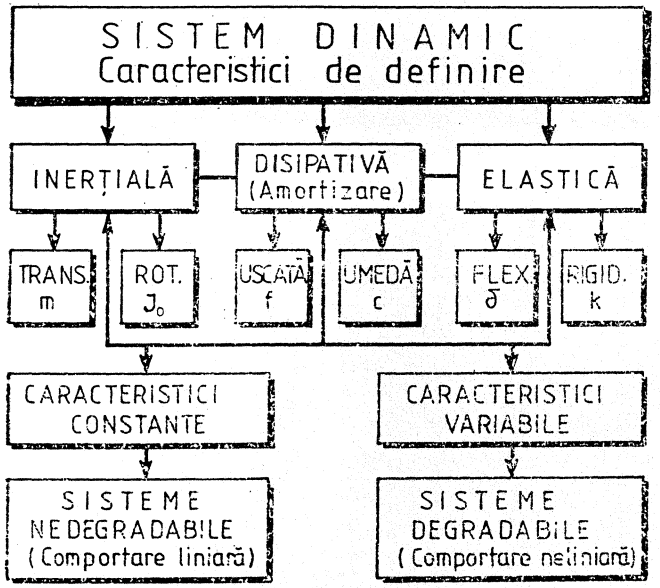


Fig. 1.5

Modul de comportare al unui sistem dinamic este dictat aproape exclusiv de *condițiile fizice* și *geometrice*.

În privința comportării fizice a materialelor, în figura 1.6, *a* se reprezintă schematic curba tensiune-deformație $\sigma - \varepsilon$ corespunzătoare unei probe supusă la întindere centrică. Se observă că pentru valori relativ mici ale tensiunii variația $\sigma - \varepsilon$ este liniară (ramura *0—1*) și deci se poate aplica legea proporționalității (Hooke), punctul *1* reprezentînd *limita elastică*. În acest domeniu de solicitare se consideră că materialul are, din punct de vedere fizic, o *comportare liniară*. Dacă această limită este depășită, legea lui Hooke își pierde valabilitatea, iar prin descărcare proba va avea deformații remanente. În mod convențional se consideră punctul *2 limită de curgere* σ_c, întrucît la valoarea ε_c (0,2%) se admite că deformațiile au devenit plastice. Tensiunea maximă (tensiunea ultimă) caracterizează cedarea materialului, iar punctul *4* din diagramă va caracteriza *limita de rupere*. Se constată că prin descărcări și reîncărcări ale probei în domeniul cuprins între punctele *1* și *4* ale curbei $\sigma - \varepsilon$, pantele dreptelor *2—2'* și *3—3'* rămîn aproape identice cu panta dreptei *1—1'*, pantă care caracterizează modulul de elasticitate longitudinală *E* în origine. Este clar că în domeniul cuprins între punctele *1* și *4* materialul are *o comportare neliniară* și prin urmare legea proporționalității nu mai este valabilă.

Modelele matematice admise și care idealizează comportarea fizică a materialelor sînt grupate în figura 1.6. Astfel, cel mai simplu model de *comportare liniar elastică* este cel reprezentat în figura 1.6, *b* (model Hooke). În figura 1.6, *c* este redat modelul de *comportare neliniară elastică* (încărcarea și descărcarea corespund aceleiași curbe, fără deformații remanente). În analiza numerică a acestui caz se substituie variația curbilinie cu o variație poligonală. Figura 1.6, *d* descrie comportarea elasto-plastică, iar figura 1.6, *e* o comportare perfect elastică-perfect plastică (model Prandtl). Aceste două ultime situații caracterizează așa-numitul model fizic biliniar.

În privința comportării geometrice, dacă deformațiile sînt mici, neglijabile în raport cu geometria de ansamblu a sistemului, echilibrul se poate exprima față de poziția inițială. În această situație sistemul are o *comportare geometric liniară* și în consecință se poate aplica principiul superpoziției (liniare). Întrucît sistemele analizate sînt supuse unor acțiuni cu caracter dina-

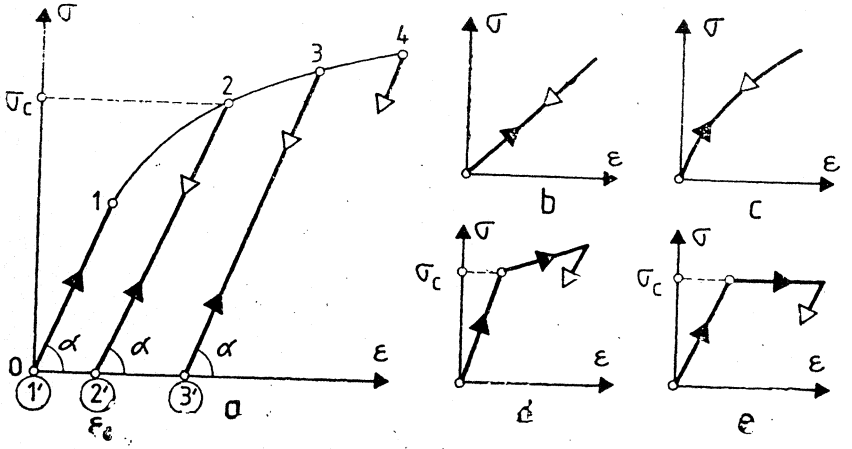


Fig. 1.6

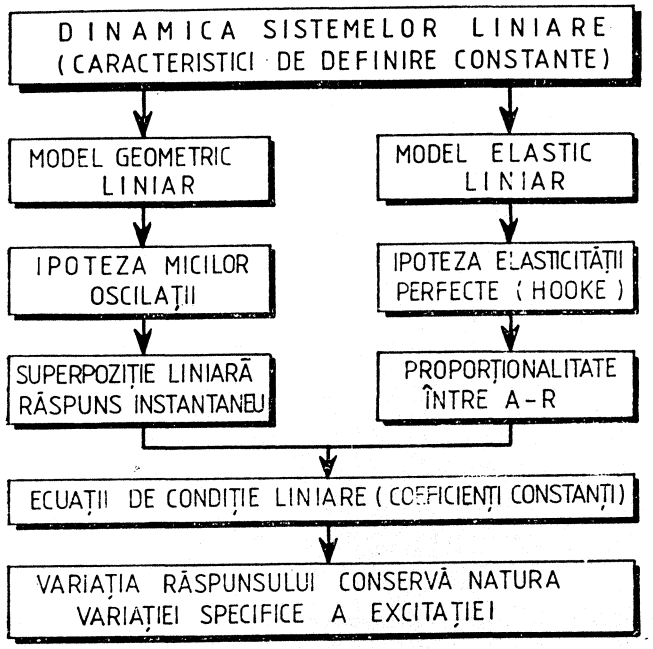


Fig. 1.7

mic, condițiile de echilibru se vor exprima în raport cu poziția de echilibru static a sistemului, deoarece se admite ipoteza micilor oscilații. Dacă deformațiile sînt exagerate este necesar ca echilibrul să se exprime în raport cu poziția deformată. Acest caz caracterizează *comportarea geometric neliniară* a sistemului.

În această lucrare se vor analiza sistemele cu comportare fizică și geometrică liniară, introducînd unele elemente de comportare neliniară în capitolele 2 și 3.

Liniaritatea de ordin geometric și fizic caracterizează *dinamica liniară a structurilor* (fig. 1.7).

În concluzie, *în analiza dinamică liniară* se pot aplica simultan *principiul proporționalității* și *principiul superpoziției*.

Trebuie menționat faptul, că în multe situații reale, caracteristicile fizice de definire ale sistemelor dinamice nu se conservă integral pe toată durata aplicării acțiunilor. Degradările parțiale de ordin fizic sau geometric modifică în mod substanțial comportarea sistemului și caracteristicile de răspuns ale acestuia. Există tehnici avansate de analiză și pentru sistemele degradabile (pe baza unor scenarii cu privire la premeditarea mecanismului de degradare), dar care nu fac obiectul prezentei lucrări.

1.5.1. Modelare inerțială. Coordonate dinamice

Toate structurile de rezistență, din practica inginerească, sînt sisteme dinamice cu masă continuu distribuită. În această situație, indiferent de caracterul acțiunilor dinamice, forțele de inerție generate de mișcarea sistemului vor avea de asemenea o distribuție continuă. În consecință, răspunsul structurilor definit prin deplasări, viteze și accelerații va fi exprimat prin funcții continue. Poziția unui astfel de sistem dinamic, în orice moment al mișcării va fi determinată printr-o infinitate de parametri independenți sau *coordonate dinamice*, numite și *grade de libertate dinamice* (GLD).

În vederea simplificării operațiilor numerice, orice structură poate fi transformată într-un *sistem dinamic cu mase discrete*, prin modelarea corespunzătoare a celui cu masa distribuită. În acest caz, forțele de inerție generalizate, care sînt asociate mișcării sistemului, vor avea caracterul unor acțiuni concentrate, iar coordonatele în raport cu care se descrie răspunsul sistemului în timp (exprimat în deplasări, viteze sau accelerații) vor fi de asemenea discrete (limitate). Este evident că metodele de analiză a unor astfel de *sisteme dinamice discrete* prezintă mai puține dificultăți decît în cazul sistemelor cu masă continuă.

Coordonatele dinamice independente care pot defini complet poziția instantanee a unui sistem dinamic discret, în orice moment al mișcării, se numesc grade de libertate dinamice (GLD). Deplasările pe direcția coordonatelor dinamice reprezintă necunoscutele fundamentale în dinamica structurilor. Rezultă deci că *numărul necunoscutelor dinamice este egal cu numărul coordonatelor dinamice independente* (GLD) sau cu *numărul minim de legături simple (blocaje) necesare pentru a fixa sistemul dinamic în poziție de repaus.*

Se observă că necunoscutele în dinamica structurilor se estimează independent de metodele numerice de rezolvare, spre deosebire de statica construcțiilor în care necunoscutele sînt specifice metodelor de calcul (metoda forțelor — coordonate forțe generalizate, metoda deplasărilor — coordonate deplasări generalizate). Datorită acestui fapt teoria structurilor în regim dinamic de solicitare prezintă un total caracter unitar, alegerea metodelor de analiză reprezentînd o problemă de opțiune.

Indiferent de natura sistemului (static sau dinamic) coordonatele au un caracter generalizat și definesc o stare de tensiune — deformație complet precizată printr-o variabilă unică. În figura 1.8 se prezintă sistemul de coordonate în cazul structurilor plane (fig. 1.8, *a*) și spațiale (fig. 1.8, *b*), precum și în cazul unei plăci încărcate normal pe planul median (fig. 1.8, *c*). Coordonatele se numerotează și se specifică prin versori. La alegerea coordonatelor trebuie avut în vedere ca întreaga structură analizată să fie acoperită de cîmpurile de deplasări.

Modelarea sistemului dinamic prin discretizare inerțială trebuie să aibă în vedere mai mulți factori, dintre care pot fi menționați; fenomenele dinamice dominante, particularitățile structurilor reale (elemente asociative — conexiuni), distribuția efectivă a maselor (proprii sau adiționale), exactitatea rezolvării numerice etc.

Un exemplu elementar de discretizare a unei structuri plane este prezentat în figura 1.9, *a*. Prin fragmentarea acesteia se obține concentrarea maselor la capetele barelor (fig. 1.9, *b*), structura avînd numai rol de suport elastic. Orice acțiune aplicată sistemului va antrena numai masa concentrată din nod. Pe timpul mișcării, masa concentrată generează inerție de translație (transversală și axială), precum și inerție de rotație, poziția instantanee fiind deci definită de trei coordonate dinamice — 3 GLD (fig. 1.9, *c*). Avînd în vedere particularitățile structurii (alcătuită din bare drepte), precum și faptul că fenomenele dinamice sînt guvernate de legi liniare de comportare, se poate neglija inerția de rotație (masă punctuală) și inerția axială (ipoteza

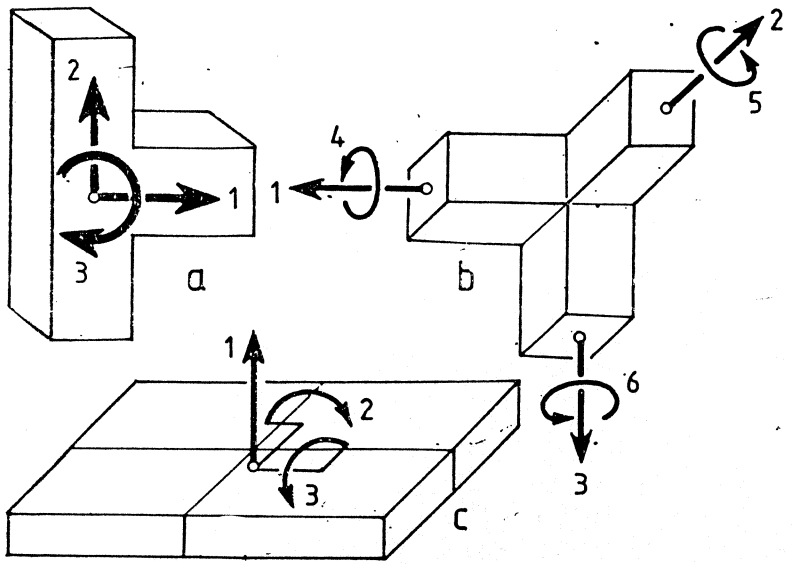


Fig. 1.8

barelor inextensibile), astfel încît structura reală poate fi modelată dinamic printr-un sistem idealizat cu 1 GLD (fig. 1.9, *d*).

Deplasările liniare instantanee pe direcția GLD se vor nota cu $x(t)$, iar deplasările unghiulare instantanee cu $\theta(t)$, aceste notații avînd o largă utilizare în literatura internațională. Coordonata dinamică $x(t)$ nu trebuie confundată cu coordonata carteziană.

În general, pentru un sistem cu n GLD, matricea de inerție se definește ca o matrice „plină" (complet sau parțial), atunci cînd există *cuplaj inerțial* sau *interacțiune inerțială în sistem* (conexiuni inerțiale între coordonatele

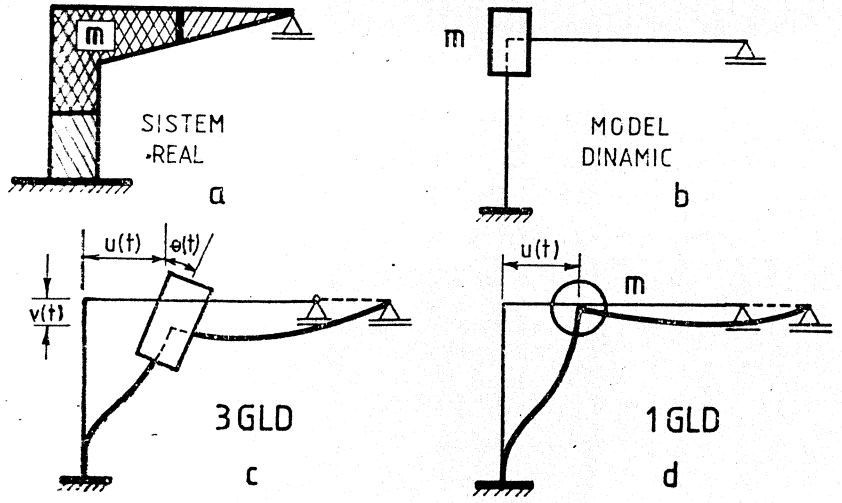


Fig. 1.9

sistemului). Această matrice, exprimată în coordonate dinamice are forma următoare:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \dots m_{1j} & m_{1k} \dots m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} \dots m_{2j} & m_{2k} \dots m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{j1} & m_{j2} \dots m_{jj} & m_{jk} \dots m_{jn} \\ m_{k1} & m_{k2} \dots m_{kj} & m_{kk} \dots m_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} \dots m_{nj} & m_{nk} \dots m_{nn} \end{bmatrix}_{n,\,n},$$

unde m_{jk} reprezintă forța de inerție generalizată care se manifestă pe direcția coordonatei j datorată unei accelerații generalizate unitare imprimată pe direcția coordonatei k.

Matricea de inerție este simetrică (întrucît $m_{jk} = m_{kj}$), pozitiv definită și de ordinul n, n, încît

$$[M] = [M]^T.$$

În vederea simplificării operațiilor de analiză numerică, matricea de inerție poate fi diagonalizată prin unele procedee specifice, unul dintre acestea fiind expus în capitolul 3. Diagonalizarea matricei de inerție corespunde unui *decuplaj inerțial* (sau dinamic), cînd toți coeficienții secundari devin zero, adică $m_{jk} = 0$, iar $m_{jj} = m_j$ ($j = 1, 2, \dots n$). De altfel atît *cuplajul elastic* (cu caracter static), cît și *cuplajul inerțial* (dinamic), cum va rezulta din § 1.5.3, depind de coordonatele utilizate și nu de proprietățile sistemului. Decuplarea elastică și inerțială se obține prin introducerea unor coordonate specifice, numite *coordonate principale* sau *coordonate naturale* (v. cap. 4).

Se subliniază faptul că în cazul deplasărilor liniare, caracteristica inerțială o reprezintă masa, iar în cazul deplasărilor unghiulare, momentul de inerție masic în raport cu centrul instantaneu de rotație al acesteia. În tratarea plană a unei probleme de dinamica structurilor, în orice punct (nod) de concentrare a unei mase există 3 GLD (2 translații — 1 rotație), în timp ce în analiza spațială rezultă 6 GLD (3 translații — 3 rotații).

Dacă se consideră un sistem cu mase discrete, care execută numai o mișcare de translație, inerția de rotație fiind nulă, coordonatele dinamice se decuplează astfel, încît matricea de inerție devine diagonală avînd forma:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & m_2 \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots m_j & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & m_k \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 & 0 \dots m_n \end{bmatrix}_{n,\,n}.$$

Matricea de inerție diagonală este simplu de generat întrucît masele concentrate din fiecare punct (nod) se determină pe baza unei analize statice elementare, ținînd seama că masa totală reprezintă rezultanta maselor discretizate la noduri (fig. 1.10, *a* și *b*).

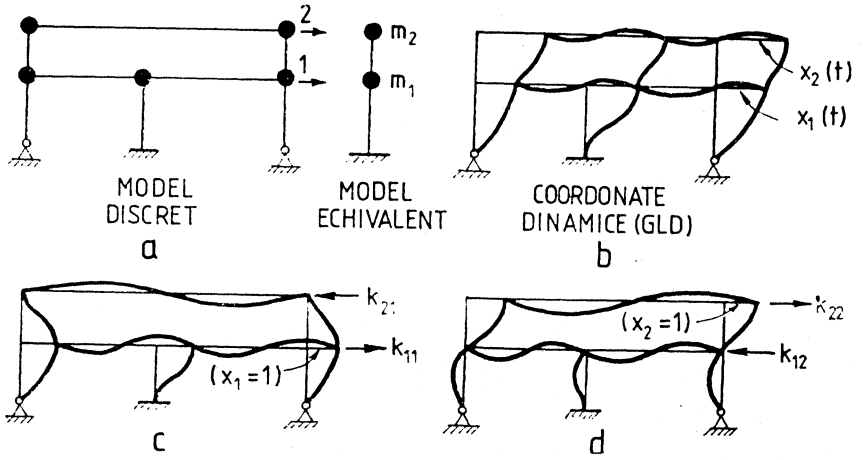


Fig. 1.10

Diagonalizarea directă a matricei de inerție se mai poate obține și prin exploatarea formei particulare a structurii analizate sau prin alegerea unui sistem de coordonate dinamice corespunzătoare (fără conexiuni secundare). Decuplarea directă a coordonatelor dinamice, chiar dacă deplasările pe direcția acestor coordonate sînt liniare (de translație) sau unghiulare (de rotație), se obține la fel de simplu prin partiționarea GLD, așa cum rezultă din aplicația 1.15.1 de la sfîrșitul acestui capitol.

Discretizarea sistemului și stabilirea coordonatelor dinamice (GLD) se efectuează avînd în vedere configurația și solicitările dominante, specifice structurilor ce urmează a fi modelate. În acest sens, în figura 1.11 sînt prezentate cîteva exemple de modelare inerțială decuplată a unor structuri plane, coordonatele fiind precizate direct pe desen.

Astfel, modelele dinamice din figura 1.11, *a* și *b* au un singur grad de libertate dinamică (1 GLD), cele din figura 1.11, *c*, *d* și *e* au două grade de libertate dinamice (2 GLD), iar cel din figura 1.11, *f* (avînd deplasări orizontale reduse) are 6 GLD. Cadrului etajat din figura 1.11, *g*, care are *n* niveluri (masele considerîndu-se concentrate la fiecare etaj), îi corespunde un model dinamic discret cu *n* GLD, întrucît toate coordonatele dinamice independente coincid cu deplasările laterale ale fiecărui nivel. Turnul din figura 1.11, *h* este un sistem continuu, cu masa $\mu(y)$ variabilă pe înălțime, reprezentînd, din punct de vedere dinamic, un sistem cu un număr nelimitat (infinit) de GLD. Pentru simplificarea analizei numerice, un asemenea sistem, cu coordonate dinamice distribuite, se transformă într-un model matematic cu coordonate dinamice discrete (*n* GLD).

Pentru a exemplifica modul în care se poate efectua reuniunea coordonatelor statice și dinamice, în vederea rezolvării unitare a unei structuri, se prezintă structura plană din figura 1.12 care posedă două mase concentrate. Dacă se consideră inerția de rotație neglijabilă, modelul dinamic va fi caracterizat numai prin 4 coordonate dinamice (fig. 1.12, *a*). Coordonatele statice, în sensul metodei deplasărilor, rezultă în număr de 12 (fig. 1.12, *b*). Coordonatele totale vor fi însă în număr de 18, întrucît punctele de concentrare a maselor considerîndu-se noduri, este necesar să li se asocieze două coordonate statice suplimentare și anume coordonatele *17* și *18* (fig. 1.12, *c*).

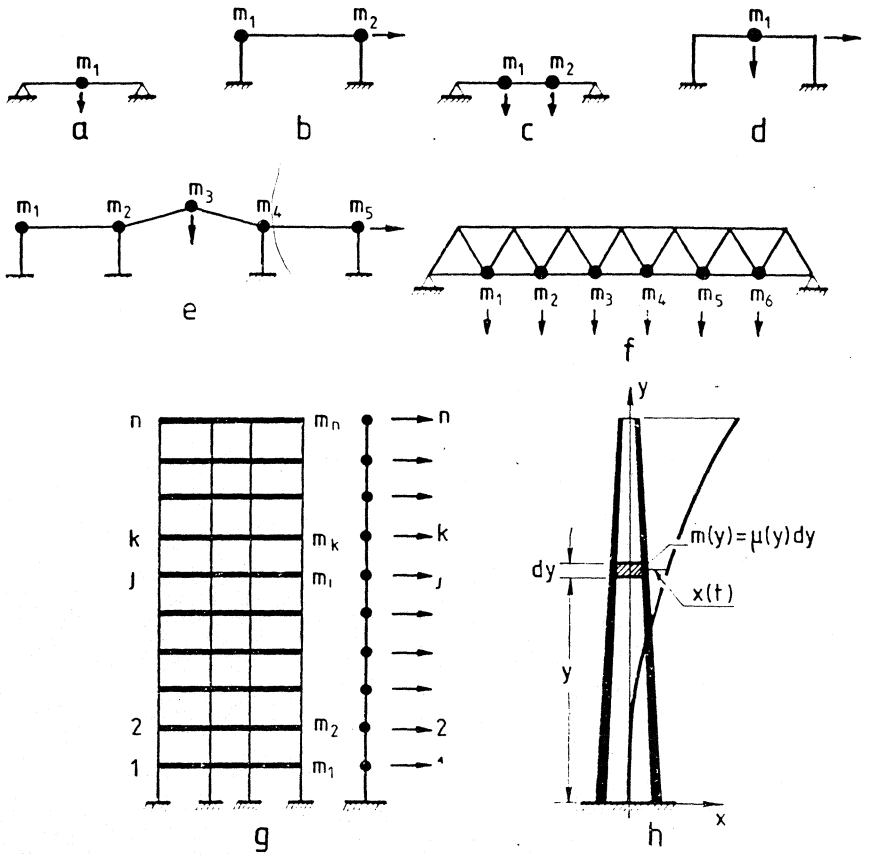


Fig. 1.11

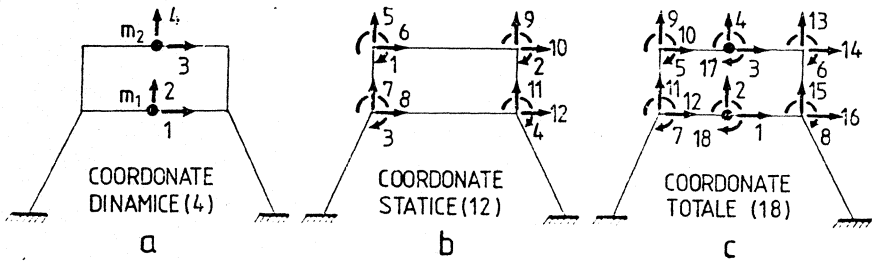


Fig. 1.12

În final, se consideră util să se facă cîteva precizări cu privire la coordonatele dinamice. Toate sistemele reale sînt sisteme continue avînd deci coordonatele dinamice distribuite (continue). Rezolvarea unor asemenea sisteme prezintă dificultăți importante, iar uneori chiar imposibilitatea abordării din punct de vedere matematic. De aceea în rezolvările numerice sistemele continue se transformă în sisteme discrete. În consecință, modelele matematice vor fi de două categorii: *modele matematice cu coordonate dinamice discrete* (corespunzătoare sistemelor dinamice cu mase concentrate) și *modele matematice cu coordonate dinamice distribuite* (corespunzătoare sistemelor dinamice cu mase distribuite).

Din punctul de vedere al formulărilor matematice, specifice analizei dinamice, rezultă că sistemele dinamice cu coordonate discrete sînt descrise, în general, de ecuații diferențiale ordinare, în timp ce sistemele cu coordonate distribuite sînt descrise de ecuații diferențiale cu derivate parțiale. Se justifică și din acest punct de vedere avantajele discretizării structurilor reale.

1.5.2. Modelarea disipativă. Amortizarea internă

Disiparea energiei induse în sistemele dinamice, de surse perturbatoare exterioare, depinde în general de mai mulți factori dintre care pot fi considerați definitorii următorii: *capacitatea de amortizare internă a materialului, tipul structural* (configurația structurală și gradul de nedeterminare statică); *conexiunile dintre elementele de rezistență componente* (legăturile interioare), precum și *conexiunile cu mediul de fixare* (legăturile exterioare).

În analiza dinamică liniară a structurilor, disiparea energiei este substituită prin forțe „rezistente" (sau de opoziție), care se opun deci mișcării. Factorii cu caracter disipativ descriși anterior au un efect favorabil întrucît contribuie la antrenarea răspunsului liber sau forțat.

Principalele forme de amortizare sînt următoarele:

● *Amortizarea umedă* (vîscoasă), de tip intern, generează forțe „rezistente" proporționale cu viteza instantanee a sistemului (model Newton).

● *Amortizarea uscată*, fiind produsă de frecare, intervine prin „rezistențe" a căror intensitate este constantă pe toată durata mișcării. Forța de amortizare are semnificația unei forțe de frecare, conținută în suprafața de contact a corpului care lunecă relativ pe o suprafață uscată și este proporțională cu forța normală care se exercită pe această suprafață.

● *Amortizarea structurală*, care se datorește în cea mai mare parte fenomenului de histeresis, este caracterizată de suprafața buclei histeretice în conformitate cu figura 1.13, *f*. O echivalență între amortizarea structurală și amortizarea vîscoasă este posibilă numai în cazul excitației armonice.

În realitate, în structurile de rezistență capacitatea de amortizare este „amestecată" fiind mult mai complexă, deoarece intervin simultan toți factorii descriși anterior. În domeniul liniar de comportare a structurilor se poate admite însă, pentru structurile de rezistență obișnuite, ca fiind dominantă *amortizarea vîscoasă liniară* (idealizată).

Trebuie precizat faptul că în cazul amortizării vîscoase, atenuarea amplitudinilor este exponențială (fig. 1.13, *b* și *c*), iar în cazul amortizării uscate descreșterea amplitudinilor are un caracter liniar (fig. 1.13, *e*).

În dezvoltările teoretice și aplicative din această lucrare, se va considera că în domeniul elastic de comportare a structurilor, amortizarea este *liniar vîscoasă-pură* (ipoteză unanim admisă în marea majoritate a lucrărilor de specialitate și care aproximează satisfăcător fenomenele reale). Mărimea

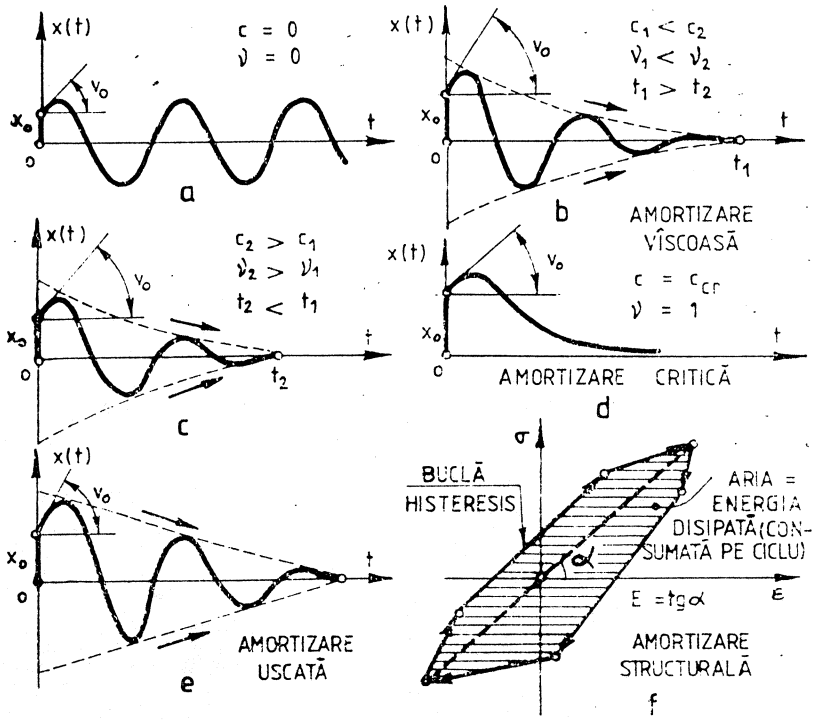


Fig. 1.13

efectivă a amortizării este extrem de dificil de determinat, datorită complexității fenomenelor fizice reale și influențelor altor factori încă neelucidați. Coeficientul de amortizare vîscoasă *c* (care prin multiplicare cu viteza furnizează forța de amortizare) se determină exclusiv pe bază experimentală. Coeficientul de amortizare vîscoasă *c* este deci o mărime ulterioară proiectării care se admite în analiza numerică aprioric, prin extrapolarea rezultatelor experimentale obținute în urma testărilor in situ a unor structuri similare. În domeniul liniar de comportare a structurilor, se va considera că amortizarea vîscoasă, deci coeficientul *c*, nu se modifică pe toată durata mișcării libere sau forțate a sistemului.

Pentru a pune în evidență influența capacității de amortizare, în figura 1.13 se prezintă o succesiune de cazuri semnificative. Astfel, în figura 1.13, *a* este reprezentată mișcarea liberă a unui sistem de 1 GLD în absența amortizării (situație teoretică, ideală). Se poate observa că amplitudinile mișcării nu se modifică în timp, rămînînd constante. În cazul prezenței amortizării vîscoase liniare, pot rezulta situațiile din figurile 1.13, *b* și *c*. Se constată, din cele două reprezentări grafice calitative, că cu cît timpul de încetare completă a mișcării vibratorii este mai mic, cu atît capacitatea de amortizare a sistemului este mai ridicată.

În rezolvările practice, este mai sugestiv să se folosească noțiunea de *fracțiune din amortizarea critică* ν care se exprimă prin raportul adimensional dintre coeficientul efectiv de amortizare vîscoasă *c* și coeficientul de amortizare

critică c_{cr}, adică $\nu = c/c_{cr} (0 \leqslant \nu \leqslant 1)$. *Coeficientul de amortizare critică* reprezintă o cantitate limită de amortizare vîscoasă care elimină complet vibrația sistemului, conducînd la o mișcare aperiodică (fig. 1.13, *d*).

Pentru structurile reale, capacitatea naturală de amortizare vîscoasă este destul de redusă, corespunzîndu-i valori ale fracțiunii din amortizarea critică cuprinse în intervalul $0{,}01 \leqslant \nu \leqslant 0{,}15$ sau exprimate procentual (1 ... 15%). Există mai multe procedee de determinare experimentală a capacității de amortizare a structurilor, două dintre acestea vor fi prezentate în capitolul 2.

În cazul sistemelor cu n GLD, expresia matricei de amortizare vîscoasă, exprimată în coordonate dinamice, are forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & c_{1k} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & c_{2k} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{j1} & c_{j2} & \cdots & c_{jj} & c_{jk} & \cdots & c_{jn} \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kj} & c_{kk} & \cdots & c_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nj} & c_{nk} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}_{n,\,n},$$

unde c_{jk} reprezintă forța de amortizare generalizată care se manifestă pe direcția coordonatei j, datorată unei viteze generalizate unitare imprimată pe direcția coordonatei k.

În baza teoremei de reciprocitate Maxwell-Betti, rezultă că $c_{jk} = c_{kj}$, și deci matricea de amortizare vîscoasă, de rangul n, n, este simetrică, adică

$$[C] = [C]^T.$$

Coeficienții secundari de tipul c_{jk} pun în evidență existența unui *cuplaj disipativ*. Problema decuplării disipative, implicit a diagonalizării matricei de amortizare, se pune de aceeași manieră ca în cazul decuplării inerțiale.

În conformitate cu modelul propus de Rayleigh, forma generală a matricei de amortizare vîscoasă, exprimată prin caracteristicile inerțiale și elastice ale sistemului cu n GLD, are forma:

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K],$$

unde α și β sînt constante de proporționalitate, $[M]$ — matricea de inerție, iar $[K]$ — matricea de rigiditate a sistemului, exprimată în coordonatele dinamice, definită în §1.5.3. Implicațiile acestor forme de exprimare a matricei de amortizare vîscoasă sînt prezentate în capitolul 4.

Asupra capacității de amortizare a structurilor se mai fac unele observații importante. Astfel, dacă amortizarea nu are un caracter dominant vîscos, datorită complexității și influenței multitudinii de factori care intervin, se poate totuși determina un coeficient de amortizare de tip umed, folosind *„principiul amortizării vîscoase echivalente"*, elaborat de L. S. Jacobsen [113], stabilit pe baza investigării răspunsului staționar și permanent al unui sistem cu 1 GLD. Se mai face precizarea că în cazul structurilor importante, dar posedînd capacitate de amortizare naturală redusă, se utilizează elemente artificiale cu rol de amortizare. *Amortizarea artificială* contribuie în mod substanțial la reducerea răspunsului dinamic, avînd rolul de a proteja structura sau de a o izola de influența vibrațiilor puternice. *Izolarea structurilor*, prin folosirea unor sisteme de amortizare (atenuare) artificiale se utilizează frecvent la fundațiile de mașini și agregate industriale, precum și la protecția

antiseismică a construcțiilor (în special a celor cu funcțiune vitală). Dacă modelului Hooke, de comportare fizică ideal elastică, i se asociază modelul Newton, de amortizare vîscoasă liniară, se obține modelul forțelor de „opoziție", denumit și modelul Kelvin-Voigt (v. fig. 1.4, *b*).

1.5.3. Modelare elastică. Flexibilitate-rigiditate

Modelarea elastică a sistemelor dinamice se referă la evaluarea proprietăților de flexibilitate și de rigiditate în raport cu coordonatele dinamice (GLD). Aceste proprietăți, fundamentale, atît în analiza statică, cît și în cea dinamică a structurilor, caracterizează deformabilitatea sistemelor, implicit forțele elastice de revenire (numite și de rezistență întrucît se opun mișcării). În general, valorile coeficienților de flexibilitate și de rigiditate se determină numeric printr-un calcul static obișnuit, avînd în vedere modul de definire al acestor mărimi. Deosebirea dintre acești coeficienți, existenți în statica și în dinamica structurilor, are un caracter de principiu, pur calitativ. Ea constă în definirea și particularitatea coordonatelor în care se exprimă coeficienții de flexibilitate și de rigiditate.

În statica structurilor, coordonatele în raport cu care se determină caracteristicile elastice depind de metodele de rezolvare specifice. Astfel, în *metoda forțelor*, coeficienții de flexibilitate care intervin se definesc în raport cu coordonatele acestei metode, adică *forțele generalizate* din legăturile interioare sau exterioare care au fost suprimate în vederea obținerii sistemului de bază și *exprimării condițiilor de continuitate*. În *metoda deplasărilor*, coeficienții de rigiditate se definesc în raport cu coordonatele specifice acestei metode și anume *deplasările generalizate* pe direcția legăturilor suplimentare, care au fost introduse pentru obținerea sistemului de bază și exprimării *condițiilor de echilibru static*.

În dinamica structurilor, întrucît necunoscutele sînt deplasările generalizate și independente pe direcția GLD, ele nu depind de metodele de investigare analitică ca în statica structurilor. De aceea, dat fiind caracterul unic al necunoscutelor, coeficienții de flexibilitate și de rigiditate se definesc în raport cu *coordonatele dinamice* (GLD) ale sistemului. Datorită unicității coordonatelor, în metodele dinamicii structurilor rezultă pentru acești coeficienți proprietăți importante care nu pot fi puse în evidență în metodele staticii structurilor (v. § 1.14).

Deoarece sistemele dinamice, ce urmează a fi examinate, se consideră cu comportare liniară, toate ipotezele cu privire la modelarea elastică vor fi identice cu cele corespunzătoare sistemelor statice. În acest sens, liniaritatea fizică și cea geometrică permit aplicarea principiului proporționalității, respectiv principiul superpoziției liniare. În același timp, criteriile de modelare a elementelor structurale (liniare și plane), a structurilor și a legăturilor (interioare și exterioare) își mențin valabilitatea din modelarea sistemelor statice.

● *Coeficienții de flexibilitate* (numiți și deplasări generalizate unitare, de natura unor coeficienți de influență) se definesc, în general, ca fiind efecte generalizate (răspunsuri) produse de cauze generalizate (acțiuni) egale cu unitatea. Atît efectele, cît și cauzele ce le generează se manifestă pe direcția coordonatelor dinamice ale sistemului (GLD). Pentru exemplificare, în figura 1.14 s-a considerat un sistem simplu, caracterizat prin patru coordonate independente și anume: două deplasări liniare (*1, 3*) și două deplasări unghiulare (*2, 4*).

COEFICIENȚI DE FLEXIBILITATE

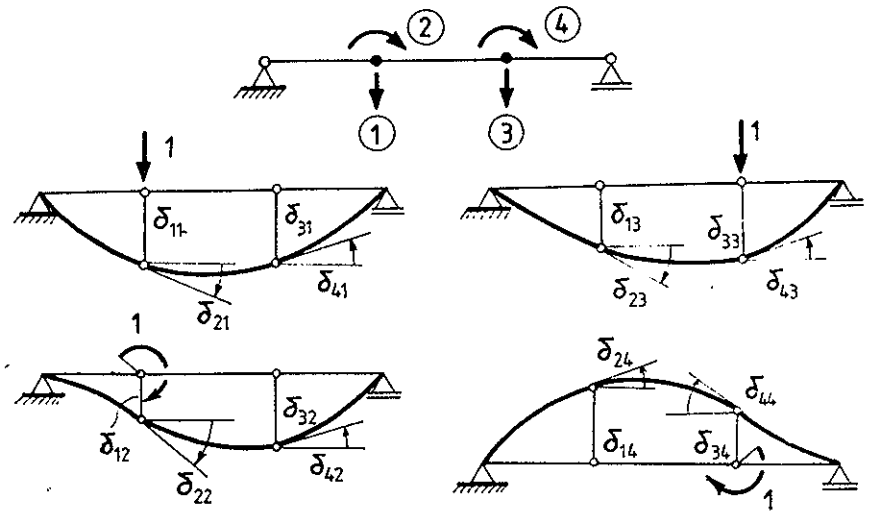


Fig. 1.14

Deplasările generalizate „unitare" care se obțin pe direcția fiecărei coordonate, în urma aplicării succesive a forțelor generalizate „unitate" pe direcția aceloraşi coordonate, definesc matricele coloană ale coeficienților de flexibilitate (numiți şi vectori), adică:

$$\{\delta\}_1 = \begin{Bmatrix} \delta_{11} \\ \delta_{21} \\ \delta_{31} \\ \delta_{41} \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\}_2 = \begin{Bmatrix} \delta_{12} \\ \delta_{22} \\ \delta_{32} \\ \delta_{42} \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\}_3 = \begin{Bmatrix} \delta_{13} \\ \delta_{23} \\ \delta_{33} \\ \delta_{43} \end{Bmatrix}, \quad \{\delta\}_4 = \begin{Bmatrix} \delta_{14} \\ \delta_{24} \\ \delta_{34} \\ \delta_{44} \end{Bmatrix}.$$

Totalitatea acestor matrice coloană generează *matricea de flexibilitate* a sistemului. Se observă că forțele generalizate „unitate" produc deplasări generalizate „unitare" directe (pe direcția coordonatei în raport cu care se aplică) şi indirecte (pe direcția altor coordonate). Deplasările generalizate „unitare" directe se numesc coeficienți de flexibilitate principali, iar cele indirecte, coeficienți de flexibilitate secundari. De altfel, acest fapt rezultă şi din poziția pe care o ocupă coeficienții în matricea de flexibilitate.

În general, dacă se consideră un sistem cu n GLD caracterizat prin coordonatele $1, 2, \ldots j, k, \ldots n$, matricea de flexibilitate va avea forma:

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1j} & \delta_{1k} & \ldots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \ldots & \delta_{2j} & \delta_{2k} & \ldots & \delta_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \ldots & \delta_{jj} & \delta_{jk} & \ldots & \delta_{jn} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \ldots & \delta_{kj} & \delta_{kk} & \ldots & \delta_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \ldots & \delta_{nj} & \delta_{nk} & \ldots & \delta_{nn} \end{bmatrix}_{n,\,n},$$

sau

$$[D] = [\{\delta\}_1 \quad \{\delta\}_2 \ldots \{\delta\}_j \quad \{\delta\}_k \ldots \{\delta\}_n]_{n,\,n}$$

unde δ_{jk} reprezintă deplasarea generalizată pe direcția coordonatei j, cînd pe direcția coordonatei k acționează o forță generalizată egală cu unitatea.

Existența coeficienților de flexibilitate secundari ($\delta_{jk} \neq 0$) pune în evidență interacțiunea elastică între coordonate, numită şi *cuplaj elastic* (sau static).

Dacă prin alegerea particulară a coordonatelor dinamice şi prin transformări corespunzătoare, matricea de flexibilitate se reduce la o formă diagonală (exprimată în noile coordonate), se consideră că sistemul este *decuplat elastic*.

Întrucît, conform teoremei Maxwell-Betti $\delta_{jk} = \delta_{kj}$, care exprimă reciprocitatea deplasărilor generalizate „unitare" indirecte, rezultă că matricea de flexibilitate este o matrice de ordinul (rangul) n, n simetrică. În consecință, această matrice va fi egală cu matricea transpusă:

$$[D] = [D]^T.$$

● *Coeficienții de rigiditate* (numiți şi forțe generalizate unitare, avînd de asemenea caracterul unor coeficienți de influență), prin definiție reprezintă cauze generalizate (acțiuni) care produc efecte generalizate (răspunsuri) egale cu unitatea pe direcția coordonatelor dinamice ale sistemului (GLD). Exemplul prezentat în figura 1.15, *a* (acelaşi sistem din figura 1.14) pune în evidență definirea *coeficienților de rigiditate ca acțiuni*. Totalitatea forțelor generalizate, care aplicate pe direcția coordonatelor sistemului produc o deplasare egală cu unitatea, numai pe direcția unei singure coordonate, determină matricele coloană ale coeficienților de rigiditate de forma:

$$\{k\}_1 = \begin{Bmatrix} k_{11} \\ k_{21} \\ k_{31} \\ k_{41} \end{Bmatrix}, \quad \{k\}_2 = \begin{Bmatrix} k_{12} \\ k_{22} \\ k_{32} \\ k_{42} \end{Bmatrix}, \quad \{k\}_3 = \begin{Bmatrix} k_{13} \\ k_{23} \\ k_{33} \\ k_{43} \end{Bmatrix}, \quad \{k\}_4 = \begin{Bmatrix} k_{14} \\ k_{24} \\ k_{34} \\ k_{44} \end{Bmatrix}.$$

Prin asamblarea acestor submatrice se obține matricea de rigiditate a sistemului. Ca şi în cazul precedent, coeficienții de rigiditate principali (forțe generalizate directe) sînt situați pe diagonala principală a matricei de rigiditate, iar cei secundari (forțe generalizate indirecte) în afara acesteia.

Forma generală a matricei de rigiditate, exprimată prin acțiuni, pentru un sistem cu n GLD va fi:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1j} & k_{1k} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2j} & k_{2k} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{j1} & k_{j2} & \ldots & k_{jj} & k_{jk} & \ldots & k_{jn} \\ k_{k1} & k_{k2} & \ldots & k_{kj} & k_{kk} & \ldots & k_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nj} & k_{nk} & \ldots & k_{nn} \end{bmatrix}_{n,\,n},$$

sau

$$[K] = [\{k\}_1 \quad \{k\}_2 \ldots \{k\}_j \quad \{k\}_k \ldots \{k\}_n]_{n,\,n},$$

în care k_{jk} reprezintă forța generalizată aplicată pe direcția coordonatei j astfel încît să producă pe direcția coordonatei generalizate k o deplasare gene-

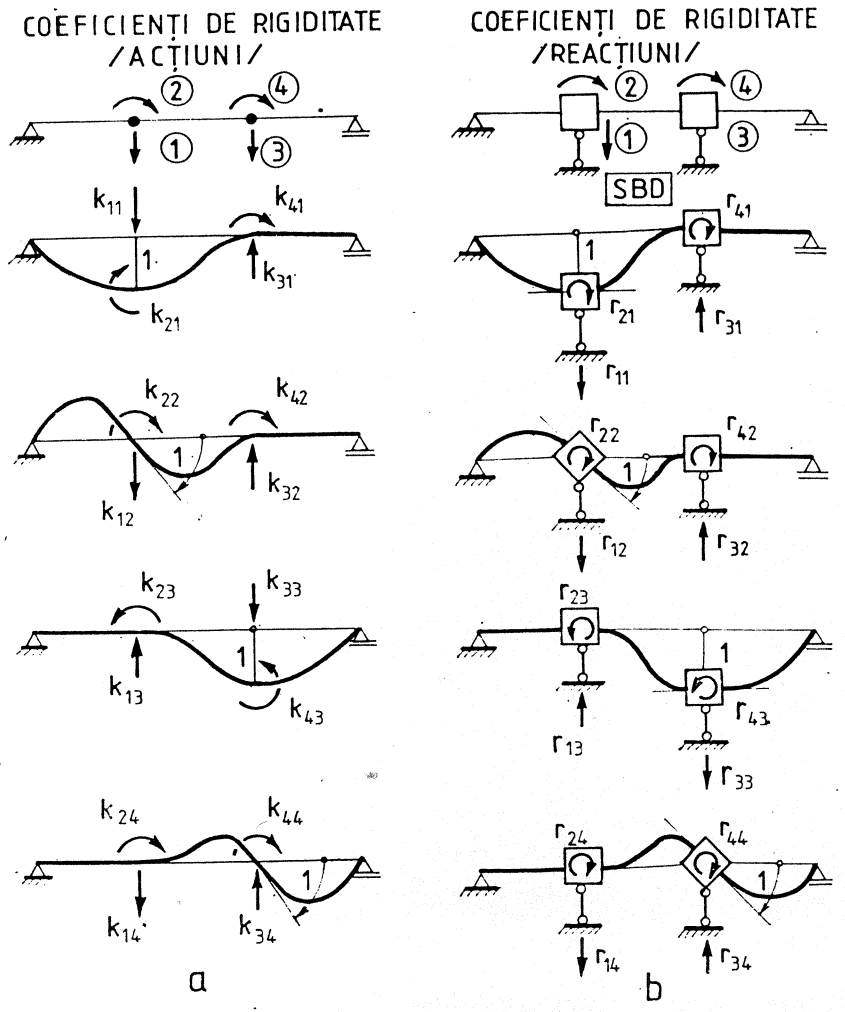


Fig. 1.15

ralizată egală cu unitatea, iar pe direcția celorlalte coordonate deplasări nule.

Componentele unei matrice coloană de forma $\{k\}_j$ definesc ansamblul de forțe generalizate care aplicate pe direcția coordonatelor dinamice *1, 2, ... j, k, ... n* produc o deplasare generalizată egală cu unitatea, numai pe direcția coordonatei *j*, în timp ce pe direcția celorlalte coordonate deplasările generalizate sînt egale cu zero.

Ținînd seama de reciprocitatea forțelor generalizate „unitare" (teorema Maxwell-Betti), rezultă că și matricea de rigiditate este simetrică și de ordinul *n, n*, în care caz

$$[K] = [K]^T,$$

În multe situații, mai ales la structurile formate din bare, matricea de rigiditate exprimată prin acțiuni poate fi evaluată mult mai simplu prin intermediul reacțiunilor „unitare", așa cum se procedează în mod frecvent în statica structurilor. Pentru calculul *coeficienților de rigiditate ca reacțiuni* este necesar a se introduce noțiunea de *„sistem de bază dinamic"* (SBD), sistem care se obține prin blocarea, în poziție inițială, a tuturor deplasărilor generalizate pe direcția coordonatelor sistemului (GLD). Blocarea se obține prin legături simple, specifice deplasărilor generalizate care caracterizează sistemul dinamic (fig. 1.15, *b*).

Expresia matricei de rigiditate, exprimată prin reacțiuni, are forma următoare:

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \dots r_{1j} & r_{1k} \dots r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} \dots r_{2j} & r_{2k} \dots r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{j1} & r_{j2} \dots r_{jj} & r_{jk} \dots r_{jn} \\ r_{k1} & r_{k2} \dots r_{kj} & r_{kk} \dots r_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} \dots r_{nj} & r_{nk} \dots r_{nn} \end{bmatrix}_{n,\,n},$$

unde r_{jk} reprezintă reacțiunea generalizată care se manifestă în blocajul GLD *j*, cînd pe direcția GLD *k* s-a imprimat în SBD o deplasare generalizată egală cu unitatea, celelalte GLD ale sistemului rămînînd blocate.

Remarcile anterioare cu privire la cuplajul și la decuplajul elastic rămîn valabile și în acest caz, cu observația că se exprimă prin intermediul coeficienților de rigiditate secundari.

Teorema reciprocității reacțiunilor unitare Maxwell-Betti demonstrează că $r_{jk} = r_{kj}$, încît

$$[R] = [R]^T.$$

Se observă că un coeficient de rigiditate exprimat prin acțiuni este egal și de același semn cu coeficientul de rigiditate exprimat prin reacțiuni, datorită convențiilor de sens adoptate în SBD.

Generalizînd, se poate scrie egalitatea

$$[R] = [K],$$

deoarece componentele unei matrice coloană a reacțiunilor de tipul $\{r\}_j$ au, ca și componentele matricei acțiunilor $\{k\}_j$, semnificația unor forțe de constrîngere care generează o deformată elastică compatibilă cu definirea coeficienților de rigiditate, deci $r_{jk} = k_{jk}$ $(j, k = 1, 2, \dots n)$.

Dacă coordonatele dinamice precizează numai mișcarea de translație pe direcția GLD, coeficienții de rigiditate vor avea numai semnificația de forțe (fig. 1.10, *c* și *d*).

Coordonatele dinamice se definesc separat de cele statice, numai în anumite situații existînd coincidențe, așa cum rezultă din figurile 1.10 și 1.12.

Deoarece matricele care exprimă proprietățile elastice ale modelelor fizice se generează în raport cu coordonatele dinamice ale sistemului, în cuprinsul lucrării vor mai fi denumite prin *matrice de flexibilitate dinamică* $[D]$ *și matrice de rigiditate dinamică* ($[K] = [R]$), amîndouă fiind pozitiv definite.

În unele tratate de specialitate, coeficienții de flexibilitate se mai numesc *admitanță mecanică*, iar cei de rigiditate *impedanță mecanică* (v. § 1.9).

1.6. MODELAREA RĂSPUNSULUI DINAMIC

Așa cum s-a mai arătat, prin răspuns dinamic se înțelege orice stare ce se manifestă într-o structură, modelată prin sistem dinamic, supusă unor acțiuni variabile în timp. Caracteristicile răspunsului, descrise în timp de anumite legi de variație, se exprimă în coordonatele dinamice ale sistemului (pe direcția GLD). Funcția răspunsului, numită și funcție de ieșire sau semnal de ieșire, este tributară criteriilor de modelare geometrică și fizică utilizate în definirea acțiunilor exterioare și sistemului dinamic, în conformitate cu relația *A-S-R* (v. fig. 1.1). În acest sens, se poate vorbi și de o modelare a răspunsului dinamic deși, prin rezolvarea ecuațiilor de mișcare (care exprimă interdependența dintre cei trei factori *A-S-R*), evaluarea acestuia devine exactă din punct de vedere matematic.

Cu toate că parametrii răspunsului rezultă pe cale pur analitică, în majoritatea situațiilor sînt necesare unele intervenții de modelare a rezultatelor în vederea corelării cu fenomenele reale analizate. Interpretarea și eventuala corectare a răspunsului teoretic se bazează, fie pe experiența profesională a analistului, fie pe cercetări experimentale de identificare instrumentală a parametrilor de răspuns.

În general, răspunsul dinamic se exprimă în mărimi cinematice fundamentale, adică în deplasări, viteze sau accelerații instantanee, pe baza cărora se determină orice altă mărime rezultantă (fig. 1.16). Indiferent de parametrul specificat, în raport cu care este exprimat răspunsul, el reprezintă o variație cu istorie în timp (time history) pe toată durata mișcării. De altfel, noțiunea de răspuns dinamic se confundă în dinamica tradițională cu mișcarea vibratorie a sistemului, ceea ce reprezintă o noțiune relativ abstractă, atît timp

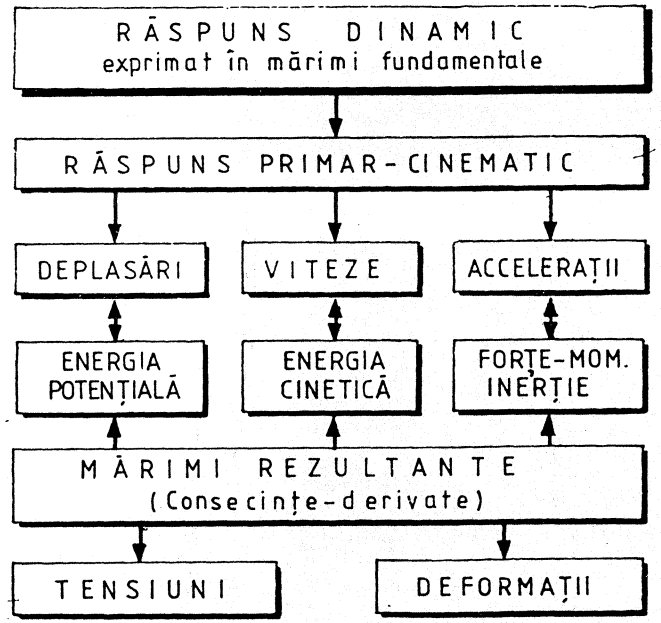


Fig. 1.16

cît nu se materializează conținutul cantitativ al noțiunii. O clasificare a principalelor caracteristici ale răspunsului dinamic este dată în diagrama bloc din figura 1.17, iar definirea acestora este prezentată în continuare.

- *Răspunsul de translație* sau *de rotație* corespunde cu natura coordonatelor dinamice în care se exprimă răspunsul (v. § 1.5.1).
- *Răspunsul liniar* sau *neliniar* este evaluat în funcție de modul de definire al tipului de model geometric și fizic admis pentru sistemul dinamic (v. § 1.5).
- *Răspunsul determinist* sau *aleatoriu* este în directă corespondență cu caracterul acțiunilor exterioare (v. § 1.4) sau cu cel al modelului fizic (v. § 1.5).
- *Răspunsul periodic* reprezintă acel răspuns la care parametrii caracteristici se repetă identic la intervale de timp egale. În studiul răspunsului periodic oarecare, se poate aplica dezvoltarea în serii Fourier.
- *Răspunsul oarecare* este caracterizat printr-o lege matematică de variație nedefinită.

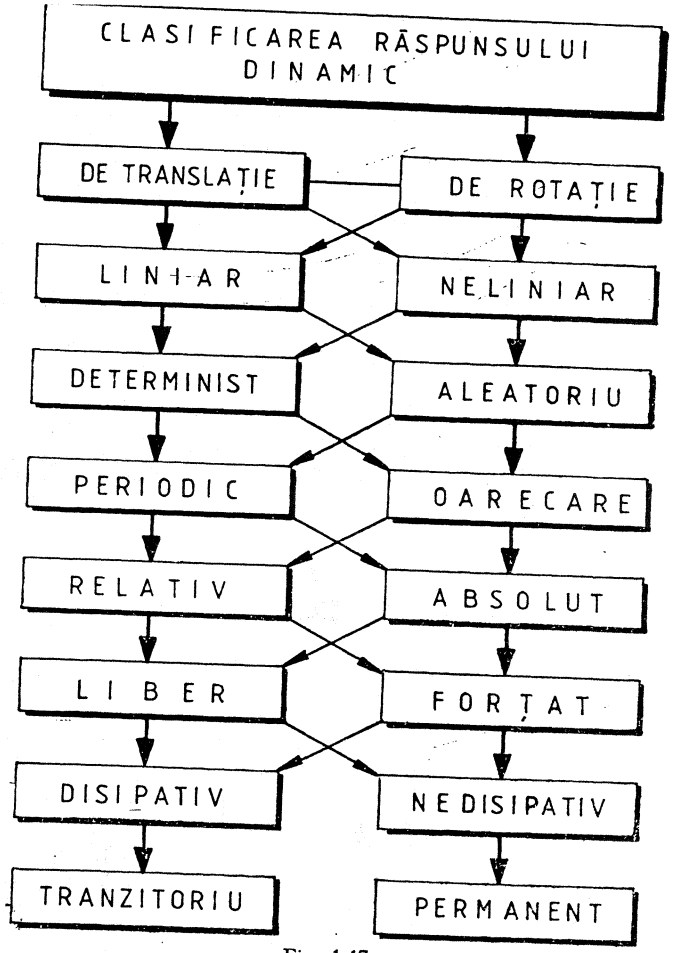


Fig. 1.17

• *Răspunsul relativ* sau *absolut* depinde de reperul în raport cu care se exprimă mișcarea și în special de caracterul indirect, respectiv direct de aplicare a acțiunilor.

• *Răspunsul dinamic liber* sau *forțat*, așa cum s-a mai definit în § 1.2 descrie mișcarea unui sistem dinamic după ce acțiunea a încetat, respectiv cînd acțiunea are un caracter permanent (întreținut).

• *Răspunsul disipativ* sau *nedisipativ* rezultă în funcție de prezența sau absența, în situație idealizată, a amortizării.

• *Răspunsul tranzitoriu* sau *permanent* se definește în directă corelare cu durata mișcării vibratorii a sistemului dinamic.

Se menționează faptul că toate mișcările vibratorii posedă *geneză și ereditate*, întrucît transferul mutual al acțiunii în răspuns se produce în raport cu un reper de referință și se desfășoară în timpul istoric al mișcării sistemului dinamic.

Aspectele concrete, calitative și cantitative, cu privire la diferitele tipuri de răspunsuri, se vor analiza pe parcursul elaborării lucrării.

Revenind la coordonatele dinamice ale modelului fizic, în raport cu care se exprimă răspunsul dinamic, se poate trage concluzia finală că expresia cîmpului de deplasări, corespunzător unei anumite coordonate, permite evaluarea caracteristicilor inerțiale, disipative și elastice de definire în cadrul modelării fizico-geometrice a structurilor reale cu comportare liniară.

1.7. ASPECTE CINEMATICE ÎN TEORIA VIBRAȚIILOR LINIARE

1.7.1. Mărimi caracteristice ale mișcării oscilatorii

În cazul unei mișcări oscilatorii simple, deplasarea poate fi exprimată analitic printr-o funcție trigonometrică de tipul

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{1.1}$$

Mișcarea guvernată de o ecuație de forma (1.1) corespunde unei vibrații armonice simple, în conformitate cu definiția dată anterior în § 1.2.

Variabila $x(t)$, care precizează poziția de echilibru instantaneu, se numește *elongația vibrației*, iar valoarea maximă a elongației x_0 reprezintă *amplitudinea vibrației*. Prin ω se notează *pulsația vibrației* și se măsoară în radiani pe secundă (rad/s), iar prin unghiul φ, *unghiul de fază* sau *faza inițială a vibrației* ($t = 0$).

Timpul minim în care se efectuează un ciclu complet se numește *perioada vibrației*. Perioada se notează cu T și se măsoară de obicei în secunde. Un ciclu complet corespunde valorii $\omega t = 360°$, în care caz, intervalul de timp t fiind egal cu perioada vibrației T, se poate scrie relația

$$\omega T = 2\pi,$$

de unde

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad [\text{s}]. \tag{1.2}$$

Numărul de oscilații complete ce se produc într-o secundă caracterizează *frecvența vibrației*. Frecvența, care reprezintă deci numărul de perioade (de cicli) pe care le are mișcarea într-o secundă, se măsoară în cicli pe secundă (c/s) sau în Hertz-i (Hz) și se notează prin f. Rezultă deci

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad [\text{Hz}], \tag{1.3}$$

adică, frecvența este egală cu inversul perioadei. Din aceste relații se constată că pulsația mai poate fi definită prin numărul de perioade în 2π secunde.

Dacă mișcarea oscilatorie este consecința unei mișcări de rotație, datorită funcționării unui agregat, se utilizează și noțiunea de turație, care reprezintă numărul de cicli pe minut. Turația va avea expresia

$$n = 60f \tag{1.4}$$

și se măsoară în rotații pe minut (r.p.m.).

În tabelul 1.1 se prezintă sintetizate relațiile de legătură existente între caracteristicile unei vibrații.

Cunoscînd ecuația deplasării (1.1), prin derivări succesive se obțin:

— *ecuația vitezei:*

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t) = x_0\omega \cos(\omega t + \varphi), \tag{1.5}$$

având valoarea maximă $x_0\omega$, și

— *ecuația accelerației:*

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}(t) = -x_0\omega^2 \sin(\omega t + \varphi), \tag{1.6}$$

a cărei valoare maximă este $x_0\omega^2$.

Se constată că viteza și accelerația au aceeași pulsație (frecvență sau perioadă) cu deplasarea.

TABELUL 1.1

	T	f	ω	n
T	—	$\frac{1}{f}$	$\frac{2\pi}{\omega}$	$\frac{60}{n}$
f	$\frac{1}{T}$	—	$\frac{\omega}{2\pi}$	$\frac{n}{60}$
ω	$\frac{2\pi}{T}$	$2\pi f$	—	$\frac{n\pi}{30}$
n	$\frac{60}{T}$	$60f$	$\frac{30\omega}{\pi}$	—

Reprezentarea grafică a ecuațiilor (1.1), (1.5) și (1.6) se dă în figura 1.18. Se observă că viteza este defazată (decalată) cu $\pi/2$ înaintea deplasării, iar accelerația cu $\pi/2$ înaintea vitezei, iar valorile de amplitudine ale celor trei mărimi nu se produc în același timp.

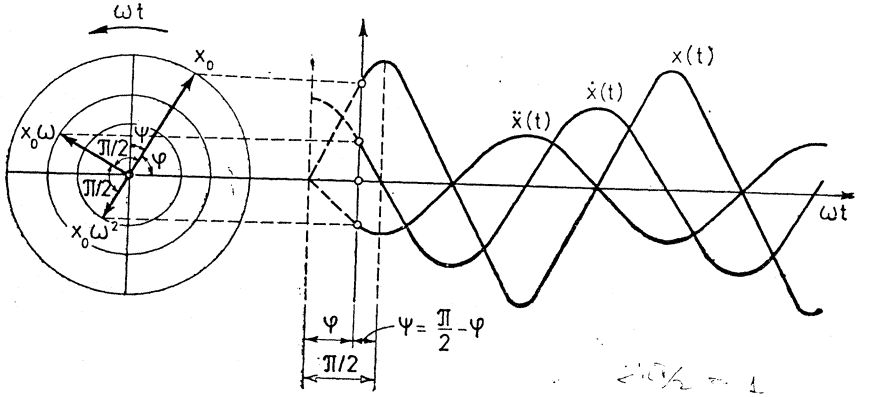


Fig. 1.18

1.7.2. Reprezentări vectoriale în analiza vibrațiilor

Se consideră vectorul $\bar{x}_0$ (fig. 1.19) care se rotește în planul xOy în jurul originii și în sens trigonometric cu viteza unghiulară constantă ω. Proiecțiile acestui vector pe direcția axelor fixe Ox și Oy vor da naștere unor mișcări cu caracter armonic, adică:

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$y(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Această interpretare vectorială a mișcării armonice stă la baza operației de compunere a vibrațiilor.

Se observă că pulsația mișcării este reprezentată chiar prin viteza unghiulară a vectorului rotitor $\bar{x}_0$. Viteza se poate reprezenta printr-un vector rotitor a cărui mărime scalară este $x_0\omega$, iar accelerația tot printr-un vector rotitor de mărime scalară $x_0\omega^2$ (fig. 1.18).

Pentru a exemplifica reprezentarea vectorială a mișcării vibratorii, în figura 1.20 se consideră un caz particular frecvent întîlnit în teoria elementară a vibrațiilor. Astfel, se consideră mișcările armonice rectilinii:

$$x_1(t) = x_{01} \sin \omega t,$$

$$x_2(t) = x_{02} \cos \omega t,$$

care sînt reprezentate în figura 1.20 prin doi vectori rotitori ortogonali $\bar{x}_{01}$ și $\bar{x}_{02}$. Acești doi vectori sumați vectorial pot fi înlocuiți prin vectorul rotitor $\bar{x}_0$ a cărui proiecție pe axa Ox va fi

$$x(t) = x_{01} \sin \omega t + x_{02} \cos \omega t = x_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

rezultînd mărimea scalară (modulul)

$$x_0 = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2},$$

și direcția

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_{02}}{x_{01}}.$$

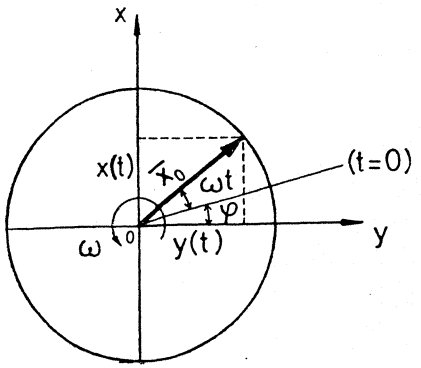


Fig. 1.19

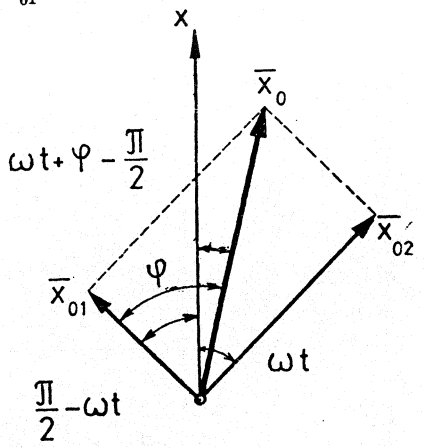


Fig. 1.20

Caracteristicile vectorului rezultant s-au obținut aplicînd teorema proiecțiilor. Vectorul rezultant definește tot o mișcare armonică, avînd pulsația egală cu pulsația celor două mișcări date și faza inițială φ.

Reprezentarea vectorială a elementelor unei mișcări vibratorii stă la baza analizei vibrațiilor sistemelor elastice în planul fazelor. Modul concret de aplicare a *metodei planului fazelor* este descris în capitolul 2.

1.7.3. Reprezentarea vibrațiilor prin numere complexe

Metoda reprezentării vectoriale nu este întotdeauna un instrument convenabil de analiză a vibrațiilor, întrucît de fiecare dată trebuie să se opereze cu proiecțiile vectorilor rotitori, ceea ce face să dispară în mare măsură avantajele pe care le oferă calculul vectorial. Un mod mai simplu și mai direct de a opera numeric asupra reprezentării mișcării oscilatorii prin vectori rotitori îl constituie utilizarea numerelor complexe.

O vibrație armonică de forma (1.1) poate fi reprezentată în planul complex prin expresia

$$z(t) = x_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \tag{1.7}$$

unde

$$j = \sqrt{-1}.$$

Ecuația (1.7) mai poate fi exprimată prin intermediul a două vibrații armonice, ținînd seama de exprimarea lui $e^{j(\omega t + \varphi)}$ prin funcții trigonometrice folosind formula lui Euler:

$$z(t) = x_0[\cos(\omega t + \varphi) + j \sin(\omega t + \varphi)]. \tag{1.8}$$

Proiecția pe axa Ox a vectorului $\bar{x}_0$ este partea reală a expresiei (1.8) și reprezintă o vibrație armonică, iar proiecția pe axa Oy a aceluiași vector este partea imaginară a expresiei (1.8), rezultînd tot o vibrație armonică (fig. 1.21).

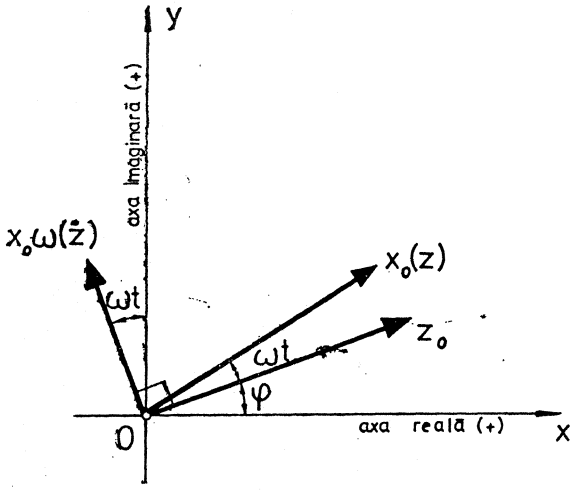


Fig. 1.21

Deci:

$$x(t) = \mathrm{Re}(z) = x_0 \cos(\omega t + \varphi), \tag{1.9}$$

$$y(t) = \mathrm{Im}(z) = x_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{1.10}$$

Ecuația (1.7) se mai poate pune sub forma

$$z(t) = x_0 e^{j\omega t} \cdot e^{j\varphi} = (x_0 e^{j\varphi}) \cdot e^{j\omega t}. \tag{1.11}$$

Introducînd notația

$$z_0 = x_0 e^{j\varphi} = x_0(\cos\varphi + j \sin\varphi), \tag{1.12}$$

rezultă

$$z(t) = z_0 e^{j\omega t} = z_0(\cos\omega t + j \sin\omega t). \tag{1.13}$$

Această ultimă ecuație caracterizează o mișcare armonică de amplitudine z_0 și fază nulă (fig. 1.13).

Derivînd ecuația (1.13) în raport cu t se obține

$$\frac{dz(t)}{dt} = j\omega z_0 e^{j\omega t}, \tag{1.14}$$

ceea ce arată că derivarea acestui număr complex rezultă prin multiplicare cu $j\omega$. Dezvoltînd (1.14)

$$\frac{dz(t)}{dt} = z_0\omega(j\cos\omega t - \sin\omega t), \tag{1.15}$$

se constată că, în reprezentarea vectorială, prin derivare se multiplică modulul vectorului z_0 cu ω, obținîndu-se un vector rotitor decalat înainte (defazat) cu $\pi/2$, avînd deci semnificația unei viteze. Rezultă că multiplicarea unui număr complex cu j conduce la o rotație a vectorului rotitor, prin care este reprezentat acest număr, cu $\pi/2$ înainte și fără a-i modifica valoarea absolută.

În operațiile practice cu numere complexe se utilizează noțiunile de algebră cunoscute, ținînd seama că totdeauna elementele mișcării (deplasarea, viteza, accelerația) sînt reprezentate prin partea reală a expresiilor ce se obțin.

Acest mod de interpretare a mișcării prin numere complexe stă la baza *metodei impedanței*, utilizată în studiul vibrațiilor sau în teoria semnalelor.

1.7.4. Compunerea mișcărilor vibratorii

Bazați pe posibilitatea reprezentării vectoriale a mișcării armonice se va expune în continuare modul în care pot fi compuse două mișcări oscilatorii simple.

a. **Compunerea a două vibrații avînd aceleași direcții și pulsații.** Se consideră mișcările armonice simple (fig. 1 22)

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= x_{01}\sin(\omega t + \varphi_1) \\ x_2(t) &= x_{02}\sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right\}. \tag{1.16}$$

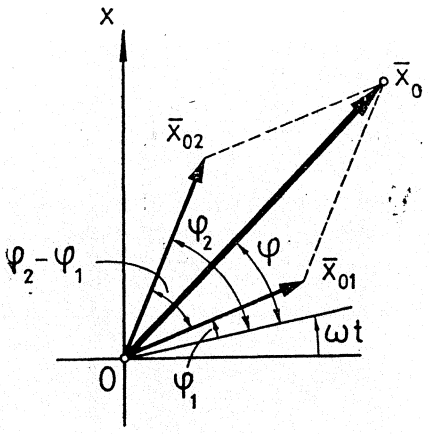


Fig. 1.22

Cele două deplasări $x_1(t)$ și $x_2(t)$ avînd aceeași direcție, deplasarea rezultantă se va obține printr-o sumare algebrică (ca rezultat al aplicării teoremei proiecțiilor), adică:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = x_{01}\sin(\omega t + \varphi_1) + x_{02}\sin(\omega t + \varphi_2) = \\ = x_0 \sin(\omega t + \varphi). \tag{1.17}$$

Dezvoltînd funcțiile trigonometrice conținute în relația (1.17) și identificînd coeficienții variabilelor $\sin\omega t$ și $\cos\omega t$, se obține expresia

$$x(t) = C_1 \sin\omega t + C_2 \cos\omega t = x_0 \sin(\omega t + \varphi), \tag{1.18}$$

în care

$$C_1 = x_0\cos\varphi = x_{01}\cos\varphi_1 + x_{02}\cos\varphi_2,$$

$$C_2 = x_0\sin\varphi = x_{01}\sin\varphi_1 + x_{02}\sin\varphi_2,$$

de unde rezultă amplitudinea x_0 și faza φ a mișcării rezultante

$$x_0 = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{C_2}{C_1} = \frac{x_{01}\sin\varphi_1 + x_{02}\sin\varphi_2}{x_{01}\cos\varphi_1 + x_{02}\cos\varphi_2}.$$

În același timp, ecuația (1.18) demonstrează că o mișcare armonică avînd faza φ se poate descompune în două oscilații armonice simple defazate cu unghiul $\frac{\pi}{2}$ (fig. 1.23).

Considerînd cazul particular în care cele două mișcări (1.16) au aceeași fază, adică $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, vectorul rezultant va avea modulul

$$x_0 = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}} = x_{01} + x_{02}$$

și direcția φ, întrucît cei doi vectori sînt coliniari.

Dacă $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, amplitudinea mișcării rezultante are aceeași expresie cu cea de mai sus, iar faza inițială va fi nulă.

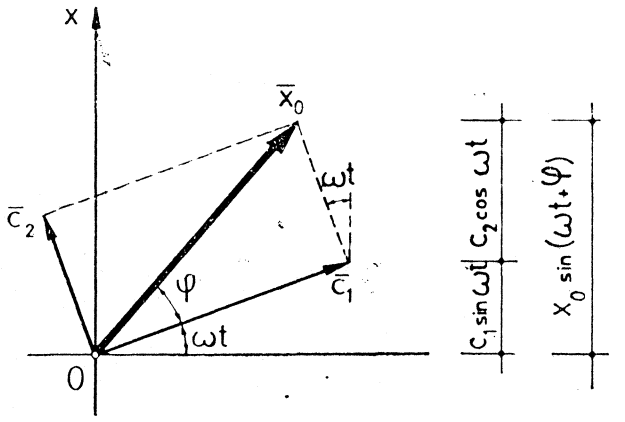


Fig. 1.23

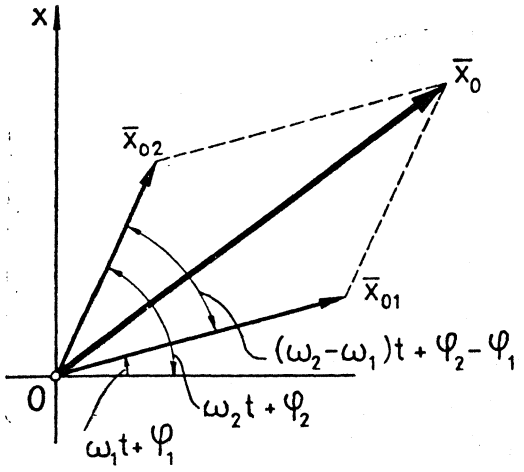


Fig. 1.24

b. **Compunerea a două vibrații având aceeași direcție dar pulsații diferite.** Admițînd următoarele mișcări armonice simple

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= x_{01}\sin(\omega_1 t+\varphi_1)\\ x_2(t) &= x_{02}\sin(\omega_2 t+\varphi_2)\end{aligned}\right\} \quad (1.19)$$

rezultanta lor se obține prin compunerea vectorială prezentată în figura 1.24.

Întrucît pulsațiile celor două oscilații sînt diferite, cei doi vectori rotitori $\bar{x}_{01}$ și $\bar{x}_{02}$ vor efectua o mișcare de rotație cu viteze unghiulare ω_1 și ω_2, astfel încît unghiul dintre acești vectori este variabil în timp. Rezultă deci că mișcarea rezultantă nu mai are caracter armonic. Modulul vectorului rezultant x_0 va avea expresia (fig. 1.24):

$$x_0 = \sqrt{x_{01}^2 + x_{02}^2 + 2x_{01}x_{02}\cos[(\omega_2-\omega_1)t+\varphi_2-\varphi_1]}.$$

Prin particularizarea acestui caz, făcînd $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ se obțin rezultatele de la punctul *a*.

Dacă cele două vibrații au pulsațiile foarte apropiate, dar nu egale, vibrația rezultantă este *cvasiarmonică*, avînd amplitudini variabile. În acest caz, se consideră vibrația *modulată în amplitudini*, iar din punct de vedere mecanic ea poate caracteriza *fenomenul de bătăi* (vezi tabelul 1.3). În capitolul 2 va fi descris mai în amănunt acest fenomen, insistîndu-se asupra importanței sale efective în dinamica structurilor.

Din analiza efectuată rezultă următoarele concluzii:

— prin compunerea a două vibrații armonice de aceeași pulsație se obține tot o vibrație armonică avînd pulsația identică cu a componentelor;

— cînd se compun două vibrații armonice cu pulsații diferite, rezultă în general o vibrație oarecare;

— dacă raportul pulsațiilor celor două vibrații este o fracție rațională, vibrația rezultantă are caracter periodic.

1.7.5. Vibrații periodice. Dezvoltări în serii Fourier

În sens mai general, o vibrație este o mișcare periodică numai în cazul în care toate elementele mișcării se repetă identic după un anumit interval de timp T, numit perioada vibrației. Din punct de vedere matematic, periodicitatea funcției care caracterizează o mișcare periodică se exprimă astfel

$$x(t) = x(t+T). \quad (1.20)$$

Cea mai simplă vibrație periodică este vibrația armonică descrisă de o ecuație de forma (1.1), dar nu toate vibrațiile periodice sînt armonice.

Vibrațiile periodice oarecare se studiază folosind reprezentarea mișcării prin serii Fourier, exprimate ca suma a două funcții armonice, adică

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t), \quad (1.21)$$

sau, în formă dezvoltată

$$F(t) = a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \ldots + a_n\cos n\omega t + \ldots$$
$$\ldots + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \ldots + b_n\sin n\omega t + \ldots. \quad (1.22)$$

Expresiile generale ale coeficienților seriei Fourier se obțin prin aplicarea proprietății de ortogonalitate a funcțiilor simple trigonometrice, rezultînd:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\cos n\omega t\,dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T F(t)\sin n\omega t\,dt,$$

unde

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

reprezintă perioada funcției $F(t)$. Se poate constata că primul termen al seriei Fourier a_0 reprezintă *valoarea medie* a funcției $F(t)$ pe durata unui ciclu. Dacă funcția $F(t)$ este armonică, a_0 devine egal cu zero.

Relația (1.22) arată că funcția periodică $F(t)$ poate fi descompusă teoretic într-o infinitate de componente, numite *armonici*, datorită caracterului armonic al funcțiilor care intervin.

În baza rezultatelor obținute anterior, prin aplicarea relației (1.18), termenii seriei (1.21) de tipul $a_n\cos n\omega t$ și $b_n\sin n\omega t$ pot fi exprimați și astfel:

$$a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t = c_n\sin(n\omega t+\varphi_n),$$

în care

$$c_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \qquad \operatorname{tg}\varphi_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

În această situație seria Fourier mai poate fi scrisă sub forma

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\sin(n\omega t+\varphi_n), \quad (1.23)$$

care, prin dezvoltare devine

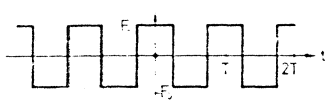
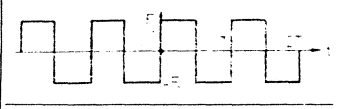
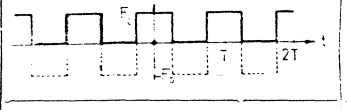
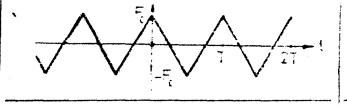
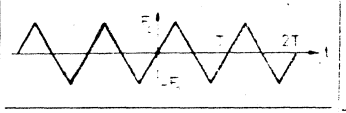
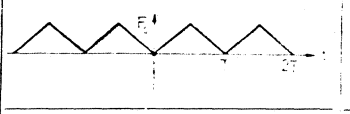
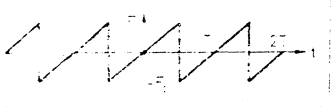
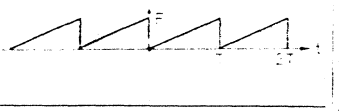
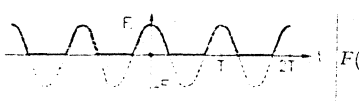
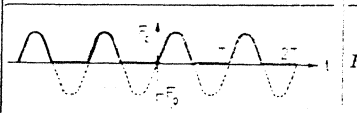
$$F(t) = a_0 + c_1\sin(\omega t+\varphi_1) + c_2\sin(2\omega t+\varphi_2) + \ldots +$$
$$+ c_n\sin(n\omega t+\varphi_n) + \ldots \quad (1.24)$$

Reprezentarea grafică a valorilor c_n în funcție de frecvența corespunzătoare caracterizează *spectrul Fourier discret al amplitudinilor*.

Al doilea termen al seriei (1.24) se numește *termen fundamental* sau prima armonică a funcției $F(t)$. Termenul n reprezintă armonica $(n-1)$ a aceleiași funcții.

Valorile coeficienților a_n și b_n, respectiv c_n și φ_n pot fi determinate teoretic pentru orice funcție (vibrație) periodică dată. Această problemă de studiu a mișcărilor periodice poartă denumirea de *analiză armonică* sau *analiză Fourier*. Integralele a_n și b_n nu pot fi rezolvate analitic decît pentru puține funcții $F(t)$. În tabelul 1.2 se prezintă cîteva funcții periodice mai frecvent întîlnite în studiul vibrațiilor, descompuse în serii Fourier.

TABELUL 1.2

1		$F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} \cos n\omega t$
2		$F(t) = \frac{4F_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n} \sin n\omega t$
3		$F(t) = \frac{F_0}{2} + \frac{2F_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n} \cos n\omega t$
4		$F(t) = \frac{8F_0}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2} \cos n\omega t$
5		$F(t) = \frac{8F_0}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin n\omega t$
6		$F(t) = \frac{F_0}{2} - \frac{4F_0}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2} \cos n\omega t$
7		$F(t) = \frac{2F_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n} \sin n\omega t$
8		$F(t) = \frac{F_0}{2} - \frac{F_0}{\pi} \sum_{n=1,2,\ldots} \frac{1}{n} \sin n\omega t$
9		$F(t) = \frac{F_0}{\pi} + \frac{F_0}{2} \cos \omega t + \frac{2F_0}{\pi} \sum_{n=4,4\ldots} \frac{(-1)^{(n+2)/2}}{n^2 - 1} \cos n\omega t$
10		$F(t) = \frac{F_0}{\pi} + \frac{F_0}{2} \sin \omega t - \frac{2F_0}{\pi} \sum_{n=2,4,\ldots} \frac{1}{n^2 - 1} \cos n\omega t$

Dacă funcția periodică $F(t)$ este *pară*, seria sa Fourier va avea forma

$$F(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t,$$

iar dacă $F(t)$ este o funcție *impară*, seria Fourier va fi

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t.$$

Forma complexă a seriei Fourier corespunzătoare funcției periodice $F(t)$ se exprimă astfel

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t},$$

unde

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) e^{-jn\omega t} dt. \tag{1.25}$$

În acest caz, $F(t)$ este definită ca o funcție reală sau complexă și integrabilă în intervalul $[t_0, t_0 + T]$.

În continuare se vor face unele precizări asupra caracterului periodic al unei vibrații rezultate prin compunerea a două vibrații armonice simple.

Se vor considera vibrațiile armonice

$$x_1(t) = x_{01} \sin \omega_1 t,$$
$$x_2(t) = x_2 \sin \omega_2 t,$$

care compuse dau vibrația rezultantă

$$x(t) = x_{01} \sin \omega_1 t + x_{02} \sin \omega_2 t.$$

Dacă se notează cu T perioada vibrației periodice rezultante, conform definiției date, este necesar să se verifice condiția (1.20), care va fi scrisă sub forma

$$x(t + T) - x(t) = 0,$$

sau

$$x_{01} \sin \omega_1(t + T) + x_{02} \sin \omega_2(t + T) - x_{01} \sin \omega_1 t - x_{02} \sin \omega_2 t = 0.$$

Dezvoltînd și grupînd termenii expresiei de mai sus se obține

$$x_{01} \sin \omega_1 t(\cos \omega_1 T - 1) + x_{01} \cos \omega_1 t(\sin \omega_1 T) +$$
$$+ x_{02} \sin \omega_2 t(\cos \omega_2 T - 1) + x_{02} \cos \omega_2 t(\sin \omega_2 T) = 0.$$

Ca această condiție să fie satisfăcută, este necesar să existe următoarele relații

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 T &= 2n_1\pi \\ \omega_2 T &= 2n_2\pi \end{aligned}\right\}, \tag{1.26}$$

unde n_1 și n_2 sînt numere întregi și prime între ele.

Ținînd seama că pulsațiile celor două vibrații pot fi exprimate prin intermediul perioadelor T_1 și T_2

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \quad \text{și} \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T_2},$$

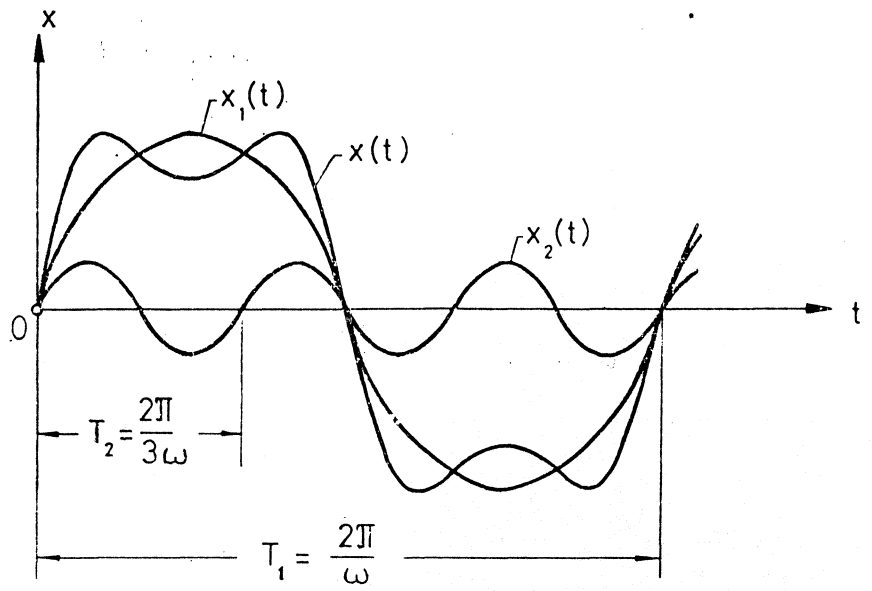


Fig. 1.25

relațiile (1.26) se reduc la următoarele egalități:

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2,$$

de unde

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{1.27}$$

În baza relației (1.27) se trage concluzia că din suprapunerea (compunerea) a două vibrații armonice se obține o vibrație periodică numai dacă raportul pulsațiilor (sau perioadelor) este o fracție rațională. Se mai poate afirma că o vibrație este periodică numai cînd funcțiile armonice care o compun fac parte dintr-o serie Fourier.

În figura 1.25 se exemplifică compunerea sau descompunerea unei vibrații periodice. Cele două vibrații componente armonice au expresiile

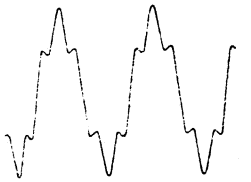
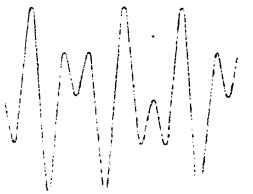
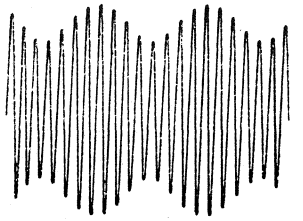
$$x_1(t) = x_{01} \sin \omega t,$$

$$x_2(t) = x_{02} \sin 3\omega t.$$

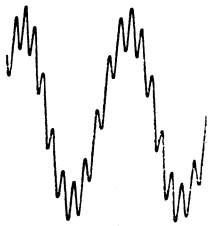
Se menționează faptul că în funcție de defazajul existent între cele două vibrații, vibrația rezultantă poate avea configurații diverse.

În tabelul 1.3 se prezintă cîteva compuneri de vibrații armonice pentru diverse rapoarte ale pulsațiilor și amplitudinilor. Aceste înregistrări fac parte dintr-un studiu mai amplu, cu privire la compunerea mișcărilor vibratorii, efectuat în laboratorul de Dinamica structurilor și inginerie seismică al catedrei de Mecanică teoretică, statica și dinamica structurilor din Institutul de Construcții București, de către autorul acestei lucrări în colaborare cu ing. Dan Rădulescu.

TABELUL 1.3

Nr.	Forma oscilogramei	ω_1/ω_2	x_{01}/x_{02}
1		$\frac{1}{3}$	1
2		$\frac{1}{3}$	1
3		$\frac{1}{5}$	4
4		$\frac{3}{5}$	1
5		$\frac{1}{10}$	4
6		$\frac{9}{10}$	1
7		$\frac{9}{10}$	1

TABELUL 1.3 (continuare)

Nr.	Forma oscilogramei	ω_1/ω_2	x_{01}/x_{02}
8		10	1
9		10	$\frac{1}{4}$

1.8. ELEMENTE DE CALCUL OPERAȚIONAL ÎN STUDIUL VIBRAȚIILOR

Analiza răspunsului structurilor supuse acțiunii șocurilor sau a vibrațiilor tranzitorii poate fi efectuată cu deosebită eficacitate prin utilizarea noțiunilor de calcul operațional aplicate în informatică și teoria comunicațiilor. În acest paragraf vor fi expuse succint cîteva aspecte privind utilizarea unor elemente de calcul operațional în teoria vibrațiilor. Se va insista în special numai asupra acelor noțiuni care intervin direct în dinamica structurilor, fără a prezenta demonstrarea riguroasă a unor relații care sînt studiate pe larg în diverse tratate sau lucrări de specialitate.

1.8.1. Conceptul transformării ecuațiilor diferențiale liniare în ecuații algebrice

Toate ecuațiile de condiție care descriu mișcarea sistemelor oscilante în dinamica liniară sînt ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

Dacă $f(t)$ este o funcție definită printr-o ecuație diferențială liniară și anumite condiții inițiale (fig. 1.26), soluțiile problemei pot fi mai simplu obținute înlocuind funcția $f(t)$ cu o altă funcție $F(s)$ definită de următoarea integrală de transformare

$$F(s) = \int_a^b f(t)\, K(s, t)\, dt,$$

unde $K(s, t)$ care depinde de parametrul complex s și timpul t se numește *nucleul transformării*.

Prin utilizarea integralei de transformare se poate înlocui o ecuație diferențială liniară dependentă de variabila $f(t)$ printr-o ecuație algebrică obișnuită, care conține termenii funcției de transformare $F(s)$, unde parametrul complex s

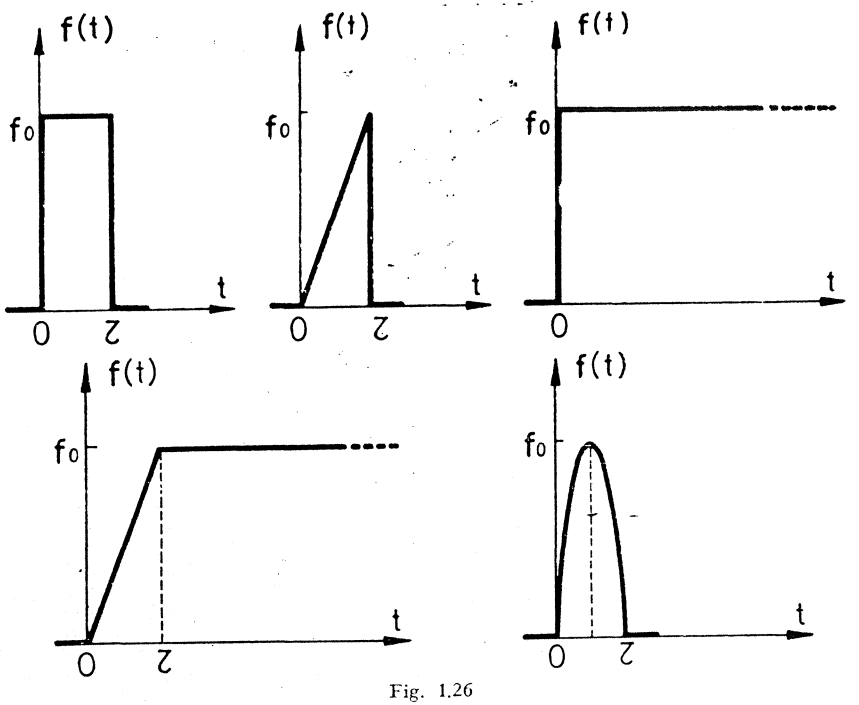


Fig. 1.26

are forma $s = \sigma + j\omega$, ω fiind pulsația, iar $j = \sqrt{-1}$. Ecuația algebrică în $F(s)$, care se obține, poate fi rezolvată direct și în general simplu, iar funcția originală $f(t)$ se determină printr-o operație de transformare inversă. Această ecuație algebrică se mai numește ecuație operațională.

Metoda integralei de transformare are o aplicabilitate generală la rezolvarea problemelor definite de ecuații liniare cu derivate parțiale, avînd deci o arie vastă de utilizare în mecanica structurilor. Problema cea mai dificilă o constituie însă operația prin care se revine de la soluția ecuației din domeniul complex (s), numit și domeniul „imaginii", la soluția ecuației în domeniul timp (t). Această operație se numește transformare inversă. În general, pentru rezolvările practice, se folosesc tabele de funcții curent întîlnite în tehnică și care cuprind atît *transformarea directă*, cît și *transformarea inversă*. Integrala de transformare este o mărime asociată funcției $f(t)$.

În mod curent se utilizează transformările elaborate de Laplace și de Fourier care se bazează pe observația că la funcții de excitație de tipul $e^{j\omega t}$, caracteristicile de răspuns ale unui sistem oscilant liniar au aceeași formă cu excitația. Această proprietate va fi demonstrată în § 1.12.

Integrala de transformare se aplică cu succes la mișcările provocate de *șocuri* sau *vibrații tranzitorii*, de tipul celor prezentate în figura 1.26.

În rezumat, principalele etape de calcul pe care le implică folosirea metodei integralei de transformare sînt următoarele (fig. 1.27):

— transformarea ecuațiilor diferențiale din domeniul timp (t) într-un sistem de ecuații algebrice în domeniul complex al variabilei de transformare (s), adică în domeniul imaginii;

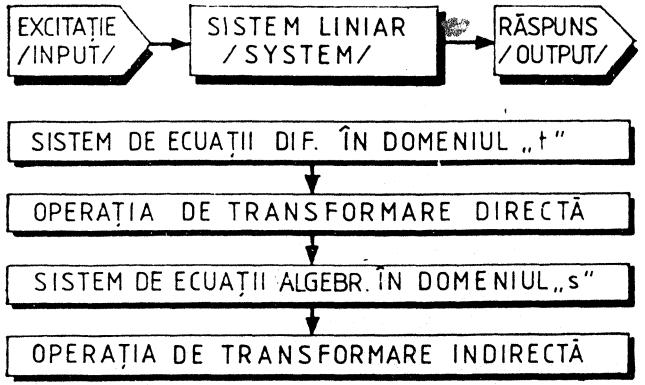


Fig. 1.27

— rezolvarea sistemului algebric de ecuații și determinarea soluțiilor în funcție de variabila s;

— obținerea soluțiilor ecuațiilor diferențiale (soluții originale) printr-o operație de transformare inversă.

1.8.2. Transformata Laplace

a. **Transformata directă.** Transformata Laplace directă se definește ca o corespondență dintre două funcții, avînd forma

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \tag{1.28}$$

unde funcția $f(t)$ este definită în domeniul timp de la $t > 0$, iar $F(s)$ este transformata acestei funcții în domeniul complex s. Funcția $F(s)$ se numește „imaginea" sau transformata Laplace a funcției $f(t)$ și se mai notează prin $\mathcal{L}[f(t)]$. Variabila s are caracter complex fiind

$$s = \sigma + j\omega, \quad \text{unde} \quad \sigma > 0, \; j = \sqrt{-1}.$$

b. **Transformata inversă.** Cunoscînd transformata Laplace, operația de revenire la funcția originală $f(t)$ se face aplicînd transformata inversă, care se definește prin formula

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds, \tag{1.29}$$

în care a este astfel ales încît pentru $t < 0$ să rezulte $f(t) = 0$.

Aplicarea transformatei directe și inverse este substanțial ușurată datorită existenței tabelelor de funcții care conțin aceste operații. În tabelul 1.4 este dată pentru o serie de exemple corespondența dintre funcția originală $f(t)$ și transformata Laplace $F(s)$.

TABELUL 1.4

Nr. crt.	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	Nr. crt.	$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
1	$\frac{1}{s}$	Funcția delta δ(t)-Dirac	11	$\frac{1}{s^2(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^3}(at - \sin at)$
2	$\frac{1}{s^2}$	t	12	$\frac{1}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
3	$\frac{1}{s + a}$	e^{-at}	13	$\frac{s}{(s^2 + a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin at$
4	$\frac{1}{s - a}$	e^{at}	14	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$	$t\cos at$
5	$\frac{1}{(s - a)^2}$	te^{at}	15	$\frac{s + b}{(s + b)^2 + a^2}$	$e^{-bt}\cos at$
6	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	$\sin at$	16	$\frac{a}{(s - b)^2 + a^2}$	$e^{-bt}\sin at$
7	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$	17	$\frac{s - b}{(s - b)^2 + a^2}$	$e^{bt}\cos at$
8	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{sh} at$	18	$\frac{a}{(s - b)^2 + a^2}$	$e^{bt}\sin at$
9	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\operatorname{ch} at$	19	$\frac{1}{(s + a)^2}$	te^{-at}
10	$\frac{1}{s(s^2 + a^2)}$	$\frac{1}{a^2}(1 - \cos at)$	20	$\frac{s}{(s + a)^2}$	$e^{-at}(1 - at)$

c. **Transformata derivatelor.** Transformata Laplace a derivatei de ordinul întîi:

$$\mathcal{L}\frac{df(t)}{dt} = \mathcal{L}[f^{(1)}(t)] = \int_0^\infty e^{-st}\frac{df(t)}{dt}dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-s\,e^{-st})\, f(t)\, dt,$$

și deci

$$\mathcal{L}[f^{(1)}(t)] = -f(0) + sF(s), \tag{1.30}$$

unde $f(0)$ este valoarea inițială a funcției $f(t)$ la timpul $t = 0$.

Transformata Laplace a derivatei de ordinul n

$$\mathcal{L}\frac{d^n f(t)}{dt^n} = \mathcal{L}[f^n(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

sau

$$\mathcal{L}[f^n(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0). \tag{1.31}$$

d. **Aplicarea principiului superpoziției.** Dacă funcția $f(t)$ este definită ca o combinație liniară de funcții $f_i(t)$, adică

$$f(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_i f_i(t) + \ldots + c_n f_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(t), \tag{1.32}$$

transformata Laplace a acestei funcții va fi

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = c_1 \mathcal{L}[f_1(t)] + c_2 \mathcal{L}[f_2(t)] + \ldots + c_i \mathcal{L}[f_i(t)] + \ldots + c_n \mathcal{L}[f_n(t)],$$

sau

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + \ldots + c_i F_i(s) + \ldots + c_n F_n(s),$$

încît rezultă că și transformata Laplace are un caracter liniar, adică

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \sum_{i=1}^{n} c_i F_i(s). \tag{1.33}$$

1.8.3. Integrala de convoluție și teorema lui Borel, folosind transformata Laplace

Se consideră funcțiile $f_1(t)$ și $f_2(t)$ definite numai pentru $t > 0$, cărora le corespund transformatele Laplace $F_1(s)$, respectiv $F_2(s)$. Integrala de convoluție se definește astfel:

— în domeniul timpului (t)

$$x(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f_1(t) * f_2(t); \tag{1.34}$$

— în domeniul imaginii (s)

$$X(s) = F_1(s) \cdot F_2(s), \tag{1.35}$$

în care

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} x(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f_1(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

În baza definițiilor expuse, Borel a formulat următoarea teoremă: *transformata inversă a produsului dintre două transformate Laplace este egală cu integrala de convoluție a inverselor transformatelor lor.* Deci

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s) \cdot F_2(s)] = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f_1(t) * f_2(t) = x(t), \tag{1.36}$$

unde, inversele transformatelor au expresiile

$$\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = f_1(t),$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = f_2(t).$$

Teorema lui Borel este fundamentală în studiul analizei semnalelor în teoria transmiterii informațiilor avînd aplicabilitate directă în definirea răspunsului unui sistem oscilant la excitații produse de șoc sau vibrații tranzitorii, cum este cazul mișcărilor seismice. Demonstrația acestei teoreme este elementară. De altfel concluzia acestei teoreme este evidentă și ușor de intuit. Teorema lui Borel mai este cunoscută în literatura de specialitate sub denumirea de integrala lui Duhamel sau integrala de superpoziție.

1.8.4. Transformata Fourier

a. **Transformata directă.** Prin definiție, transformata Fourier, directă, a unei funcții $f(t)$ este

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-j\omega t} \cdot f(t) \cdot \mathrm{d}t. \tag{1.37}$$

Transformata Fourier a funcției $f(t)$ definește *spectrul Fourier* sau *spectrul de amplitudine.*

Spectrul Fourier permite determinarea amplitudinilor și fazelor unei mișcări în funcție de pulsația ω. Funcția $f(t)$ poate reprezenta un parametru oarecare al mișcării sau al excitației, dependent de timp.

Exprimat prin numere complexe, spectrul Fourier are forma

$$F(j\omega) = \mathrm{Re}[F(j\omega)] + j\mathrm{Im}[F(j\omega)]. \tag{1.38}$$

În figura 1.28 este reprezentată componenta complexă de pulsație ω a spectrului Fourier cu modulul $|F(j\omega)|$, avînd partea reală $\mathrm{Re}[F(j\omega)]$, partea imaginară $\mathrm{Im}[F(j\omega)]$ și unghiul de fază $\theta(\omega)$. Rezultă deci

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|\,\mathrm{e}^{j\theta(\omega)}, \tag{1.39}$$

în care

$$|F(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2[F(j\omega)] + \mathrm{Im}^2[F(j\omega)]}$$

$$\theta(\omega) = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathrm{Im}[F(j\omega)]}{\mathrm{Re}[F(j\omega)]}.$$

b. **Transformata inversă.** Dacă se cunoaște transformata directă $F(j\omega)$, funcția originală $f(t)$ se obține cu ajutorul următoarei formule de transformare inversă

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)\,\mathrm{e}^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \tag{1.40}$$

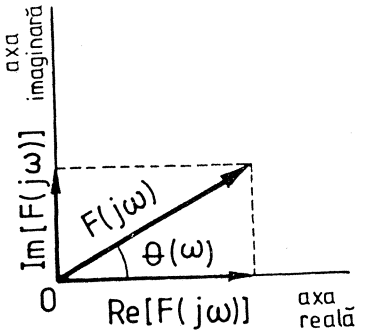


Fig. 1.28

1.8.5. Integrala de convoluție și teorema lui Borel, folosind transformata Fourier

Dacă funcțiile $f_1(t)$ și $f_2(t)$ posedă transformatele Fourier $F_1(j\omega)$, respectiv $F_2(j\omega)$, în mod analog cazului precedent, integrala de convoluție se definește:

— în domeniul timpului (t), în conformitate cu relația (1.34),

— în domeniul complex al pulsației (ω)

$$X(j\omega) = F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega), \tag{1.41}$$

în care

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} x(t)\, dt,$$

$$F_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f_1(t)\, dt,$$

$$F_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} f_2(t)\, dt.$$

În acest caz, teorema lui Borel va avea următoarea formulare: *transformata inversă a produsului dintre două transformate Fourier este egală cu integrala de convoluție a inverselor transformatelor lor, adică:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\omega) F_2(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) =$$

$$= f_1(t) * f_2(t) = x(t). \tag{1.42}$$

În acest caz, $x(t)$ există începînd de la $t = -\infty$.

1.8.6. Cîteva observații privind transformatele Laplace și Fourier

a) Dacă funcția $f(t)$ este nulă în intervalul de timp negativ și partea reală a variabilei complexe este de asemenea nulă, adică

$$f(t) = 0 \quad \text{pentru} \quad t < 0, \quad \text{iar} \quad \sigma = 0,$$

rezultă

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(j\omega), \qquad (s \to j\omega), \tag{1.43}$$

și deci transformata Laplace se confundă cu transformata Fourier.

b) În problemele de șocuri fizice, transformatele Laplace și transformata Fourier conduc la rezultate identice.

c) Transformata Laplace, conținînd prin definiție factorul de convergență σ, are avantajul că poate fi aplicată în general tuturor funcțiilor care prezintă interes practic în teoria vibrațiilor.

d) Dezavantajele de ordin matematic privind operațiile de transformare directă și mai ales de inversare sînt compensate de existența tabelelor de corespondență (v. tabelul 1.4).

e) Aplicarea transformatei Fourier are dezavantajul că uneori operația de inversare prezintă dificultăți de ordin matematic. Pentru transformata directă și inversă Fourier nu există tabele atît de complete ca pentru transformata Laplace, în plus, transformata Fourier nu este totdeauna convergentă.

f) Avantajul esențial al transformatei Fourier constă în faptul că este mai intuitivă în privința interpretărilor fizice și se corelează perfect cu dezvoltările în serii Fourier (v. relația 1.25).

g) Dată fiind asemănarea formală dintre cele două tipuri de transformate, operația de transformare Fourier a derivatelor, precum și principiul superpoziției transformatelor Fourier, se aplică în mod identic cazului în care se utilizează transformata Laplace.

h) Transformata Fourier se poate obține direct pentru funcțiile simple. În general, pentru funcții oarecare, se folosește integrarea numerică. În cazul particular al unor funcții periodice pare sau impare, transformatele directă și inversă vor avea expresiile

— funcții *impare* (transformata sinus):

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t\, dt, \quad f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(s) \sin \omega t\, d\omega;$$

— funcții *pare* (transformata cosinus):

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t\, dt, \quad f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(s) \cos \omega t\, d\omega.$$

În această situație se folosesc dezvoltările în serii Fourier.

i) La rezolvarea problemelor în care funcțiile $f(t)$ sînt discontinue la $t = 0$, prin aplicarea transformatelor se obțin funcții continue, ceea ce reprezintă un avantaj de calcul substanțial.

1.9. RĂSPUNSUL SISTEMELOR DINAMICE LINIARE ÎN DOMENIUL COMPLEX AL FRECVENȚEI. FUNCȚIE DE TRANSFER-MATRICE DE TRANSFER

Se consideră un sistem dinamic oarecare, supus unei excitații exterioare $f(t)$ definită în intervalul $t \geqslant 0$, căruia îi corespunde răspunsul $x(t)$.

Prin definiție, raportul dintre transformata Laplace a excitației și transformata Laplace a răspunsului se numește *impedanță generalizată a sistemului* și are următoarea expresie:

$$Z(s) = \frac{F(s)}{X(s)}. \tag{1.44}$$

Valoarea inversă a impedanței generalizate poartă denumirea de *admitanță generalizată a sistemului*, adică

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)} = \frac{X(s)}{F(s)}, \tag{1.45}$$

unde

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty e^{-st} x(t)\, dt$$

reprezintă transformatele Laplace corespunzătoare funcției de excitație $f(t)$ și funcției răspunsului $x(t)$.

În general, relația de legătură dintre $X(s)$ și $Y(s)$ se mai numește *imitanță generalizată a sistemului* care, după cum s-a arătat poate deveni impedanță sau admitanță generalizată.

Prin *funcție de transfer* a unui sistem dinamic cu n GLD se definește raportul dintre transformata Laplace a răspunsului pe direcția GLD i, datorat unei excitații aplicate pe direcția GLD k, și transformata Laplace a acestei excitații. Deci

$$H_{ik}(s) = \frac{\mathcal{L}[x_{ik}(t)]}{\mathcal{L}[f_k(t)]} = \frac{X_{ik}(s)}{F_k(s)}. \qquad (1.46, a)$$

Funcția de transfer se mai numește și *funcție a sistemului* sau funcție pondere și coincide cu definiția dată admitanței generalizate (1.45). Grădele de libertate dinamică i și k sînt identice cu coordonatele dinamice ale sistemului.

Se constată că funcția de transfer are calitativ o semnificație identică cu cea dată coeficienților de flexibilitate (cu caracter static), denumiți și admitanțe mecanice (așa cum rezultă din § 1.5.3). În conformitate cu relația (1.46, a), funcția de transfer $H_{ik}(s)$ reprezintă amplitudinea complexă a răspunsului pe direcția coordonatei i, cînd o acțiune complexă egală cu unitatea se aplică pe direcția coordonatei k. Totalitatea funcțiilor de transfer de forma (1.45) definesc matricea de transfer, numită și matrice pondere. O analogie similară există între impedanța complexă generalizată și coeficienții de rigiditate (în sens static) ai sistemului.

În cazul unui sistem cu 1 GLD, expresia (1.45) devine:

$$H(s) = \frac{\mathcal{L}[x(t)]}{\mathcal{L}[f(t)]} = \frac{X(s)}{F(s)}, \qquad (1,46, b)$$

rezultînd expresia răspunsului complex sub forma:

$$X(s) = H(s) \cdot F(s). \qquad (1.47)$$

Deci cunoscînd transformata Laplace a excitației (acțiunii) și funcția de transfer a sistemului dinamic, se poate determina transformata Laplace a răspunsului prin intermediul relației (1.47).

Răspunsul sistemului în domeniul timp (adică răspunsul original) se determină aplicînd teorema de convoluție (1.36)

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s) \cdot F(s)] = h(t) * f(t),$$

sau

$$x(t) = \int_0^t h(\tau) f(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t f(\tau) h(t-\tau)\, d\tau, \qquad (1.48)$$

unde $h(t)$ reprezintă transformata inversă a funcției de transfer, adică funcția de transfer (sau funcția pondere) în domeniul timp:

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]. \qquad (1.49)$$

Relația dintre excitație și răspuns (input-output) se poate exprima în domeniul complex al pulsației utilizînd și transformata Fourier. În mod analog se va obține

$$X(j\omega) = H(j\omega) \cdot F(j\omega), \qquad (1.50)$$

unde

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} x(t)\, dt$ este transformata Fourier a răspunsului sau spectrul Fourier al răspunsului;

$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} f(t)\, dt$ — transformata Fourier a excitației sau spectrul Fourier al excitației;

$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} h(t)\, dt$ — funcția de transfer exprimată în domeniul complex al frecvenței (pulsației).

Ca în cazul precedent, *răspunsul sistemului* în domeniul timpului se obține prin intermediul teoremei de convoluție (1.42):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega) F(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \qquad (1.51)$$

și deci în final relația (1.48), în care funcțiile din interiorul integralei au semnificația de transformate inverse Fourier.

După cum se va vedea în aplicațiile din capitolul 2, funcția de transfer este o caracteristică proprie a sistemului oscilant și poate fi determinată prin calcul. De aceea, aplicarea relației fundamentale (1.48), pentru determinarea răspunsului sistemului la o excitație dată $f(t)$, necesită operații matematice destul de accesibile.

În figura 1.29 sînt prezentate *diagramele bloc* care guvernează relația *excitație-răspuns* în forma analizată anterior.

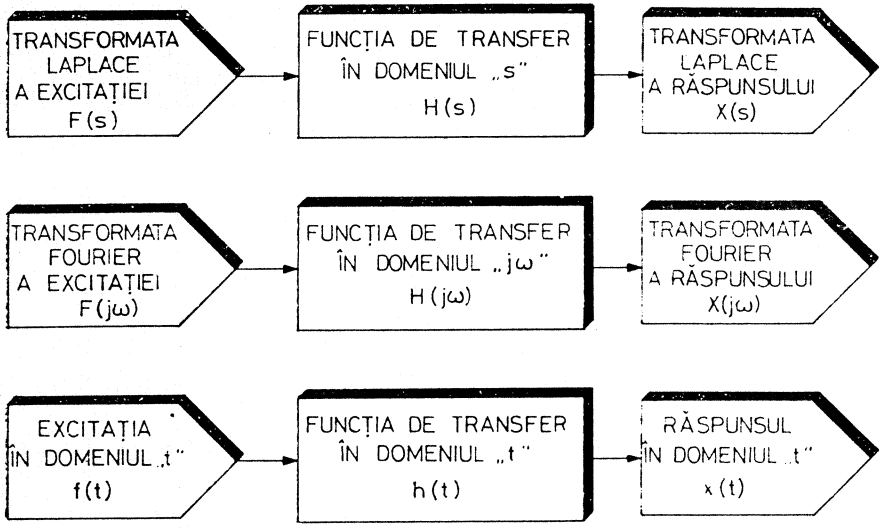


Fig. 1.29

1.10. RĂSPUNSUL IMPULSULUI. IMPULS UNITAR DIRAC. RĂSPUNSUL UNUI SISTEM LA O EXCITAȚIE DE TIP IMPULS UNITATE

Impulsul unitar de tip Dirac (fig. 1.30), numit și funcția delta, se definește analitic astfel

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad \text{pentru} \quad t \neq t_0 \quad (t_0 > 0),$$

iar

$$\int_0^\infty \delta(t - t_0)\, dt = 1, \tag{1.52}$$

având proprietatea

$$\int_0^\infty \delta(t - t_0)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(t), \tag{1.53}$$

unde $\varphi(t)$ este o funcție oarecare de timp.

Se consideră impulsul unitar Dirac ca excitație exterioară asupra unui sistem oscilant cu 1 GLD, iar pentru determinarea răspunsului se aplică relația (1.47), adică

$$X(s) = H(s) \cdot F(s),$$

unde

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t - t_0)] = \int_0^\infty e^{-st}\, \delta(t - t_0)\, dt.$$

Conform proprietății (1.53), rezultă

$$F(s) = e^{-st}\Big|_0^\infty = 1, \tag{1.54}$$

precum și următoarea egalitate, valabilă numai pentru excitația considerată:

$$X^*(s) = H(s). \tag{1.55}$$

Relația (1.55) permite să se tragă următoarea concluzie: *transformata Laplace a răspunsului impulsului funcției delta (impuls unitar Dirac) este egală cu transformata Laplace a funcției de transfer*. Acest rezultat este de importanță deosebită în analiza răspunsului sistemelor dinamice la acțiunea șocurilor și perturbațiilor tranzitorii. El permite definirea funcției de transfer în domeniul timpului $h(t)$ ca fiind răspunsul sistemului $x^*(t)$ la un impuls unitar, numit și *răspunsul impulsului*.

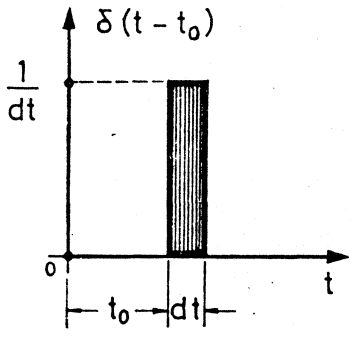


Fig. 1.30

În baza relațiilor (1.49) și (1.55) se poate scrie deci

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \mathcal{L}^{-1}[X^*(s)] = x^*(t), \tag{1.56}$$

unde

$$H(s) = X^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t)\, dt. \tag{1.57}$$

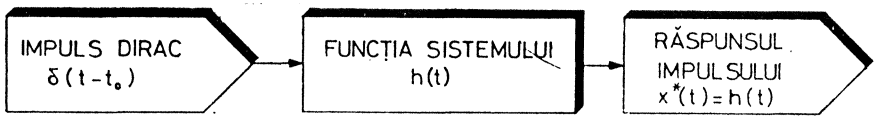


Fig. 1.31

În mod analog se exprimă funcția $h(t)$ prin intermediul transformatei Fourier

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = x^*(t), \tag{1.58}$$

unde

$$H(j\omega) = X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} h(t)\, dt. \tag{1.59}$$

Aceleași rezultate se obțin dacă se aplică direct integrala de convoluție. Deoarece funcția $h(t)$ este nulă pentru $t < 0$, limita inferioară a integralelor din relațiile (1.58) și (1.59) devine egală cu zero.

Diagrama bloc corespunzătoare răspunsului la un impuls unitar este dată în figura 1.31.

1.11. RĂSPUNSUL UNUI SISTEM CU 1 GLD LA O EXCITAȚIE $f(t)$. UTILIZAREA INTEGRALEI DE CONVOLUȚIE. INTEGRALA DUHAMEL DE SUPERPOZIȚIE

Rezultatele obținute în § 1.10 permit determinarea răspunsului unui sistem dinamic liniar cu 1 GLD la o excitație oarecare, determinată în intervalul $t \geqslant 0$ (fig. 1.32).

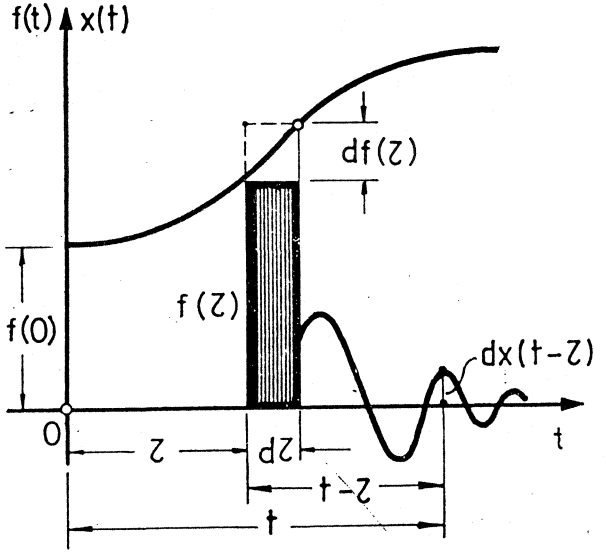


Fig. 1.32

Considerînd impulsul elementar $f(\tau)\mathrm{d}\tau$ aplicat sistemului la timpul $t = \tau$, bazați pe relațiile (1.56) sau (1.58) răspunsul elementar va avea expresia

$$\mathrm{d}x(t-\tau) = [h(t-\tau)] \cdot [f(\tau)\,\mathrm{d}\tau].$$

Presupunînd excitația $f(t)$ ca rezultată din superpoziția unor impulsuri elementare de forma $f(\tau)\mathrm{d}\tau$ (fig. 1.32), răspunsul sistemului se determină fie folosind principiul superpoziției, fie integrala de convoluție și teorema lui Borel.

Astfel, pentru răspunsul sistemului se obțin următoarele relații:

— utilizînd transformata Laplace

$$x(t) = h(t) * f(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathcal{L}^{-1}[H(s) \cdot F(s)]; \qquad (1.60)$$

— utilizînd transformata Fourier

$$x(t) = h(t) * f(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega)\, F(j\omega)\, \mathrm{e}^{-j\omega t}\,\mathrm{d}\omega. \qquad (1.61)$$

Explicitarea funcției $h(t)$ și a integralelor de convoluție pentru sistemele oscilante caracterizate prin masă m, rigiditate k și amortizare c (v. fig. 1.1), pune în evidență cunoscuta integrală a lui *Duhamel*. În aplicațiile din capitolul 2, precum și în partea a doua a lucrării consacrată acțiunii mișcării seismice, va fi relevată importanța pe care o are integrala Duhamel în teoria vibrațiilor și șocurilor.

Schema bloc a răspunsului sistemului la o excitație $f(t)$ a fost prezentată în figura 1.29.

1.12. RĂSPUNSUL UNUI SISTEM CU 1 GLD LA O EXCITAȚIE ARMONICĂ

Se admite că asupra unui sistem dinamic (1 GLD) cu comportare liniară se aplică o excitație armonică de forma:

$$f(t) = x_0\, \mathrm{e}^{j\theta t}, \qquad (1.62)$$

definită pe un interval de timp infinit, în sensul axei pozitive ($t \geqslant 0$).

Aplicînd integrala de convoluție (1.48), rezultă expresia răspunsului instantaneu sub forma:

$$x(t) = \int_0^\infty x_0\, \mathrm{e}^{j\theta(t-\tau)}\, h(\tau)\,\mathrm{d}\tau = x_0\, \mathrm{e}^{j\theta t}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-j\theta\tau} h(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \qquad (1.63)$$

Avînd în vedere relația (1.59), expresia (1.63) devine:

$$x(t) = x_0\, \mathrm{e}^{j\theta t} H(j\theta) = f(t)\, H(j\theta), \qquad (1.64)$$

unde $\theta = 2\pi f$ reprezintă pulsația excitației armonice.

Din relația (1.64) se constată că la o excitație de tip armonic, răspunsul sistemului menține, din punctul de vedere al variației matematice, aceleași caracteristici armonice. În acest caz, funcția de transfer devine o funcție a sistemului deoarece, așa cum se va demonstra în capitolul 2, depinde de caracteristicile sistemului.

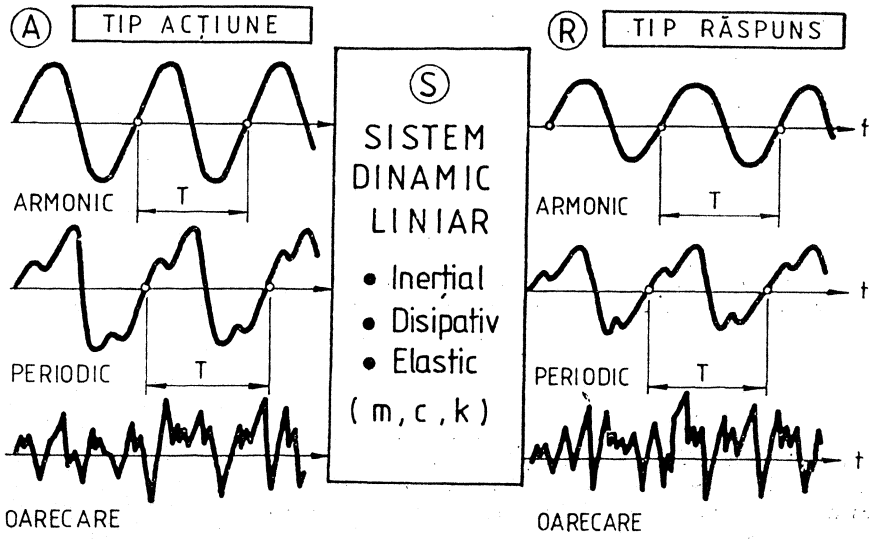


Fig. 1.33

Rezultă deci, că la o excitație armonică de pulsație θ, răspunsul unui sistem liniar va fi o funcție tot armonică de aceeași intensitate. Prin extensie se poate trage concluzia că variația răspunsului, în cazul sistemelor cu comportare liniară, conservă caracteristicile funcției excitației (fig. 1.33). Astfel, dacă funcțiile de intrare în sistem sînt periodice (care se pot dezvolta într-o serie convergentă Fourier) sau dacă sînt oarecare de scurtă durată (periodicizabile pe durata aplicării acțiunii), această constatare își menține valabilitatea. În general conținutul de frecvențe al semnalului de ieșire este identic cu conținutul de frecvențe al semnalului de intrare, sistemul dinamic avînd rolul unui filtru care amplifică sau atenuează anumite componente, în funcție de frecvențele componentelor și frecvența proprie a sistemului cu 1 GLD (sau frecvențele proprii în cazul sistemelor cu n GLD).

1.13. CELE TREI ASPECTE FUNDAMENTALE ALE DINAMICII STRUCTURILOR

Din exprimarea corelației dintre excitație și răspuns, prin intermediul impedanței sau admitanței sistemului, precum și din caracterizarea funcției de transfer cu ajutorul răspunsului impulsului $h(t)$, rezultă următoarele trei aspecte fundamentale de studiu în dinamica structurilor.

1.13.1. Analiza

Prin *analiza* unui sistem dinamic liniar se înțelege determinarea caracteristicilor de *răspuns* în cazul cînd se cunosc *excitația* și *funcția sistemului*, fie în domeniul real al timpului (t), fie în domeniul imaginii sau frecvenței (s, $j\omega$).

În această situație se consideră cunoscute:

— *excitația:*

$$f(t),\ F(s) \quad \text{sau} \quad F(j\omega),$$

— *funcția sistemului:*

$$h(t),\ H(s) \quad \text{sau} \quad H(j\omega),$$

și rezultă:

— *răspunsul:*

$$x(t),\ X(s) \quad \text{sau} \quad X(j\omega).$$

Acest mod de a aborda problema este uzual în calculul și comportarea structurilor la acțiuni dinamice reprezentînd un *criteriu de verificare*.

1.13.2. Sinteza

Studiul de *sinteză* al unui sistem dinamic liniar reprezintă modul cel mai complex de a trata o problemă de dinamică. În acest caz se pune problema determinării *funcției sistemului*, adică a caracteristicilor fizice ale acestuia, bazați pe cunoașterea prealabilă a *excitației* și a *răspunsului*.

Se cunosc deci:

— *excitația:*

$$f(t),\ F(s) \quad \text{sau} \quad F(j\omega),$$

— *răspunsul:*

$$x(t),\ X(s) \quad \text{sau} \quad X(j\omega),$$

și se obține

— *funcția sistemului:*

$$h(t),\ H(s) \quad \text{sau} \quad H(j\omega).$$

Operația de sinteză stă la baza *proiectării optime* a unei structuri cînd se ia ca bază mărimea unui răspuns așteptat, stabilit în baza condițiilor de rezistență și stabilitate. *Sinteza* reprezintă conceptul modern de studiu, mai ales în cazul excitațiilor aleatoare, fiind combinată cu *analiza* probabilistică a rezultatelor ce se obțin. Acest aspect al dinamicii liniare permite *identificarea caracteristicilor fizico-mecanice și dinamice ale structurilor.*

1.13.3. Identificarea excitației. Instrumente

Dacă se cunosc caracteristicile fizice și dinamice de definire ale sistemului și răspunsul acestuia, sistemul dinamic devine un *instrument* care permite determinarea sursei de excitație. În acest caz se presupun cunoscute

— *funcția sistemului:*

$$h(t),\ H(s) \quad \text{sau} \quad H(j\omega),$$

— *răspunsul:*

$$x(t),\ X(s) \quad \text{sau} \quad X(j\omega),$$

urmînd a se determina:

— *excitația*

$$f(t),\ F(s) \quad \text{sau} \quad F(j\omega).$$

Acest aspect al problemei stă la baza construcției, calibrării și utilizării aparaturii de măsurat mișcări produse de diverse surse de excitație cum ar fi: mașini neechilibrate, acțiunea seismică, acțiunea vîntului, explozii etc. Toate instrumentele au parametrii fizici bine precizați, caracterizînd sisteme oscilante ale căror funcții de transfer se cunosc prin concepție și destinație. De obicei, răspunsul sistemului se înregistrează direct sau indirect prin intermediul integratorilor cuplați la înregistrare grafică sau numerică (instrumentală). Prin prelucrarea datelor experimentale obținute se poate identifica excitația reală la care este supus instrumentul. În acest sens, un exemplu concret îl constituie instrumentele seismice (seismometrele și accelerometrele), care dau posibilitatea înregistrării, în diverse puncte ale suprafeței pămîntului și pe anumite direcții, a componentelor mișcării produse de cutremure.

În tabelul 1.5 sînt sintetizate cele trei aspecte fundamentale ale dinamicii structurilor prezentate și interpretate în acest paragraf.

TABELUL 1.5

ASPECTUL PROBLEMEI	SE CUNOSC				SE DETERMINĂ			
	PARAMETRII	ÎN DOMENIUL			PARAMETRUL	ÎN DOMENIUL		
		t	s	$j\omega$		t	s	$j\omega$
Analiza	Excitația	$f(t)$	$F(s)$	$F(j\omega)$	Răspunsul	$x(t)$	$X(s)$	$X(j\omega)$
	Funcția sistemului	$h(t)$	$H(s)$	$H(j\omega)$				
Sinteza (Identificarea sistemului)	Excitația	$f(t)$	$F(s)$	$F(j\omega)$	Funcția sistemului	$h(t)$	$H(s)$	$H(j\omega)$
	Răspunsul	$x(t)$	$X(s)$	$X(j\omega)$				
Instrumente (Identificarea excitației)	Funcția sistemului	$h(t)$	$H(s)$	$H(j\omega)$	Excitația	$f(t)$	$F(s)$	$F(j\omega)$
	Răspunsul	$x(t)$	$X(s)$	$X(j\omega)$				

1.14. METODE ANALITICE DE OPERARE ÎN DINAMICA STRUCTURILOR

Ecuațiile generale de condiție, care guvernează dinamica structurilor, se bazează pe principiile mecanicii solidelor rigide și mecanicii corpurilor deformabile. Întrucît în dinamica structurilor necunoscutele nu depind de metodele de operare, așa cum rezultă în statica structurilor, alegerea căilor ce urmează a fi abordate reprezintă, în general, o problemă de opțiune. Decizia finală depinde totuși de simplificările ce intervin în formularea analitică a ecuațiilor de mișcare, precum și de ușurința rezolvării acestora, în directă dependență cu particularitățile structurilor examinate. Acest fapt depinde în primul rînd de pregătirea profesională, precum și de abilitatea tehnică a analistului.

Mecanica analitică furnizează multiple direcții de operare prin folosirea următoarelor posibilități: *principiul lui d'Alembert, ecuațiile lui Lagrange* de speța a doua, *principiul lui Hamilton* și *principiul lucrului mecanic virtual* (sau deplasărilor virtuale).

Prin extensie, dacă se utilizează metodele mecanicii corpurilor (mediilor) deformabile, se pot formula condițiile de echilibru dinamic, exprimate pe

poziția deformată instantanee, asociate principiului lui d'Alembert (condiții cu caracter cinetostatic). Acest mod de formulare analitică a ecuațiilor de condiție este mai accesibil inginerilor structuriști, deoarece există o similitudine calitativă cu metodele de operare din statica structurilor. De altfel, indiferent de metoda adoptată, formulările finale ce se obțin vor fi identice, tocmai datorită caracterului unitar al dinamicii structurilor. Aplicînd acest ultim procedeu de operare, ecuațiile de mișcare se obțin prin exprimarea următoarelor condiții:

— *condiția de echilibru dinamic instantaneu*, exprimată în raport cu poziția de echilibru static al sistemului;

— *condiția de compatibilitate a deplasărilor dinamice instantanee* (deplasări generalizate compatibile cu legăturile).

Dacă mișcarea unui sistem dinamic discret este descrisă numai prin translații, forțele care intervin în ecuațiile generale de condiție, în orice secvență a mișcării sînt de două categorii și anume:

— *forțele active* (care întrețin mișcarea) constituite din forțele perturbatoare exterioare $F(t)$ și forțele de inerție $F_i(t)$ generate de masele în mișcare;

— *forțele pasive* (care se opun mișcării — forțe rezistente) generate de caracteristicile elastice $F_e(t)$ și disipative (de amortizare) $F_a(t)$.

În afara acțiunilor exterioare, toate celelalte forțe depind direct de caracteristicile de definire ale sistemelor dinamice. De aceea aceste forțe se pot considera ca *forțe ale sistemului dinamic*.

În timpul mișcării unui sistem discret cu nGLD, pe direcția coordonatelor dinamice $j = 1, 2, \ldots k, \ldots, n$ se produc deplasări, viteze și accelerații instantanee, totalitatea acestora definind vectorii răspunsului exprimat în mărimi cinematice:

$$\{x(t)\}_{n,1} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots\cdots \\ x_j(t) \\ x_k(t) \\ \cdots\cdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix}_{n,1}, \quad \{\dot{x}(t)\}_{n,1} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_j(t) \\ \dot{x}_k(t) \\ \cdots\cdots \\ \dot{x}_n(t) \end{Bmatrix}_{n,1}, \quad \{\ddot{x}(t)\}_{n,1} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \cdots\cdots \\ \ddot{x}_j(t) \\ \ddot{x}_k(t) \\ \cdots\cdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix}_{n,1}.$$

Analiza referindu-se la *sisteme discrete*, în *mișcare de translație*, cu *comportare liniară* și complet definite din punctul de vedere al caracteristicilor de modelare, forțele specifice fiecărei secvențe a mișcării vor avea expresiile:

$F_h(t)$ reprezintă forțele exterioare care acționează pe direcția coordonatelor specifice $h = 1, 2, \ldots m$, coordonate diferite, în general, de cele dinamice dar care pot coincide parțial sau total;

$F_{j,i}(t) = -\sum_{k=1}^{n} m_{jk}\ddot{x}_k(t)$ — forțele de inerție;

$F_{j,a}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\dot{x}(t)$ — forțele de amortizare vîscoasă instantanee;

$F_{j,e}(t) = \sum_{k=1}^{n} k_{jk}x(t)$ — forțele elastice instantanee ($j = 1, 2, \ldots, k, \ldots n$).

Totalitatea forțelor care intervin în condițiile de mișcare definesc următorii vectori:

$\{F(t)\}_{m,1}$, acțiunile exterioare în coordonatele m,

$$\{F_i(t)\}_{n,1} = -[M]_{n,n}\{\ddot{x}(t)\}_{n,1}, \tag{1.65}$$

$$\{F_a(t)\}_{n,1} = [C]_{n,n}\{\dot{x}(t)\}_{n,1}, \tag{1.66}$$

$$\{F_e(t)\}_{n,1} = [K]_{n,n}\{x(t)\}_{n,1} = [R]_{n,n}\{x(t)\}_{n,1} \tag{1.67}$$

Matricele care intervin în aceste relații, de inerție $[M]$, de amortizare $[C]$ și de rigiditate $[K] = [R]$ au fost definite în § 1.5.1, 1.5.2 și 1.5.3.

Deplasările dinamice instantanee, avînd caracter elastic, se pot exprima și prin intermediul matricei de flexibilitate astfel:

$$\{x(t)\}_{n,1} = [D]_{n,n}\{F_e(t)\}_{n,1}. \tag{1.68}$$

Dacă se compară relațiile (1.67) și (1.68) rezultă

$$[D]_{n,n}[R]_{n,n} = [R]_{n,n}[D]_{n,n} = [I]_{n,n} \tag{1.69}$$

unde s-a notat cu $[I]_{n,n}$ *matricea unitară* sau *identică* de ordinul (n, n) care este o matrice diagonală cu toate elementele egale cu unitatea.

Relația (1.69) este fundamentală în analiza dinamică a structurilor întrucît arată că cele două matrice sînt inverse. Într-adevăr rezultă proprietățile:

$$[D]_{n,n} = [R]^{-1}_{n,n}, \quad [R]_{n,n} = [D]^{-1}_{n,n}, \tag{1.70}$$

care sînt posibile numai datorită faptului că amîndouă matricele sînt exprimate în raport cu un sistem unic de coordonate, așa cum sînt coordonatele dinamice. Un corespondent direct în statica structurilor nu poate fi obținut datorită faptului că sistemul de coordonate statice depinde de metoda specifică de rezolvare, așa cum s-a mai arătat în § 1.5.1. În situația cînd una dintre matricele $[D]$ sau $[R]$ este mai dificil de generat direct, relațiile (1.70) dau posibilitatea să se obțină una din matrice în funcție de cealaltă.

Revenind la ecuațiile de mișcare, acestea pot fi exprimate în raport cu forțele sau cu deplasările instantanee, așa cum se procedează și în mecanica corpului deformabil.

Dacă se scriu ecuațiile de mișcare prin intermediul forțelor, se exprimă de fapt *condiția de echilibru dinamic instantaneu* pe direcția GLD, iar forțele elastice vor fi guvernate de matricea de rigiditate. De aceea această metodă de operare se numește *metoda matricei de rigiditate dinamică* (MMRD) sau *metoda deplasărilor dinamice* (MDD) — instantanee. Aplicînd această metodă se obține:

$$-F_{j,i}(t) + F_{j,a}(t) + F_{j,e}(t) = F_{j,h}(t) \tag{1.71}$$

$$(j = 1, 2, \ldots n \quad \text{și} \quad h = 1, 2, \ldots m).$$

Dacă se substituie relațiile (1.65), (1.66) și (1.67), sistemul de ecuații (1.71) va avea forma matriceală:

$$\text{(Forțe pasive)} = \text{(Forțe active)},$$

$$\{F_a(t)\}_{n,1} + \{F_e(t)\}_{n,1} = \{F_i(t)\}_{n,1} + [\bar{D}]_{n,m}\{F(t)\}_{m,1},$$

sau

$$-\{F_i(t)\}_{n,1} + \{F_a(t)\}_{n,1} + \{F_e(t)\}_{n,1} = [\bar{D}]_{n,m}\{F(t)\}_{m,1},$$

și deci

$$[M]_{n,n}\{\ddot{x}(t)\}_{n,1}+[C]_{n,n}\{\dot{x}(t)\}_{n,1}+[R]_{n,n}\{x(t)\} = [\bar{R}]_{n,m}\{F(t)\}_{m,1} = \{0\}, \quad (1.72)$$

în care $[\bar{t}]_{n,m}$ are semnificația unei *„matrice de transfer"*, cu coeficienți adimensionali, care transferă efectul acțiunilor din coordonatele acțiunilor m, în coordonatele dinamice n. Semnul forțelor de inerție a rezultat în conformitate cu semnificația dată în mecanica analitică.

Dacă se exprimă *condiția de compatibilitate a deplasărilor dinamice instantanee* (în raport cu poziția de echilibru static), se obțin ecuațiile de mișcare în care forțele elastice vor fi exprimate prin intermediul matricei de flexibilitate. În consecință, această metodă de operare se va numi *metoda matricei de flexibilitate dinamică* (MMFD) sau *metoda forțelor dinamice* (MFD) — instantanee. Rezultă deci:

$$\{x(t)\}_{n,1} = [D]_{n,n}\{F_i(t)\}_{n,1} - [D]_{n,n}\{F_a(t)\}_{n,1} + [\bar{D}]_{n,m}\{F(t)\}_{m,1}, \quad (1.73)$$

unde $[\bar{D}]_{n,m}$ este de data aceasta o matrice de flexibilitate exprimată în coordonate mixte, corespunzătoare GLD n și acțiunilor m, avînd însă tot semnificația unei *matrice de transfer*.

Ținînd seama de proprietățile exprimate prin relațiile (1.69) și (1.70), ecuația de mișcare (1.73) se poate obține direct din ecuația (1.72) în urma premultiplicării acesteia cu matricea $[D]_{n,n}$. În urma acestei operații rezultă

$$[\bar{D}]_{n,m} = [D]_{n,n}[\bar{R}]_{n,m}, \quad (1.74)$$

ceea ce arată că cele două metode de operare sînt „inverse".

Se menționează faptul că este mai avantajos să se exprime coeficienții matricelor $[R]_{n,n}$ și $[\bar{R}]_{n,m}$ ca reacțiuni, ceea ce presupune admiterea unui sistem de bază dinamic (SBD), conform § 1.5.3.

Întrucît s-a considerat că sistemele dinamice analizate au o *comportare liniară*, pentru obținerea ecuațiilor de mișcare s-au aplicat simultan *principiul proporționalității* și *principiul superpoziției*.

În general, în dinamica structurilor rezolvările se fac în funcție de variația deplasărilor pe direcția GLD, care pot furniza toate celelalte mărimi derivate, adică variația vitezelor, accelerațiilor, forțelor de inerție suplimentare, energiilor, eforturilor secționale, tensiunilor și deformațiilor. În acest sens, cunoscînd variația deplasărilor instantanee, se poate evalua energia de deformație înmagazinată prin lucrul mecanic dat de forțele elastice în timpul unui ciclu de deformare:

$$E_d(t) = L_e(t) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} F_{j,e}(t)\, x_j(t)$$

sau în formă matriceală:

$$E_d(t) = \frac{1}{2}\{F_e(t)\}^T\{x(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t)\}^T\{F_e(t)\}, \quad (1.75)$$

unde semnul T arată operația de transpunere a matricei coloană, devenind astfel matrice linie.

Dacă se au în vedere relațiile (1.67) și (1.68), expresia (1.75) devine

$$E_d(t) = \frac{1}{2}\{F_e(t)\}^T[D]\{F_e(t)\} = \frac{1}{2}\{x(t)\}^T[R]\{x(t)\}, \quad (1.76)$$

întrucît produsul scalar (1.75), prin care se exprimă energia de deformație, este comutativ.

În legătură cu proprietatea globală descrisă de relația (1.69) se va face o observație importantă, pornind de la următoarea exprimare (v. § 1.5.3):

$$[D][R] = [\{\delta\}_1\{\delta\}_2\ldots\{\delta\}_j\{\delta\}_k\ldots\{\delta\}_n][\{k\}_1\{k\}_2\ldots\{k\}_j\{k\}_k\ldots\{k\}_n] = [I] \quad (1.77)$$

în care

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \text{ZERO} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ \text{ZERO} & & & & 1 \end{bmatrix}_{n,n}.$$

Prin identificare, din relația (1.77) rezultă *proprietatea de ortogonalitate a vectorilor elastici*, exprimați prin vectorii coeficienților de flexibilitate și vectorii coeficienților de rigiditate, astfel

$$\{\delta\}_j^T\{k\}_k = \{k\}_k^T\{\delta\}_j = \sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}k_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{cînd } i = k \\ 0 & \text{cînd } i \neq k \end{cases}. \quad (1.78)$$

În finalul acestei succinte prezentări a metodelor de operare în dinamica structurilor (care vor fi dezvoltate pe parcursul lucrării), se subliniază faptul că în toate formulările analitice și rezolvările corespunzătoare sînt necesare

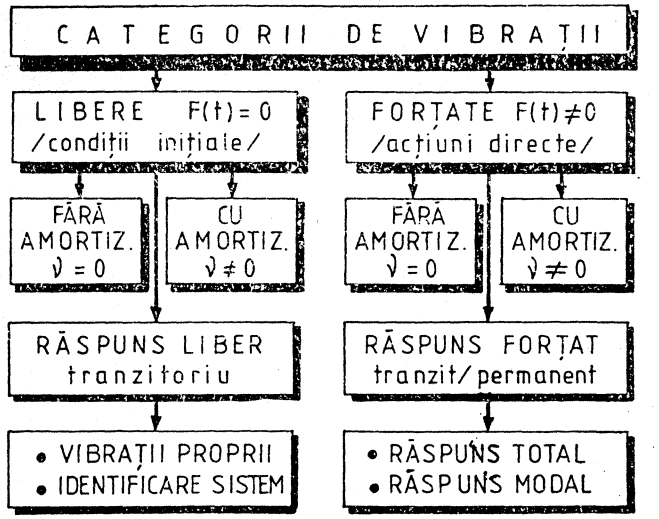


Fig. 1.34

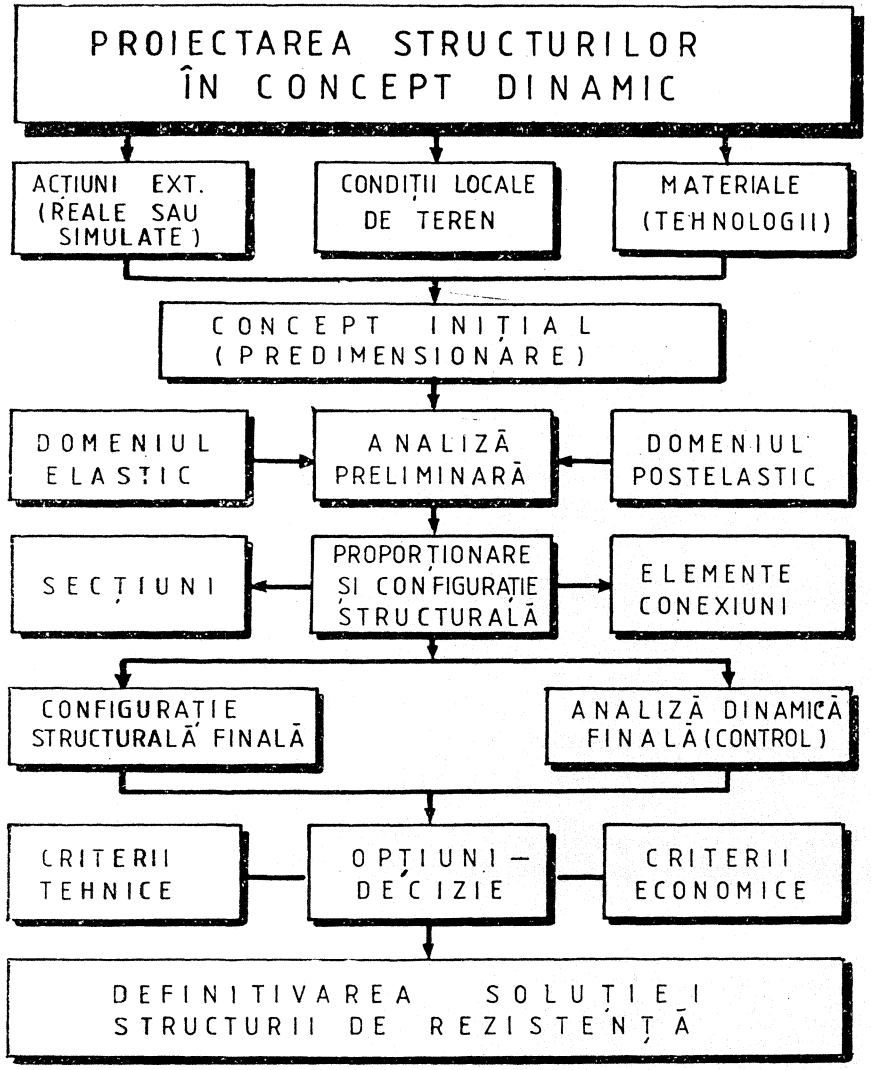


Fig. 1.35

cunoștințe de algebră liniară, algebră matriceală, teoria seriilor și integralelor Fourier, calcul operațional (transformatele Laplace și Fourier), teoria funcțiilor aleatoare, teoria ecuațiilor diferențiale ordinare, cu derivate parțiale sau integrale, metode numerice etc., în afara celor de teoria și calculul structurilor la acțiuni statice. Este evident că dinamica structurilor, cu aplicații vaste în toate sectoarele de activitate din industria construcțiilor, este un domeniu complex și multilateral.

* * *

În cuprinsul capitolelor 2, 3 și 4 se vor analiza categoriile de mișcări vibratorii ale sistemelor dinamice discrete, prezentate în schema din figura 1.34. Se va insista în special asupra identificării caracteristicilor dinamice proprii, precum și asupra evaluării răspunsului dinamic al structurilor produs de *acțiuni cu aplicare directă*, generate în principal de surse cu caracter artificial.

Obiectivul principal în dinamica structurilor constă în determinarea deplasărilor instantanee, pe timpul istoric al aplicării acțiunilor, în funcție de care se pot aprecia toate celelalte caracteristici ale răspunsului. Analiza și sinteza sistemelor dinamice nu reprezintă totdeauna o operație directă care să conducă la elaborarea configurației optime a structurii de rezistență, în condițiile unor acțiuni dinamice particulare. Proiectarea în concept dinamic comportă mai multe cicluri de operații, cu revenire permanentă la cele anterioare, prin corecții succesive aduse tuturor caracteristicilor care guvernează proprietățile elastice și dinamice structurale. În figura 1.35 sînt redate principalele etape cu privire la proiectarea structurilor de rezistență în concept dinamic.

1.15. APLICAȚII

Aplicația 1.15.1. Se consideră sistemul oscilant discret din figura 1.36 care reprezintă modelul dinamic al unei structuri (de beton armat) dominant încovoiată. Dacă se admite ipoteza barelor inextensibile, sistemul va avea 4 grade de libertate dinamică (4GLD), caracterizîndu-se prin inerție de translație (coordonatele x_1 și x_2) și prin inerție de rotație (coordonatele θ_3 și θ_4).

Se vor determina *matricele de flexibilitate dinamică* $[D]$ și *de rigiditate dinamică* $[R]$, care reprezintă caracteristicile elastice ale sistemului, întrucît guvernează proprietățile de deformabilitate ale structurii reale.

Operațiile numerice de calcul sînt specifice analizei statice a structurilor. Calculul coeficienților de flexibilitate se bazează pe definițiile prezentate în § 1.5.3. Pentru calculul coeficienților de rigiditate se va introduce un sistem de bază dinamic (SBD) în care deplasările pe direcția GLD sînt blocate. Din punctul de vedere al analizei numerice, SBD reprezintă un sistem operațional care permite determinarea coeficienților de rigiditate definiți ca reacțiuni în blocajele GLD. Cele două matrice vor rezulta partiționate, în funcție de natura coordonatelor (deplasări liniare sau deplasări unghiulare), în raport cu care se exprimă coeficienții de flexibilitate sau rigiditate. În acest sens, rezultă:

$$[D] = \left[\begin{array}{c|c} [D_{xx}] & [D_{x\theta}] \\ \hline [D_{\theta x}] & [D_{\theta\theta}] \end{array}\right], \qquad [R] = \left[\begin{array}{c|c} [R_{xx}] & [R_{x\theta}] \\ \hline [R_{\theta x}] & [R_{\theta\theta}] \end{array}\right],$$

în care, coeficienții submatricelor se vor exprima dimensional astfel:

$$[D] = \left[\begin{array}{c|c} [\mathrm{LF^{-1}}] & [\mathrm{F^{-1}}] \\ \hline [\mathrm{F^{-1}}] & [\mathrm{L^{-1}F^{-1}}] \end{array}\right], \qquad [R] = \left[\begin{array}{c|c} [\mathrm{L^{-1}F}] & [\mathrm{F}] \\ \hline [\mathrm{F}] & [\mathrm{LF}] \end{array}\right].$$

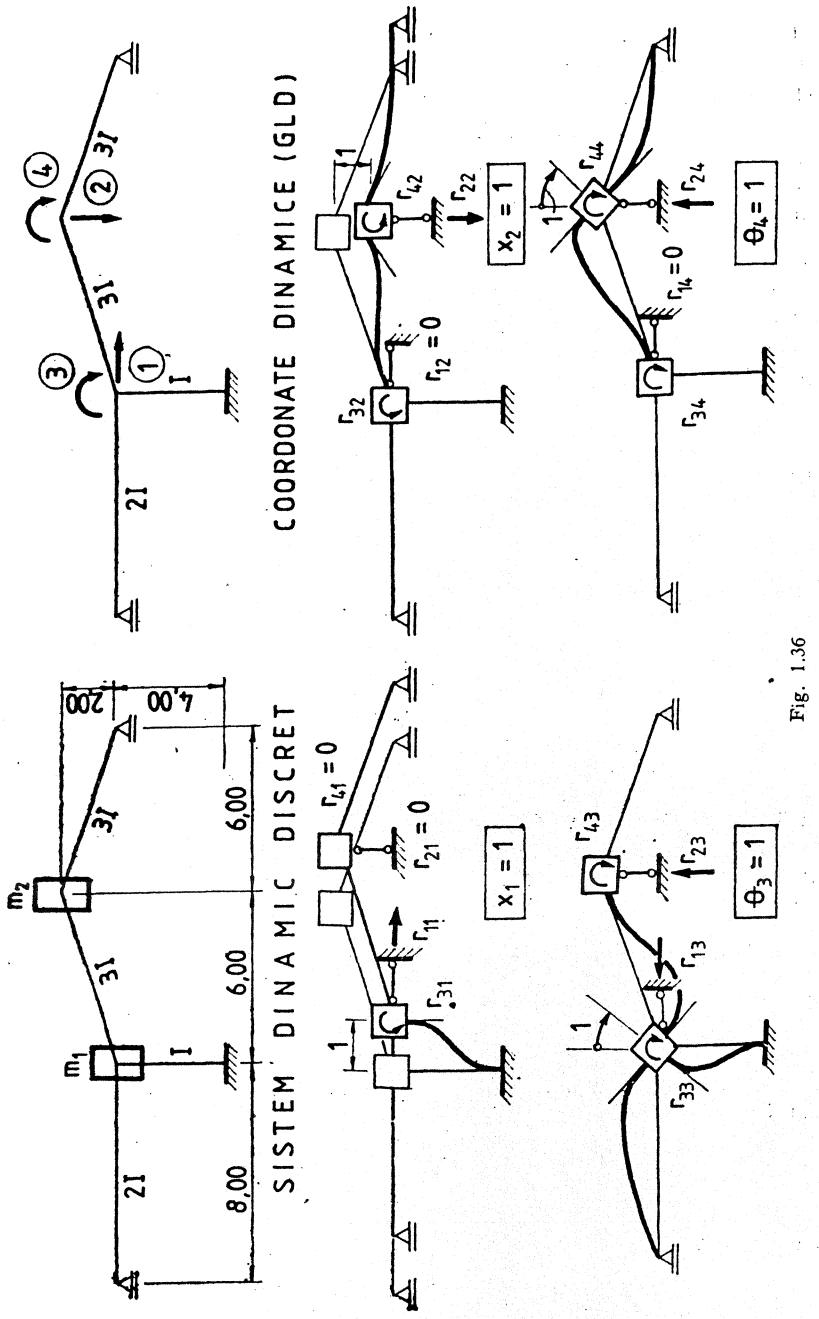


Fig. 1.36

În urma operațiilor numerice au rezultat următoarele forme finale pentru:

— *matricea de flexibilitate dinamică*

$$[D] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 7,6703 & 2,6289 & 1,1685 & -0,1460 \\ 2,6294 & 8,4922 & 1,3147 & 0,2311 \\ 1,1685 & 1,3147 & 0,5844 & -0,0729 \\ -0,1460 & 0,2311 & -0,0729 & 0,3385 \end{bmatrix}$$

— *matricea de rigiditate dinamică*

$$[R] = EI\begin{bmatrix} 0,1875 & 0 & -0,3750 & 0 \\ 0 & 0,1976 & -0,4743 & -0,2372 \\ -0,3750 & -0,4743 & 3,6474 & 0,9487 \\ 0 & -0,2372 & 0,9487 & 3,3204 \end{bmatrix}$$

Ambele matrice au fost obținute prin analize numerice independente. Confirmarea valabilității rezultatelor obținute o reprezintă verificarea condiției

$$[D]\,[R] = [I].$$

Întrucît numărul zecimalelor a fost în mod deliberat restrîns la patru, erorile sînt situate sub 10^{-4}. Valorile numerice conținute în $[D]$ și $[R]$ rezultă exprimate în dimensiuni de lungime (metri) la diverse puteri.

Aplicația 1.15.2. Se va dezvolta în serie Fourier acțiunea exterioară $F(t)$ definită prin funcția periodică reprezentată în tabelul 1.6. În conformitate cu tabelul 1.2, funcția $F(t)$ se dezvoltă într-o serie impară de forma:

$$F(t) = \frac{4F_0}{\pi}\sum_{n=1,3,5\ldots}\frac{1}{n}\sin n\theta t = \sum_{n=1,3,5\ldots} b_n \sin n\theta t = \sum_{n=1,3,5\ldots} b_n \sin\frac{2n\pi}{T}t$$

deoarece $\theta = 2\pi/T$.

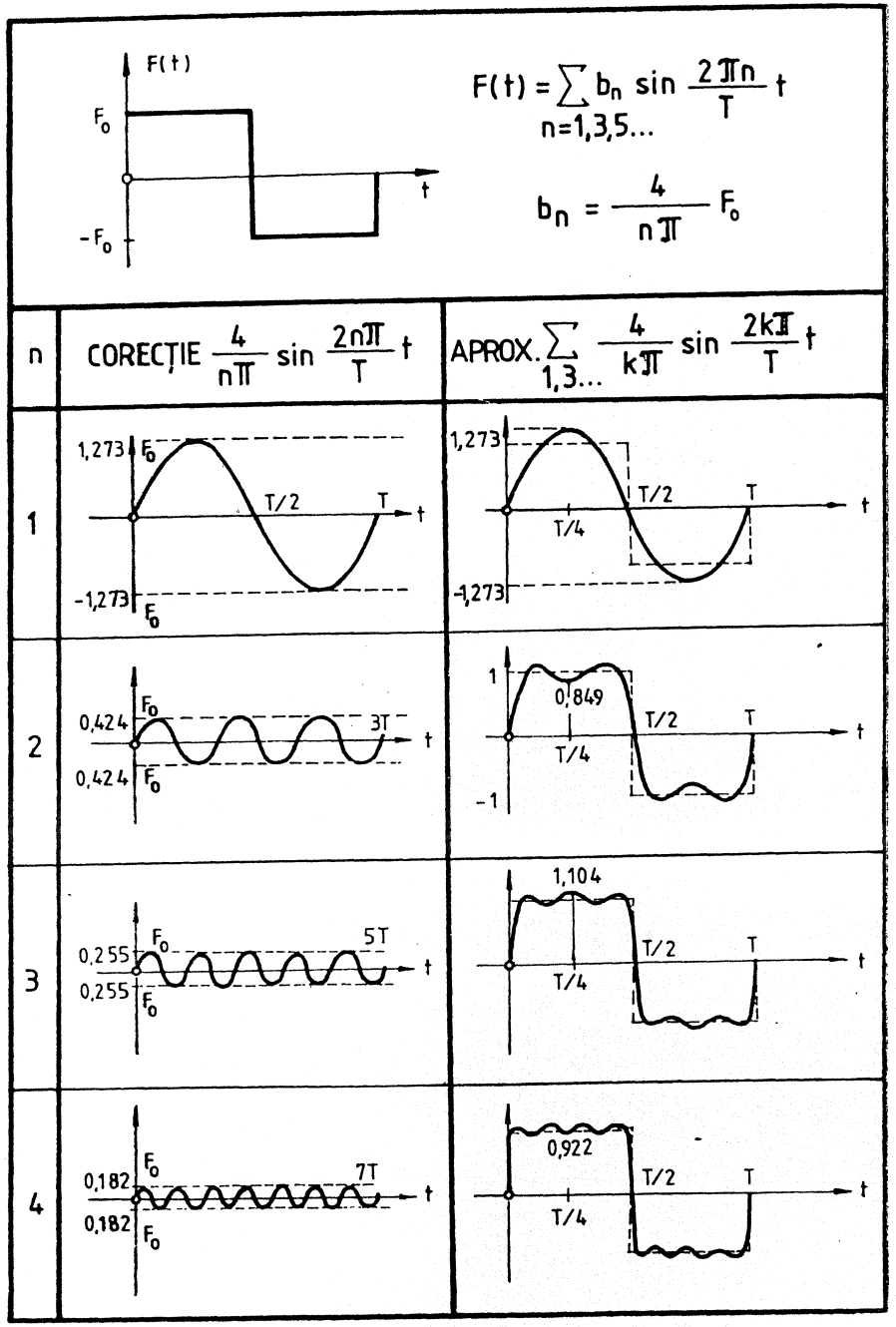
Coeficientul seriei va fi deci

$$b_n = \frac{4}{n\pi}F_0.$$

Dacă se reține în mod succesiv numai primele patru componente ale seriei, se poate constata gradul de evaluare a funcției $F(t)$ în fiecare etapă. Operațiile de corecție și aproximare succesivă sînt prezentate în tabelul 1.6, în care coeficienții seriei au valorile:

$$n = 1, \quad b_1 = 4F_0/\pi = 1,273F_0;$$
$$n = 3, \quad b_3 = 4F_0/3\pi = 0,424F_0;$$
$$n = 5, \quad b_5 = 4F_0/5\pi = 0,255F_0;$$
$$n = 7, \quad b_7 = 4F_0/7\pi = 0,187F_0.$$

TABELUL 1.6



2

DINAMICA SISTEMELOR CU UN SINGUR GRAD DE LIBERTATE

Acest capitol este consacrat în întregime principalelor aspecte teoretice și aplicative pe care le comportă dinamica sistemelor liniare cu un singur grad de libertate dinamică (1 GLD). Deși în aplicațiile practice această categorie de sisteme dinamice reprezintă un caz singular, există totuși structuri cu configurații specifice, care se pot modela direct prin sisteme cu 1 GLD. În unele situații particulare, în care efectele dinamice sînt evaluate în mod aproximativ, structurile reale se transformă, prin operații de echivalență corespunzătoare, în sisteme oscilante cu 1 GLD, iar studiul acestora se poate considera eficient, în anumite limite de valabilitate. Aspectele fenomenologice rezultate din analiza sistemelor cu 1 GLD constituie cazul cel mai elementar de inițiere în dinamica structurilor, întrucît fundamentează conceptele necesare abordării unor situații mai complexe care vor fi tratate în următoarele capitole ale lucrării.

Un sistem oscilant cu 1 GLD, în mișcare de translație, reprezintă o asociere a celor trei caracteristici unice care definesc modelul dinamic: *caracteristica inerțială* (prin masa m), *caracteristica disipativă* (prin coeficientul de amortizare vîscoasă liniară c) și *caracteristica elastică* (prin coeficienții de flexibilitate δ sau de rigiditate k). Modelarea sistemelor cu 1 GLD, precum și descrierea caracteristicilor de definire au fost expuse pe larg în capitolul 1. În figura 2.1 se prezintă modelul matematic al unui asemenea sistem pentru care coordonata dinamică $x(t)$ caracterizează deplasarea de translație pe direcție orizontală.

În cazul structurilor formate din bare drepte dominant încovoiate (barele se consideră inextensibile) se vor neglija influența inerției de rotație (masele

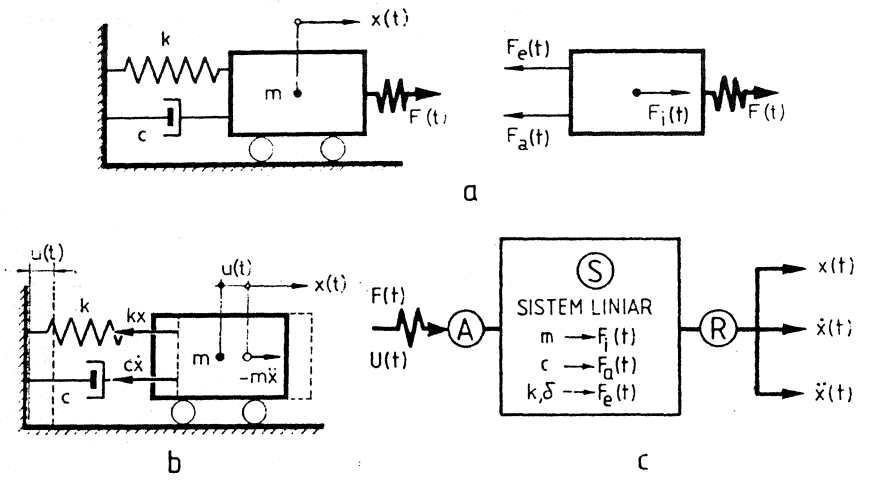


Fig. 2.1

se consideră punctuale) și influența inerției axiale. Masa concentrată (discretă) provine din masa proprie a structurii reale, precum și din cele adiționale (corespunzătoare destinației), conexiunile sistemului dinamic avînd deci numai funcție elastică și disipativă.

Revenind la caracteristicile de definire ale sistemului cu 1 GLD se reamintește că amortizarea vîscoasă liniară (modelul Newton) generează forțe rezistente (de amortizare) proporționale cu viteza, iar elasticitatea liniară a sistemului (modelul Hooke) generează forțe rezistente (elastice) proporționale cu constanta elastică (δ sau k).

Întrucît constantele elastice δ și k se definesc în raport cu coordonata dinamică $x(t)$, rezultă (v. § 1.14) următoarea relație de legătură:

$$\delta k = 1 \quad \text{sau} \quad \delta = k^{-1}, \; k = \delta^{-1}, \tag{2.1}$$

ceea ce pune în evidență că mărimile coeficienților de flexibilitate și de rigiditate sînt inverse, proprietate specifică dinamicii structurilor, datorită particularității coordonatei (unice) față de care se exprimă. Într-adevăr, coeficientul de flexibilitate δ reprezintă deplasarea pe direcția GLD cînd pe aceeași direcție acționează o forță egală cu unitatea, iar coeficientul de rigiditate k reprezintă forța care aplicată pe direcția GLD produce o deplasare egală cu unitatea pe aceeași direcție (v. fig. 2.4).

Cum s-a arătat în § 1.5, forțele „rezistente", deci care se opun mișcării sistemului dinamic (oscilant), care rezultă din asocierea unui element disipativ (liniar vîscos) și a unui element elastic (perfect liniar), definesc modelul Kelvin-Voigt (fig. 2.1).

Acțiunile care se manifestă asupra sistemului cu 1 GLD pot fi de două categorii și anume: *directe* (fig. 2.1, *a*) prin forțe exterioare $F(t)$ și *indirecte* (fig. 2.1, *b*) prin mișcări transmise bazei de rezemare $u(t)$.

Ecuațiile de condiție, care guvernează mișcarea sistemului cu 1 GLD, vor fi obținute prin exprimarea echilibrului dinamic instantaneu, în acord cu principiile fundamentate în § 1.14. Se menționează faptul că echilibrul dinamic se raportează la poziția de echilibru static a sistemelor sub acțiunea încărcărilor gravitaționale $Q = mg$ (fig. 2.2). La exprimarea condiției de echilibru se vor avea în vedere facilitățile ce decurg din modelul liniar de comportare geometrică și fizică a sistemului, și anume aplicarea simultană a principiilor proporționalității și superpoziției.

În cazul *acțiunilor directe* $F(t)$, forțele care participă la echilibrul dinamic instantaneu sînt următoarele (fig. 2.1, *a*):

— forța de inerție $F_i(t) = -m\ddot{x}(t)$,
— forța de amortizare $F_a(t) = c\dot{x}(t)$,
— forța elastică $F_e(t) = kx(t)$,
— forța perturbatoare $F(t)$.

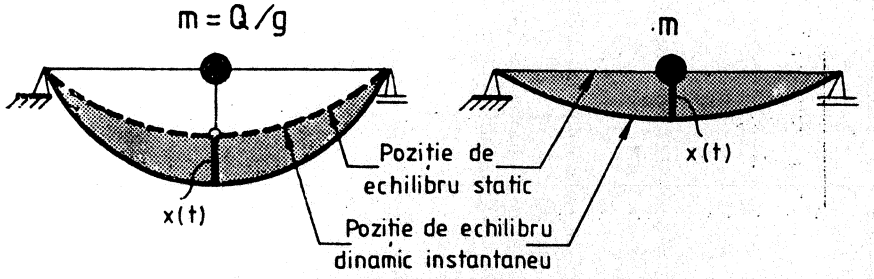


Fig. 2.2

Ecuația de mișcare va avea deci forma (fig. 2.1, *a*):

$$-F_i(t) + F_a(t) + F_e(t) = F(t). \tag{2.2}$$

Prin înlocuirea forțelor care intervin, ecuația (2.2) devine:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t), \tag{2.3}$$

ceea ce reprezintă o ecuație diferențială ordinară, de ordinul II cu coeficienți constanți (m, c, k).

În vederea transformării într-o ecuație integrabilă, toți termenii ecuației (2.3) se împart prin m, rezultînd:

$$\ddot{x}(t) + \frac{c}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{1}{m}F(t).$$

Introducînd notațiile:

$$2\beta = \frac{c}{m}, \tag{2.4}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \tag{2.5}$$

ecuația de mișcare va avea forma finală:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{1}{m}F(t). \tag{2.6}$$

Noile constante pe care le conține ecuația (2.6), exprimate prin caracteristicile de definire ale modelului dinamic cu 1 GLD, au semnificații fizice precise. Astfel, β reprezintă un factor de amortizare, iar ω-pulsația proprie (neinfluențată de prezența amortizării) a sistemului oscilant. Dacă se ia în considerare relația (3.1) pulsația proprie (2.5) se poate exprima astfel:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{m\delta}}. \tag{2.7}$$

În cazul *acțiunilor indirecte* $u(t)$, care se manifestă asupra bazei de rezemare sub forma unei mișcări transmise prin mediul de propagare (fig. 2.1, *b*), ecuația de mișcare rezultă:

$$m[\ddot{u}(t) + \ddot{x}(t)] + c\dot{x}(t) + kx = 0,$$

sau

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx = -m\ddot{u}(t).$$

Dacă se consideră forța de inerție $-m\ddot{u}(t) = F(t)$ ca fiind o forță perturbatoare aparentă (convențională), această ecuație se confundă cu (2.3). Forma integrabilă devine

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -\ddot{u}(t), \tag{2.8}$$

obținîndu-se o ecuație formal identică cu (2.6).

Acțiunile de tip indirect $u(t)$, fiind specifice mișcărilor seismice, vor fi tratate mai pe larg în partea a II-a a acestei lucrări.

Prin integrarea ecuațiilor de mișcare (2.6) sau (2.8) se obține răspunsul sistemului exprimat în deplasări, care reprezintă, din punct de vedere matematic soluția generală a ecuațiilor diferențiale.

Soluția generală (răspunsul total) se exprimă prin suma dintre soluția ecuației omogene și o soluție particulară care satisface întreaga ecuație (inclusiv termenul din partea dreaptă). Soluția ecuației omogene, care reprezintă mișcarea liberă a sistemului deoarece $F(t) = 0$, caracterizează *răspunsul liber* al sistemului și se va nota cu $x_L(t)$. Soluția particulară, care presupune permanența forței perturbatoare asupra sistemului, reprezintă mișcarea forțată deoarece $F(t) \neq 0$, și va caracteriza *răspunsul forțat* al sistemului, fiind notat cu $x_F(t)$. În această situație, *răspunsul total* rezultă:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t). \tag{2.9}$$

Cele două tipuri de acțiuni (directe și indirecte) sînt guvernate de diagrama bloc din figura 2.1, *c*. Se constată că în cazul *acțiunilor directe* răspunsul se exprimă prin *mărimi absolute*, iar în cazul *acțiunilor indirecte* prin *mărimi relative*, ceea ce prezintă mare importanță în analizele aplicative.

În cuprinsul acestui capitol vor fi analizate, în general, vibrațiile libere (răspunsul liber) și vibrațiile forțate (răspunsul forțat) al sistemelor cu 1GLD în diferite situații particulare sau generale. S-a pus un accent deosebit asupra tratării unor aspecte semnificative printre care se menționează: identificarea caracteristicilor de definire ale sistemelor (pe cale teoretică sau experimentală), identificarea surselor generatoare de vibrații, evaluarea răspunsului liber (pe baza condițiilor inițiale) și a răspunsului forțat (tranzitoriu sau permanent) în funcție de specificul acțiunilor etc.

Noțiunile și aspectele teoretice au fost astfel expuse încît să nu prezinte dificultăți în privința asimilării, fără însă să se facă concesii asupra rigurozității și nivelului științific al prezentării și nici abuz în privința aparatului matematic utilizat.

2.1. VIBRAȚII LIBERE. RĂSPUNS LIBER. IDENTIFICAREA SISTEMULUI DINAMIC

Vibrațiile libere ale unui sistem dinamic se produc în urma aplicării unei acțiuni inițiale de scurtă durată (impuls, șoc etc.). Cu alte cuvinte, mișcarea rezultată se manifestă după ce cauza care a scos sistemul din poziția de repaus a încetat (fig. 2.3). Dacă sistemul oscilant este un sistem conservativ, vibrațiile libere ce se produc vor fi neamortizate (caz ipotetic), iar dacă sistemul oscilant nu este conservativ, vibrațiile libere se amortizează după un anumit interval de timp care depinde de mărimea capacității de amortizare. În § 1.6 sînt descrise și definite în amănunt mișcările vibratorii pe care le poate avea un sistem mecanic de tipul celor prezentate în figura 2.1.

2.1.1. Vibrații libere fără amortizare

Forțele care participă la echilibrul dinamic instantaneu în cazul unui sistem oscilant care efectuează o vibrație liberă sînt următoarele:

— forța de inerție $F_i(t) = -m\ddot{x}(t)$;
— forța elastică $F_e(t) = kx(t)$.

Ecuația mișcării se obține prin aplicarea principiului lui d'Alembert sau prin particularizarea ecuațiilor (2.6) sau (2.8) adică:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{2.10}$$

Întrucît oscilațiile unui asemenea sistem au caracter armonic, soluția ecuației (2.10) are forma:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \tag{2.11}$$

obținîndu-se pentru variația vitezelor expresia:

$$\dot{x}(t) = v(t) = \omega C_1 \cos \omega t - \omega C_2 \sin \omega t.$$

Constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale ale mișcării, adică în baza valorilor pe care le au deplasarea și viteza la timpul $t = 0$. Se vor considera următoarele condiții inițiale:

$$t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0, \\ \dot{x}(0) = v_0. \end{cases}$$

Introducînd aceste condiții în ecuațiile de mai sus rezultă pentru C_1 și C_2 valorile:

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega}, \quad C_2 = x_0,$$

încît soluția ecuației (2.10), deci expresia deplasărilor dinamice instantanee ale sistemului, devine:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t.$$

Fiecare termen al expresiei (2.11) reprezintă o mișcare armonică de aceeași pulsație ω și amplitudini v_0/ω, respectiv x_0. Cele două mișcări avînd aceleași direcții pot fi compuse conform § 1.7.4. rezultînd

$$x(t) = A \sin (\omega t + \varphi), \tag{2.12}$$

unde

$A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}$, reprezintă amplitudinea vibrației rezultante;

$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_0 \omega}{v_0}$, caracterizează faza inițială a vibrației $\left(\varphi = arc\ \operatorname{tg} \frac{x_0 \omega}{v_0}\right)$.

Prin derivarea succesivă a expresiei (2.12) se obțin variațiile vitezei și accelerației sistemului

$$\dot{x}(t) = \omega A \cos (\omega t + \varphi), \tag{2.13}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin (\omega t + \varphi) = -\omega^2 x(t). \tag{2.14}$$

Din expresiile (2.12), (2.13) și (2.14) se constată că viteza este defazată cu $\pi/2$ înaintea deplasării, iar accelerația cu $\pi/2$ înaintea vitezei și deci cu π înaintea deplasării. Reprezentarea grafică a acestor expresii este redată în figura 2.3. Din punct de vedere analitic se observă că toate aceste reprezentări definesc vibrația armonică simplă a sistemului. Toate cele trei caracteristici ale răspunsului liber $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ au aceeași pulsație ω și deci aceeași perioadă T.

Se observă în acest caz că vibrația liberă are un caracter permanent și de durată infinită, datorită ipotezei făcute asupra absenței forței rezistente (amortizării).

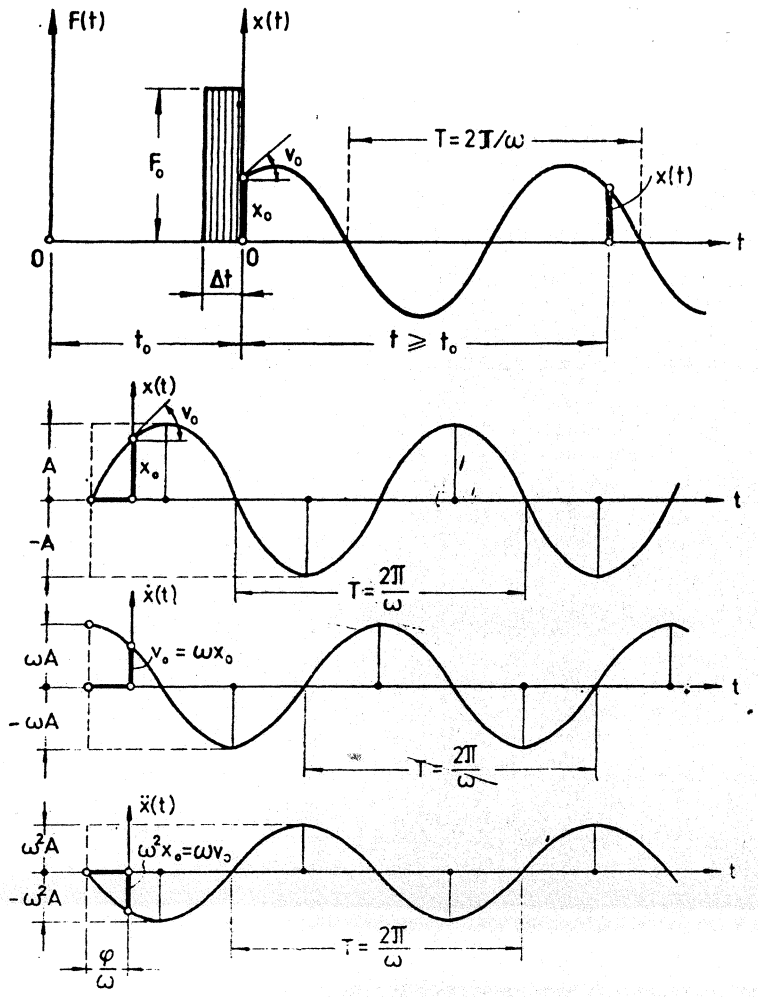


Fig. 2.3

Pulsația proprie de vibrație, care este o caracteristică intrinsecă a sistemului, se determină cu formula (2.7). Dacă masei m a sistemului oscilant îi corespunde încărcarea gravitațională $Q = mg$ (fig. 2.4), expresia pulsației devine

$$\omega = \sqrt{\frac{gk}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{Q\delta}}. \qquad (2.15)$$

În figura 2.4 sînt definiți coeficienții de rigiditate sau de flexibilitate k și δ care intervin în formula (2.15).

Deoarece

$$x_{ST} = \frac{Q}{k} = Q\delta,$$

reprezintă *deplasarea statică* (*săgeata*) *produsă de acțiunea statică a încărcării* Q *aplicată pe direcția gradului de libertate dinamică* (GLD) *al sistemului*, formula (2.15) devine:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{x_{ST}}}.$$

Dacă se ține seama că $g \cong 981$ cm/s², iar x_{ST} se măsoară în centimetri, expresia de calcul a *pulsației proprii* (sau naturală) va fi:

$$\omega = \frac{31{,}32}{\sqrt{x_{ST}}} \text{ [rad/s]}. \qquad (2.16)$$

În consecință, conform tabelului 1.1, vor rezulta:

— *frecvența proprie* (sau naturală)

$$f \cong \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x_{ST}}},$$

sau

$$f = \frac{5}{\sqrt{x_{ST}}}, \text{ [Hz]} \qquad (2.17)$$

— *perioada proprie* (sau naturală)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{x_{ST}}{g}}$$

sau

$$T \cong 0{,}2\sqrt{x_{ST}} \text{ [s]}. \qquad (2.18)$$

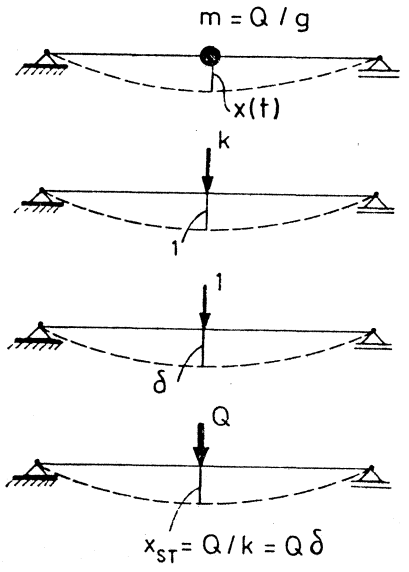


Fig. 2.4

Pulsația proprie a unui sistem oscilant se mai numește și frecvență circulară datorită analogiei cinematice cu viteza circulară.

Determinarea prin calcul (sau pe cale experimentată) a valorii proprii exprimată prin ω, f sau T contribuie la *identificarea* sistemului din punct de vedere dinamic.

Se subliniază faptul că x_{ST} este o mărime convențională care rezultă prin aplicarea acțiunii gravitaționale $Q = mg$ pe direcția GLD (coordonatei dinamice). Cîteva exemple sînt prezentate în figura 2.5.

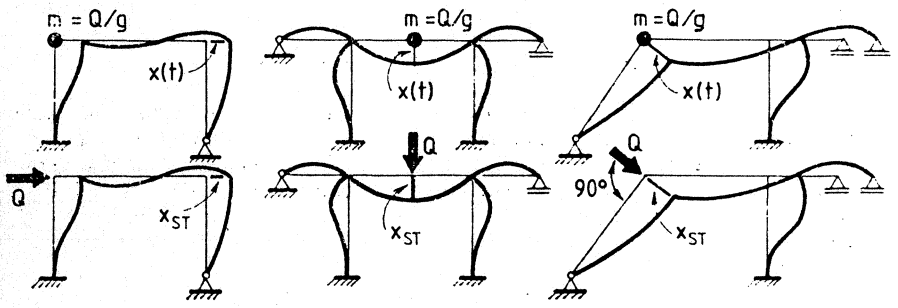
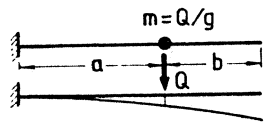
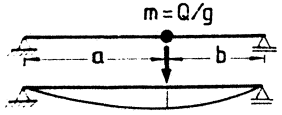
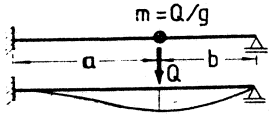
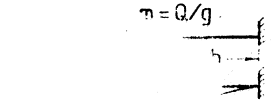
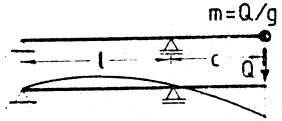
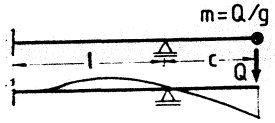


Fig. 2.5

TABELUL 2.1

TIPUL SISTEMULUI OSCILANT	DEPLASAREA STATICĂ x_{ST}	CONSTANTA ELASTICĂ $k = 1/\delta$ (rigiditatea)	PULSAȚIA (rad/s)
	$\frac{Qa^3}{3EI}$	$\frac{3}{a^3}EI$	$\sqrt{g\frac{3EI}{Qa^3}}$
	$\frac{Qa^2b^2}{3(a+b)EI}$	$\frac{3(a+b)}{a^2b^2}EI$	$\sqrt{g\frac{3(a+b)EI}{Qa^2b^2}}$
	$\frac{Qa^3b^2(3a+4b)}{12(a+b)^3EI}$	$\frac{12(a+b)^3}{a^3b^2(3a+4b)}EI$	$\sqrt{g\frac{12(a+b)^3EI}{Qa^3b^2(3a+4b)}}$
	$\frac{Qa^3b^3}{3(a+b)^3EI}$	$\frac{(a+b)^3}{a^3b^3}EI$	$\sqrt{g\frac{(a+b)^3EI}{Qa^3b^3}}$
	$\frac{Qc^2(l-c)}{3EI}$	$\frac{3}{c^2(l-c)}EI$	$\sqrt{g\frac{3EI}{Qc^2(l-c)}}$
	$\frac{Qc^2(3l-4c)}{12EI}$	$\frac{12}{c^2(3l-4c)}EI$	$\sqrt{g\frac{12EI}{Qc^2(3l-4c)}}$

În tabelul 2.1 sînt date valorile pulsațiilor proprii pentru cîteva sisteme simple cu un singur grad de libertate, întîlnite frecvent în aplicațiile practice.

2.1.2. Vibrații libere cu amortizare vîscoasă

În situația în care sistemul oscilant posedă capacitate de amortizare, mișcarea încetează după un anumit interval de timp, avînd deci caracterul unei vibrații tranzitorii. Spre deosebire de cazul precedent, prezența amortizării se manifestă prin disiparea energiei în timp. În ecuația de echilibru dinamic instantaneu care va caracteriza mișcarea sistemului, intervin următoarele forțe:

- forța de inerție $F_i(t) = -m\ddot{x}(t)$;
- forța rezistentă (de amortizare vîscoasă) $F_a(t) = c\dot{x}(t)$;
- forța elastică $F_e(t) = kx(t)$.

Ecuația de mișcare a sistemului oscilant rezultă direct din (2.6) sau (2.8) de forma:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \tag{2.19}$$

unde coeficienții β și ω au fost definiți prin relațiile (2.4) și (2.5).

Pentru rezolvarea acestei ecuații diferențiale se scrie ecuația caracteristică corespunzătoare

$$r^2 + 2\beta r + \omega^2 = 0$$

ale cărei rădăcini sînt

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}. \tag{2.20}$$

În funcție de valoarea discriminantului din relația (2.20) se disting trei cazuri care vor fi analizate în continuare.

a. Amortizare critică. Valoarea coeficientului de amortizare pentru care discriminantul se anulează se numește *coeficient de amortizare critică* și se notează prin c_{cr}. Rezultă deci

$$\beta^2 - \omega^2 = 0,$$

adică

$$\beta_{cr} = \omega.$$

Dacă se ia în considerație expresia coeficientului β din relația (2.4) se obține:

$$\frac{c_{cr}}{2m} = \omega,$$

de unde

$$c_{cr} = 2m\omega = 2\sqrt{mk} = \frac{2k}{\omega}. \tag{2.21}$$

Se constată că coeficientul de amortizare critică este o caracteristică proprie a sistemului oscilant, exprimîndu-se prin intermediul elementelor acestuia (m, k).

Raportul dintre coeficientul de amortizare efectiv c și coeficientul de amortizare critică c_{cr} se numește *fracțiune din amortizarea critică* și se notează cu ν:

$$\nu = \frac{c}{c_{cr}} \tag{2.22}$$

sau

$$\nu = \frac{c}{2m\omega} = \frac{2m\beta}{2m\omega} = \frac{\beta}{\omega} \quad (\beta = \nu\omega). \tag{2.23}$$

Fracțiunea din amortizarea critică are o largă utilizare în dinamica structurilor și în special în ingineria seismică. Spre deosebire de c, fracțiunea ν este un număr adimensional și caracterizează mult mai intuitiv capacitatea de amortizare a unei structuri.

Prin urmare, în cazul amortizării critice rezultă:

$$\beta = \beta_{cr} = \omega, \quad c = c_{cr} \quad \text{sau} \quad \nu = 1.$$

Întrucît

$$r_{1,2} = -\beta = -\nu\omega = -\omega, \tag{2.24}$$

soluția ecuației (2.19) va avea expresia:

$$x(t) = A\,e^{r_1 t} + Bt\,e^{r_1 t} = e^{-\beta t}(C_1 + C_2 t). \tag{2.25}$$

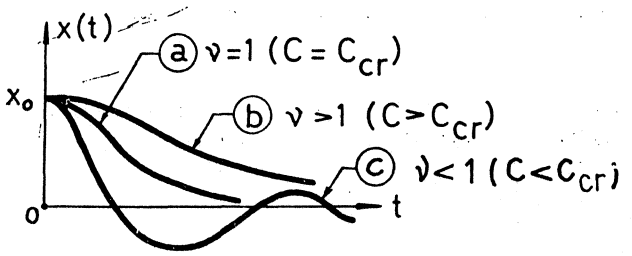


Fig. 2.6

Constantele de integrare A și B se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0 \begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases} \tag{2.26}$$

obținîndu-se

$$A = x_0, \quad B = v_0 + \omega x_0,$$

și deci

$$x(t) = e^{-\omega t}\,[x_0 + (v_0 + \omega x_0)t]. \tag{2.27}$$

Ecuația (2.27) arată că mișcarea corespunzătoare acestui caz este *aperiodică* (fig. 2.6, curba *a*), pierzîndu-și caracterul oscilatoriu.

b. **Amortizarea supracritică.** Dacă coeficientul de amortizare efectiv c depășește valoarea coeficientului de amortizare critică c_{cr}, se consideră că sistemul oscilant are amortizare supracritică.
Deci cînd

$$c > c_{cr},$$

rezultă

$$\beta > \omega \quad \text{și} \quad \nu > 1,$$

iar rădăcinile r_1 și r_2 sînt reale și negative

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega^2}.$$

Soluția ecuației (2.19) rezultă:

$$x(t) = A\,e^{r_1 t} + B\,e^{r_2 t}, \tag{2.28}$$

sau

$$x(t) = e^{-\beta t}(A\,e^{\sqrt{\beta^2-\omega^2}\,t} + B\,e^{-\sqrt{\beta^2-\omega^2}\,t}). \tag{2.29}$$

În baza condițiilor inițiale (2.26), se obțin valorile constantelor, A și B:

$$A = \frac{v_0 + x_0(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2})}{2\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}$$

$$B = -\frac{v_0 + x_0(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2})}{2\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}.$$

Analog cazului precedent, mișcarea rezultantă nu mai este oscilatorie ci *aperiodică* (fig. 2.6, curba *b*). Într-o mișcare aperiodică, sistemul care a fost scos din poziția de echilibru revine la poziția sa inițială fără a oscila.

c. **Amortizarea subcritică.** Acest ultim caz interesează din punct de vedere practic întrucît

$$c < c_{cr}, \quad (\nu < 1 \quad \text{și} \quad \beta < \omega).$$

Rădăcinile ecuației caracteristice vor fi de această dată imaginare (complexe conjugate), adică

$$r_{1,2} = -\beta \pm j\sqrt{\omega^2 - \beta^2},$$

sau

$$r_{1,2} = -\beta \pm j\omega^*, \tag{2.30}$$

unde

$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$, reprezintă pulsația proprie a sistemului oscilant cînd se ține seama de influența amortizării,

$j = \sqrt{-1}$.

În acest caz, soluția ecuației (2.19) este identică cu soluția precedentă (2.28) rezultînd:

$$x(t) = e^{-\beta t}(A\,e^{j\omega^* t} + B\,e^{-j\omega^* t}).$$

Dezvoltînd funcțiile exponențiale și utilizînd relațiile lui Euler, soluția de mai sus se poate scrie sub forma:

$$x(t) = e^{-\beta t}(C_1 \sin \omega^* t + C_2 \cos \omega^* t) \tag{2.31}$$

iar prin compactarea termenilor din paranteză, se obține:

$$x(t) = A\,e^{-\beta t} \cdot \sin(\omega^* t + \varphi^*), \tag{2.32}$$

Prin urmare răspunsul liber, exprimat în deplasări instantanee are expresia:

$$x(t) = A\,e^{-\nu\omega t} \sin(\omega^* t + \varphi^*) = A(t) \sin(\omega^* t + \varphi^*) \tag{2.33}$$

unde

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi^* = \frac{C_2}{C_1}.$$

Constantele C_1 și C_2 se obțin din condițiile inițiale (2.26) folosindu-se deci și expresia variației vitezei

$$\dot{x}(t) = e^{-\beta t}(\omega^* C_1 \cos \omega^* t - \omega^* C_2 \sin \omega^* t) - \beta e^{-\beta t}(C_1 \sin \omega^* t + C_2 \cos \omega^* t).$$

Dacă se înlocuiesc cele două condiții (2.26) în expresiile deplasării și vitezei, cele două constante C_1 și C_2 vor fi:

$$C_1 = \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega^*}, \quad C_2 = x_0,$$

încît se pot determina direct și cele două constante A și φ^*.

Exprimarea mișcării prin ecuația (2.32) este mult mai convenabilă și mai sugestivă. Aceasta este o mișcare armonică cu pulsația ω^* și amplitudinea $Ae^{-\beta t}$ care descrește exponențial în timp. O asemenea mișcare se mai numește *pseudoarmonică*, iar reprezentarea grafică este redată în figura 2.7, *a*.

Notațiile ω^* și φ^* pun în evidență influența amortizării asupra pulsației și fazei.

Studiul mișcării permite *identificarea* completă a caracteristicilor de definire (valoare proprie, amortizare) a sistemului dinamic.

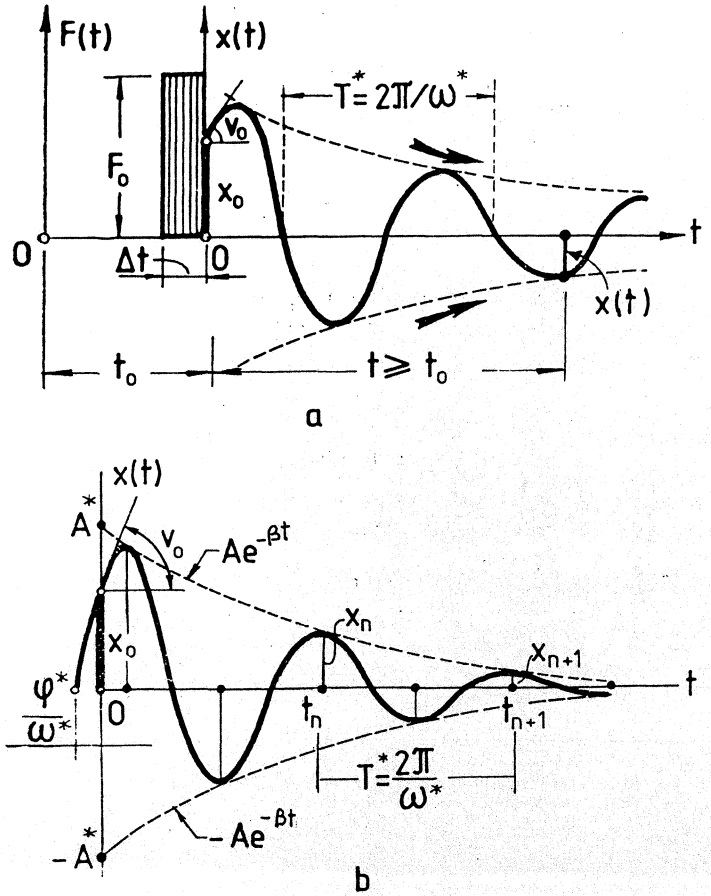


Fig. 2.7.

Pulsația proprie a vibrației este influențată de amortizare prin coeficientul β, sau prin factorul ν astfel:

$$\omega^* = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \omega \sqrt{1 - \left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2}.$$

Folosind relația (2.23), expresia pulsației proprii devine:

$$\omega^* = \omega \sqrt{1 - \nu^2}, \quad (\nu < 1). \tag{2.34}$$

Se observă că pulsația proprie, cînd se ține cont de amortizare, este teoretic mai mică decît în cazul cînd se neglijează amortizarea. În baza expresiei (2.34) se pot determina

— *frecvența proprie*

$$f^* = f\sqrt{1 - \nu^2}, \tag{2.35}$$

— *perioada proprie*

$$T^* = T/\sqrt{1 - \nu^2}. \tag{2.36}$$

Deoarece pentru structurile frecvent utilizate în construcțiile inginerești $\nu \leqslant 0{,}20$ se constată că *poate fi neglijată influența amortizării asupra valorii proprii a sistemului*, încît relațiile riguroase (2.34), (2.35) și (2.36) devin

$$\omega^* \simeq \omega, \quad f^* \simeq f \quad \text{și} \quad T^* \simeq T.$$

Cunoscînd configurația mișcării libere a unui sistem disipativ, gradul de amortizare se poate stabili folosind amplitudinile succesive ale vibrației. În acest sens, gradul de amortizare se definește prin intermediul decrementului logaritmic Δ.

Decrementul logaritmic al amortizării reprezintă logaritmul natural al raportului dintre două amplitudini succesive decalate cu o perioadă (sau de același semn).

Se consideră următoarele amplitudini succesive ale vibrației reprezentate în figura 2.7, *b*:

$$x_n = A\, e^{-\beta t_n}; \quad x_{n+1} = A\, e^{-\beta t_{n+1}},$$

al căror raport este:

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\beta(t_{n+1} - t_n)} = e^{\beta T^*}.$$

Conform definiției, decrementul logaritmic rezultă

$$\Delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \beta T^* \tag{2.37}$$

Înlocuind β și T^* cu expresiile rezultate din relațiile (2.23) și (2.36), se poate stabili legătura dintre Δ și ν sub forma:

$$\Delta = \frac{2\pi\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}},$$

sau dacă se ține seama de observația făcută anterior asupra valorii lui ν, se obține:

$$\Delta \cong 2\pi\nu. \tag{2.38}$$

Decrementul logaritmic al amortizării se determină folosind vibrograme înregistrate în urma unor cercetări experimentale efectuate direct asupra unei anumite structuri. Aplicînd relația (2.37), sau în mod aproximativ formula:

$$\Delta \cong \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n}, \tag{2.39}$$

cu ajutorul relației (2.38) se determină valoarea fracțiunii din amortizarea critică care se folosește în calculul dinamic:

$$\nu = \frac{\Delta}{2\pi}. \tag{2.40}$$

În cazul amortizării vîscoase, factorul ν depinde în general de tipul structurilor și de natura materialului din care sînt executate și se obține numai pe cale experimentală. După cum se va arăta în cuprinsul acestui capitol, gradul de amortizare se poate determina și din curba frecvență-răspuns în cazul vibrațiilor forțate armonice.

TABELUL 2.2

Nr. crt.	TIPUL STRUCTURII	FRACȚIUNEA DIN AMORTIZARE CRITICĂ ν
1	Construcții cu structură din beton armat monolit	0,02...0,14
2	Construcții cu structura din zidărie sau prefabricate	0,06...0,18
3	Construcții industriale cu structura metalică	0,02...0,06
4	Poduri de beton armat	0,03...0,16
5	Poduri metalice	0,02...0,08
6	Construcții masive	0,05...0,10
7	Terenuri de fundație (în general)	0,06...0,30
8	Nisip compact	0,10

Se constată, că în cazul modelului pur vîscos, indiferent de poziția celor două amplitudini prin intermediul cărora se determină decrementul logaritmic al amortizării, relația (2.37) furnizează rezultate identice. În realitate structurile nu posedă amortizare pur vîscoasă, încît înfășurătoarea amplitudinilor este o funcție oarecare și nu exponențială (fig. 2.7). De aceea decrementul logaritmic se evaluează prin valoarea medie a mai multor valori Δ_i succesive ($i = 1, 2, ..., n$), obținute prin aplicarea relației (2.37). După excluderea valorilor extreme (singulare), estimarea decrementului logaritmic se poate face prin intermediul RMS (rădăcina medie pătratică):

$$\Delta_{(RMS)} = \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

În tabelul 2.2 se dau cîteva valori orientative ale fracțiunii din amortizarea critică pentru diferite tipuri de structuri și terenuri de fundație.

Se poate constata că valoarea proprie și fracțiunea din amortizarea critică reprezintă noile caracteristici dinamice de definire ale sistemelor cu 1 GLD, în locul caracteristicilor inițiale m, c, k, întrucît $\omega^2 = k/m$ și $\nu = c/c_{cr}$ ($c_{cr} = 2\sqrt{mk}$).

2.2. VIBRAȚII FORȚATE PRODUSE DE ACȚIUNEA UNEI FORȚE ARMONICE APLICATE DIRECT ASUPRA SISTEMULUI. RĂSPUNS FORȚAT

Se va considera că asupra masei unui sistem oscilant cu 1 GLD (fig. 2.8, *a*) se aplică o forță perturbatoare armonică $F(t) = F_0 \sin \theta t$, în care s-au notat cu F_0 amplitudinea, iar cu θ pulsația forței variabile în timp. Se va analiza în paralel răspunsul total al sistemului în cazul vibrațiilor forțate fără/cu amortizare. Ecuațiile de mișcare vor fi exprimate în raport cu pozițiile de echilibru static ale sistemelor explicitîndu-se numai efectele dinamice pure.

2.2.1. Vibrații forțate fără amortizare

Ecuația mișcării se poate obține direct prin particularizarea ecuației (2.6) sau exprimînd echilibrul dinamic instantaneu al sistemului, între următoarele forțe:

— forța de inerție $F_i(t) = -m\ddot{x}(t)$
— forța elastică $F_e(t) = kx(t)$
— forța perturbatoare $F(t) = F_0 \sin \theta t$.

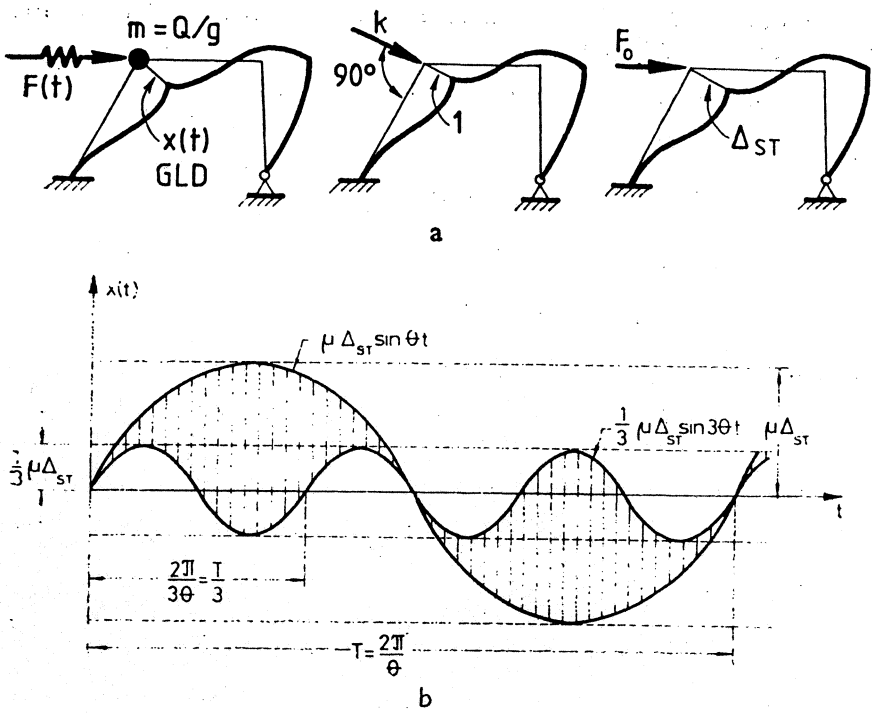


Fig. 2.8.

Rezultă deci ecuația:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m}\sin \theta t, \tag{2.41}$$

a cărei soluție generală este de forma (2.9), adică:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t),$$

unde, soluția ecuației omogene $x_L(t)$ care corespunde vibrațiilor libere fără amortizare, are expresia (2.11):

$$x_L(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Soluția particulară $x_F(t)$, care corespunde perturbației armonice, reprezintă răspunsul sistemului la excitația forțată $F(t)$.

După cum s-a demonstrat în § 1.12, răspunsul dinamic forțat al unui sistem oscilant la o excitație armonică are caracter staționar și permanent iar variația este identică cu cea a excitației, deci tot armonică. În consecință, soluția forțată se poate admite de forma:

$$x_F(t) = M \sin \theta t + N \cos \theta t. \tag{2.42}$$

Constantele M și N se determină din condiția ca această soluție să satisfacă ecuația mișcării (2.41):

$$-(M\theta^2 \sin \theta t + N\theta^2 \cos \theta t) + \omega^2(M \sin \theta t + N \cos \theta t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t,$$

sau

$$M(\omega^2 - \theta^2) \sin \theta t + N(\omega^2 - \theta^2) \cos \theta t = \frac{F_0}{m} \sin \theta t.$$

Prin identificarea coeficienților funcțiilor trigonometrice rezultă:

$$M(\omega^2 - \theta^2) = \frac{F_0}{m}, \quad N(\omega^2 - \theta^2) = 0,$$

de unde

$$M = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}, \quad N = 0, \quad (\omega^2 - \theta^2 \neq 0).$$

Soluția particulară (2.42) devine:

$$x_F(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin \theta t, \tag{2.43}$$

iar cea generală

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \sin \theta t. \tag{2.44}$$

Ecuația vitezei se obține prin derivarea expresiei (2.44):

$$\dot{x}(t) = \omega C_1 \cos \omega t - \omega C_2 \sin \omega t + \frac{\theta F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \cos \theta t. \tag{2.45}$$

Constantele de integrare C_1 și C_2 se determină din condițiile inițiale:

$$t = 0, \quad x(0) = x_0 \quad \text{și} \quad \dot{x}(0) = v_0.$$

Introducînd aceste condiții în ecuațiile (2.44) și (2.45), cele două constante vor fi

$$C_1 = \frac{v_0}{\omega} - \frac{\theta}{\omega} \cdot \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)}; \quad C_2 = x_0,$$

încît soluția (2.44) se va putea scrie astfel:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right) \tag{2.46}$$

Dacă excitația se aplică în momentul în care sistemul se afla în repaus ($t = 0$, $x(0) = \dot{x}(0) = 0$), din soluția (2.46) dispar primii doi termeni care corespund oscilațiilor proprii, încît:

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} \left(\sin \theta t - \frac{0}{\omega} \sin \omega t \right). \tag{2.47}$$

Factorul dimensional al expresiei (2.47) va fi transformat cu scopul de a pune în evidență semnificația sa. Ținînd seama de (2.7) rezultă

$$\frac{F_0}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{F_0}{m\omega^2 \left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2} \cdot \frac{F_0}{k} = \mu \Delta_{ST},$$

unde

$$\mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2}, \tag{2.48}$$

reprezintă *coeficientul dinamic* sau *factorul de amplificare dinamică* (FAD), iar

$$\Delta_{ST} = \frac{F_0}{k}, \tag{2.49}$$

reprezintă *deplasarea statică* pe direcția GLD produsă de acțiunea statică a forței F_0 (aplicată sistemului pe direcția de acțiune a forței perturbatoare), în conformitate cu figura 2.8, *a*.

Cu aceste notații, expresia generală a răspunsului forțat exprimat în deplasări dinamice rezultă:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t + \mu \Delta_{ST} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right),$$

iar răspunsul staționar (permanent):

$$x(t) = \mu \Delta_{ST} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right). \tag{2.50}$$

Expresia

$$\mu(t) = \mu \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right), \tag{2.51}$$

caracterizează FAD *variabil în timp*.

Primul termen al expresiei (2.50) în $\sin \theta t$ reprezintă influența directă a perturbației, iar termenul în $\sin \omega t$ influența vibrațiilor proprii (neamortizate).

În figura 2.8, *b* este reprezentată grafic oscilația rezultantă din relația (2.50) considerînd $\theta = \omega/3$, în care caz expresia deplasării devine:

$$x(t) = \mu \Delta_{ST} \left(\sin \theta t - \frac{1}{3} \sin 3\theta t \right).$$

Se observă că această oscilație reprezintă o mișcare periodică avînd perioada $T = 2\pi/\theta$.

Ținînd seama că în realitate răspunsul liber se amortizează, după un anumit interval de timp mișcarea se stabilizează rămînînd numai influența răspunsului forțat, care reprezintă un proces staționar, permanent și armonic cu pulsația θ, deci:

$$x(t) = \mu \Delta_{ST} \sin \theta t = x_a \sin \theta t. \tag{2.52}$$

Deplasarea dinamică maximă a sistemului va fi egală cu amplitudinea vibrației forțate exprimată prin relația (2.52), adică:

$$x_d = \mu\Delta_{ST}. \tag{2.53}$$

Forța de inerție, care se produce ca o consecință a aplicării forței perturbatoare, se determină direct cunoscînd expresia deplasărilor (2.52)

$$\mathcal{J}(t) = -m\ddot{x}(t) = m\theta^2\mu\Delta_{ST}\sin\theta t,$$

iar forța dinamică care se aplică sistemului dinamic rezultă

$$F_d(t) = F(t) + \mathcal{J}(t) = F_0\sin\theta t + m\theta^2\mu\Delta_{ST}\sin\theta t = F_d\sin\theta t, \tag{2.54}$$

unde

$$F_d = F_0 + m\theta^2\mu\frac{F_0}{k} = \left[1 + \mu\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]F_0,$$

sau, operînd asupra parantezei

$$F_d = \mu F_0. \tag{2.55}$$

Atît deplasarea dinamică maximă (2.53), cît și forța dinamică maximă (2.55) sînt mărimi cu caracter alternant.

Se observă că $F_d = kx_d$, astfel încît forța dinamică maximă are caracterul unei forțe elastice.

Relațiile (2.53) și (2.55) permit o interpretare a FAD (μ) ca raport între răspunsul maxim al sistemului și valoarea de amplitudine a excitației.

Prin coeficientul dinamic (FAD) μ se introduce în calcul efectul aplicării dinamice a forței F_0. Dacă $\theta = 0$ rezultă $\mu = 1$, ceea ce arată că efectul dinamic a dispărut, iar asupra sistemului se aplică forța F_0 static. Reprezentarea grafică a variației coeficientului μ (2.48) este dată în figura 2.9.

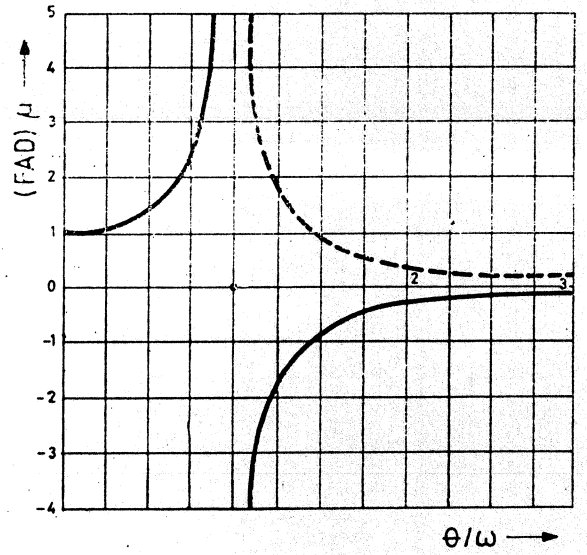


Fig. 2.9

Analizînd graficul din figura 2.9, se observă că în cazul în care pulsația θ a forței perturbatoare este foarte mică în raport cu pulsația proprie ω, μ tinde către unitate, ceea ce arată că efectul dinamic este neînsemnat. Dacă θ este mai mare decît ω, rezultă valori negative pentru μ, iar pentru $\theta > \sqrt{2}\,\omega$ valorile μ sînt subunitare, efectul dinamic fiind chiar mai redus decît cel rezultat din aplicarea statică a forței F_0. Valorile negative ale lui μ în intervalul $\theta/\omega > 1$ demonstrează că deplasarea este defazată cu π față de perturbație astfel încît valorile lor maxime, în timpul mișcării, sînt de sensuri opuse.

Dacă $\theta = \omega$ valoarea coeficientului μ tinde către infinit, iar deplasarea crește nelimitat în timp. Această situație este ipotetică deoarece în realitate intervine amortizarea internă a sistemului care limitează mărimea deplasărilor. Cazul în care pulsația excitației coincide cu pulsația proprie caracterizează *fenomenul de rezonanță*.

Relația (2.50) arată că în rezonanță, expresia deplasării se reduce la o nedeterminare, astfel încît aplicînd regula lui l'Hôspital, se obține

$$x(t) \simeq -\Delta_{ST}\frac{\theta t}{2}\cos\theta t, \tag{2.56}$$

adică o mișcare armonică cu amplitudini variind liniar și nelimitat, caracteristică fenomenului de rezonanță (v. fig. 2.16).

Din punct de vedere practic, prezintă un interes mai mare situația în care se ia în considerație prezența amortizării.

2.2.2. Vibrații forțate cu amortizare vîscoasă

În acest caz, forțele care definesc echilibrul dinamic instantaneu în timpul mișcării sistemului oscilant sînt:

— forța de inerție $F_i(t) = -m\ddot{x}(t)$;
— forța rezistentă (de amortizare) $F_a(t) = c\dot{x}(t)$;
— forța elastică $F_e(t) = kx(t)$;
— forța perturbatoare $F(t) = F_0\sin\theta t$.

Ecuația de mișcare va avea forma (2.6) în care se particularizează forța perturbatoare prin excitația armonică admisă mai sus. Deci:

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m}\sin\theta t, \tag{2.57}$$

iar soluția generală va fi tot de forma (2.9)

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t),$$

în care, soluția oscilațiilor libere este deja cunoscută din relațiile (2.31) sau (2.32) cînd $\beta < \omega$ sau $0 < \nu < 1$:

$$x_L(t) = e^{-\beta t}(C_1\sin\omega^* t + C_2\cos\omega^* t) = Ae^{-\beta t}\sin(\omega^* t + \varphi^*) = A(t)\sin(\omega^* t + \varphi^*).$$

Soluția forțată $x_F(t)$, reprezentînd răspunsul la o excitație armonică, va fi identică cu expresia (2.42):

$$x_F(t) = M_1\sin\theta t + N_1\cos\theta t, \tag{2.58}$$

dar cu observația că cele două constante M_1 și N_1 vor rezulta din condiția ca soluția (2.58) să satisfacă ecuația (2.57).

Înlocuind deci (2.58) în (2.57) se obține:

$$-(M_1\theta^2 \sin \theta t + N_1\theta^2 \cos \theta t) + 2\beta(M_1\theta \cos \theta t - N_1\theta \sin \theta t) + \\ + \omega^2(M_1 \sin \theta t + N_1 \cos \theta t) = \frac{F_0}{m} \sin \theta t,$$

sau

$$[(\omega^2 - \theta^2) M_1 - 2\beta\theta N_1] \sin \theta t + [2\beta\theta M_1 + (\omega^2 - \theta^2) N_1] \cos \theta t = \frac{F_0}{m} \sin \theta t,$$

de unde se obține următorul sistem de ecuații în M_1 și N_1:

$$(\omega^2 - \theta^2) M_1 - 2\beta\theta N_1 = \frac{F_0}{m},$$

$$2\beta\theta M_1 + (\omega^2 - \theta^2) N_1 = 0.$$

Rezolvînd acest sistem, se determină cele două constante, ale căror expresii sînt:

$$M_1 = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{\omega^2 - \theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2},$$

$$N_1 = -\frac{F_0}{m} \cdot \frac{2\beta\theta}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}.$$

Întrucît soluția (2.58) reprezintă o suprapunere de două oscilații armonice de aceeași pulsație, aceasta se mai poate scrie sub forma

$$x_F(t) = A_1 \sin (\theta t - \varphi_1), \tag{2.59}$$

unde

$$A_1 = \sqrt{M_1^2 + N_1^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{N_1}{M_1}.$$

Ținînd seama de expresiile constantelor M_1 și N_1, amplitudinea și faza soluției forțate devin:

$$A_1 = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}}; \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\beta\theta}{\omega^2 - \theta^2}.$$

Deoarece $\nu = \beta/\omega$ (formula 2.23), $m = k/\omega^2$ (formula 2.7), iar $\Delta_{ST} = F_0/k$ (formula 2.49) cei doi parametri care caracterizează răspunsul staționar al sistemului dinamic vor fi:

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}} \Delta_{ST} = \mu^* \Delta_{ST}, \tag{2.60}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\nu \dfrac{\theta}{\omega}}{1 - \left(\dfrac{\theta}{\omega}\right)^2}, \tag{2.61}$$

unde

$$\mu^* = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}, \tag{2.62}$$

reprezintă *coeficientul dinamic* sau *factorul de amplificare dinamică* (FAD) cînd se ține seama de prezența amortizării. Este evident că atunci cînd se face abstracție de amortizare, deci $\nu = 0$ rezultă $\mu^* = \mu$.

În aceste condiții, răspunsul forțat (2.59), exprimat în deplasări, devine:

$$x_F(t) = \mu^* \Delta_{ST} \sin (\theta t - \varphi_1),$$

iar răspunsul total în deplasări are forma:

$$x(t) = e^{-\nu\omega t}(C_1 \sin \omega^* t + C_2 \cos \omega^* t) + \mu^* \Delta_{ST} \sin (\theta t - \varphi_1). \tag{2.63}$$

Se va evalua răspunsul total tranzitoriu considerînd următoarele condiții inițiale:

$$t = 0 \begin{cases} x(0) = 0; \\ \dot{x}(0) = 0. \end{cases}$$

Pentru determinarea constantelor C_1 și C_2 este mai convenabil să se scrie (2.63) astfel:

$$x(t) = e^{-\nu\omega t}(C_1 \sin \omega^* t + C_2 \cos \omega^* t) + M_1 \sin \theta t + N_1 \cos \theta t, \tag{2.64}$$

rezultînd pentru variația vitezei expresia

$$\dot{x}(t) = C_1 e^{-\nu\omega t}(\omega^* \cos \omega^* t - \beta \sin \omega^* t) - C_2 e^{-\nu\omega t}(\omega^* \sin \omega^* t - \beta \cos \omega^* t) + \\ + M_1\theta \cos \theta t - N_1\theta \sin \theta t.$$

Introducînd condițiile inițiale în ecuațiile de mai sus se obțin cele două constante

$$C_1 = -M_1 \frac{\theta}{\omega^*} - N_1 \frac{\beta}{\omega^*}; \quad C_2 = -N_1$$

Înlocuind C_1 și C_2 în expresia (2.63) și ținînd seama de expresiile coeficienților M_1 și N_1 stabilite anterior, se obține:

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2} \left\{[(\omega^2 - \theta^2) \sin \theta t - 2\beta\theta \cos \theta t] + \right. \\ \left. + e^{-\nu\omega t}\left[2\beta\theta \cos \omega^* t + \frac{\theta}{\omega^*}(2\beta^2 + \theta^2 - \omega^2) \sin \omega^* t\right]\right\}.$$

Dacă se împarte numitorul și numărătorul cu ω^2 și ținînd seama de formulele (2.7), (2.23), și (2.49), relația de mai sus se transformă astfel:

$$x(t) = \\ = \frac{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right] \sin \theta t - 2\nu\left(\frac{\theta}{\omega}\right) \cos \theta t + e^{-\nu\omega t}\left[2\nu\left(\frac{\theta}{\omega}\right) \cos \omega^* t + \frac{\theta}{\omega}\left(2\nu^2 + \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 - 1\right) \sin \omega^* t\right]}{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \cdot \Delta_{ST} \tag{2.65}$$

sau

$$x(t) = \mu(t) \cdot \Delta_{ST},$$

unde $\mu(t)$ reprezintă fracția din expresia (2.65) și este FAD *variabil în timp*. Atît $\mu(t)$, cît și $\mu^*(t)$ au caracterul unor funcții de transfer, în sensul că transferă acțiunea în răspuns. Făcînd abstracție de influența amortizării ($\nu = 0$) în relația (2.65), se obține soluția stabilită în cazul precedent, (2.50).

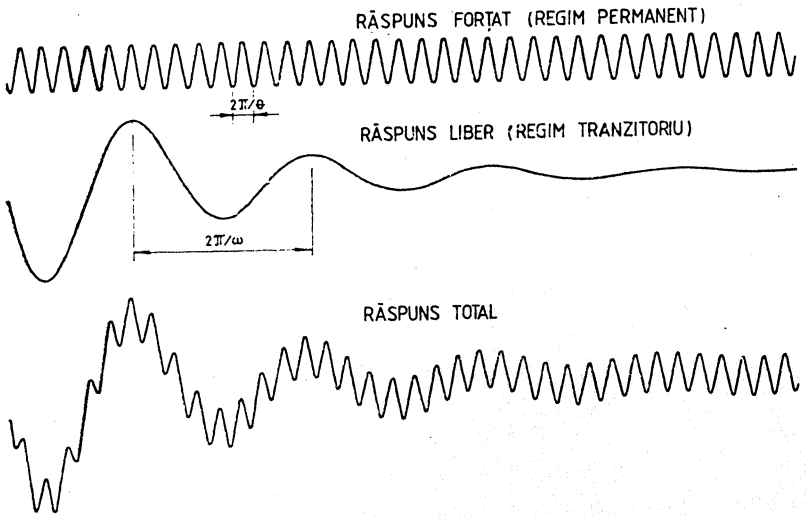


Fig. 2.10

Cînd acțiunea forței perturbatoare este de lungă durată, răspunsul liber are un caracter tranzitoriu, iar răspunsul total se reduce numai la cel forțat, avînd un caracter *staționar* (fig. 2.10). În această situație, care interesează din punct de vedere practic, termenii relației (2.65) care sînt multiplicați cu $e^{-\nu\omega t}$ tind către zero astfel încît deplasarea dinamică a sistemului oscilant rezultă:

$$x(t) = \mu^* \Delta_{ST} \sin(\theta t - \varphi_1) = x_d \sin(\theta t - \varphi_1), \tag{2.66}$$

iar forța dinamică corespunzătoare

$$F_d(t) = kx(t) = \mu^* F_0 \sin(\theta t - \varphi_1) = F_d \sin(\theta t - \varphi_1). \tag{2.67}$$

Răspunsul staționar maxim exprimat în deplasări și forțe dinamice, al căror caracter este alternant, se va calcula cu formulele:

$$x_d = \mu^* \Delta_{ST} \tag{2.68}$$

$$F_d = \mu^* F_0. \tag{2.69}$$

Variația coeficientului dinamic μ^* (FAD), care pune în evidență efectul aplicării dinamice a acțiunii este reprezentată grafic în figura 2.11, în funcție de raportul θ/ω. Se observă că în prezența amortizării, curbele de variație a coeficientului μ^* nu mai au salt asimptotic în rezonanță ($\theta/\omega = 1$) ca în cazul precedent (v. fig. 2.9). De asemenea, se constată, că influența amortizării asupra amplitudinilor este mai pregnantă în zona rezonanței. Urmărind graficele din figura 2.11, trasate pentru diferite valori ale fracțiunii din amortizarea critică ν, se poate trage concluzia că la valori mici ale pulsației θ (pulsația perturbației), coeficientul dinamic μ^* este practic egal cu unitatea. Maximele coeficientului μ^* se produc în zona rezonanței cînd $\theta \simeq \omega$, iar pentru valori mari ale pulsației θ, μ^* tinde către zero.

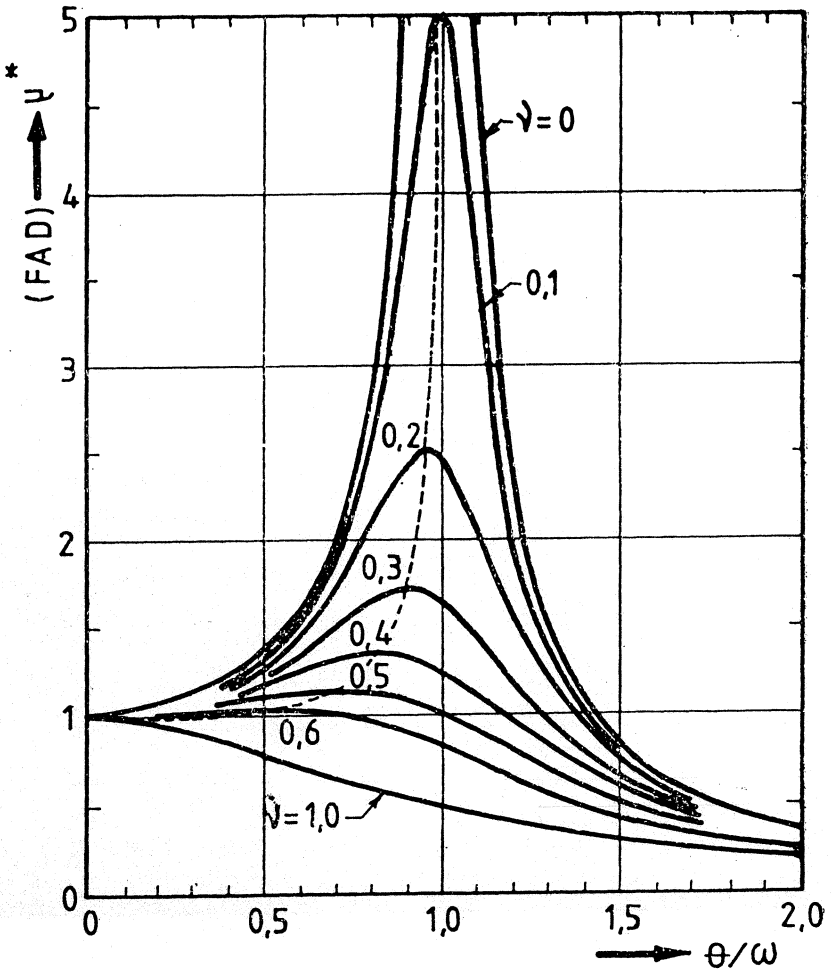


Fig. 2.11

Răspunsul sistemului oscilant exprimat în deplasări prin expresia (2.66) va avea următoarele forme în cele trei cazuri comentate mai sus:

— în cazul în care $\theta \ll \omega$, $(\mu^* \simeq 1)$:

$$x(t) \simeq \Delta_{ST} \sin \theta(t), \tag{2.70}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \to 0, \quad \varphi_1 \to 0;$$

— cazul în care $\theta \simeq \omega$, $\left(\mu^* \simeq \frac{1}{2\nu}\right)$:

$$x(t) \simeq \frac{1}{2\nu} \Delta_{ST} \sin\left(\theta t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2\nu} \Delta_{ST} \cos \theta t, \tag{2.71}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \to \infty, \quad \varphi_1 \to \frac{\pi}{2};$$

— cazul în care $\theta \gg \omega$, $\left(\mu^* \simeq \frac{\omega^2}{\theta^2}\right)$:

$$x(t) \simeq \frac{\omega^2}{\theta^2} \Delta_{ST} \sin(\theta t + \pi), \tag{2.72}$$

$\operatorname{tg} \varphi_1 \to 0$ (prin valori negative), $\varphi_1 \to -\pi$.

În *rezonanță*, deci cînd $\theta \simeq \omega$, coeficientul dinamic atinge valorile maxime, însă finite, ceea ce arată că în funcție de gradul de amortizare deplasările sistemului sînt limitate diferențiat.

În mod teoretic, valorile maxime ale coeficientului dinamic μ^* se obțin pentru $\theta/\omega = \sqrt{1 - 2\nu^2}$ în care caz:

$$\mu^*_{max} = \frac{1}{2\nu\sqrt{1-\nu^2}}.$$

Pentru valori nu prea mari ale fracțiunii din amortizarea critică ν, coeficientul maxim se poate aproxima astfel:

$$\mu^*_{max} \simeq \frac{1}{2\nu}. \tag{2.73}$$

Curbele de variație ale FAD, reprezentate în figura 2.11 în funcție de pulsația relativă θ/ω și fracțiunea din amortizarea critică ν, sînt de o importanță deosebită în proiectarea dinamică a acelor tipuri de structuri care pot fi reduse la sisteme cu 1 GLD. În general, sursele perturbatoare cu caracter armonic sînt cele artificiale directe, generate de procese tehnologice sau industriale. Din această categorie fac parte utilajele și agregatele neechilibrate amplasate fie pe structuri independente (cum sînt fundațiile de mașini), fie pe planșeele unor structuri de rezistență cu destinație multiplă.

În exploatarea în regim permanent a unui utilaj, generator de excitații de tip armonic, nu se admite funcționarea în zona rezonanței delimitată în general de intervalul $0{,}75\omega \leqslant \theta \leqslant 1{,}25\,\omega$ sau $0{,}75 \leqslant \theta/\omega \leqslant 1{,}25$. Unele standarde internaționale recomandă evitarea zonei (0,80 ... 1,20). Factorii care intervin în stabilirea delimitării zonei rezonanței sînt numeroși, depinzînd atît de structură, cît și de tipul sursei. Nu se va insista asupra acestor aspecte întrucît nu fac obiectul prezentei lucrări.

Dacă regimul de funcționare permanentă al unui echipament este situat în intervalul $0 \leqslant \theta/\omega \leqslant 0{,}75$, se consideră că *sursa funcționează în acordare joasă*, iar dacă rezultă $\theta/\omega \geqslant 1{,}25$ *sursa funcționează în acordare înaltă*. Acest fel de a defini modul de acordare sursă-sistem se referă în exclusivitate la modul de acordare a sursei perturbatoare. În cazul în care se face referire la sistem (structură), cînd $0 \leqslant \theta/\omega \leqslant 0{,}75$ *structura este supraacordată* (în acordare înaltă), iar cînd $\theta/\omega \geqslant 1{,}25$ *structura este subacordată* (în acordare joasă).

Acordarea joasă a sursei sau *supraacordarea sistemului* are avantajul că la punerea și scoaterea din funcțiune a unei mașini sau instalații, nu se trece prin zona de rezonanță, în schimb are dezavantajul că amplitudinile dinamice pot fi destul de mari deoarece totdeauna $\mu^* > 1$.

Acordarea înaltă a sursei sau *subacordarea sistemului* are avantajul că în majoritatea cazurilor amplitudinile dinamice sînt mult mai mici, uneori chiar apropiate de zero, deoarece totdeauna $\mu^* < 1$ cu excepția unui mic

interval $\theta/\omega = 1{,}25$ ... 1,41. Dezavantajul acestui mod de acordare constă în faptul că la punerea și scoaterea din funcțiune a instalației, sistemul trece prin rezonanță.

Întrucît intervalul de funcționare permanentă a unui utilaj industrial este destul de mare (de ordinul lunilor), scoaterea din funcțiune făcîndu-se numai pentru revizii sau reparații, se preferă acordarea înaltă datorită faptului că efectele dinamice sînt substanțial reduse, iar funcționarea este foarte echilibrată. Pentru a reduce efectul defavorabil al trecerii prin zona rezonanței se iau măsuri speciale de „izolare" a fundației prin realizarea unor disipatori de energie (amortizori). Pe de altă parte, la trecerea prin rezonanță, vibrațiile au un regim tranzitoriu astfel încît situația în care sistemul suferă creșteri de amplitudine este limitat în timp. Există totuși cazuri cînd acordarea joasă nu poate fi evitată (mașini cu turație mică, deci și pulsații reduse).

În cazul cînd la o primă verificare rezultă θ/ω cuprins în intervalul rezonanței, cum θ nu poate fi modificat fiind o caracteristică standard a sursei, este necesară redimensionarea structurii în vederea stabilirii unei alte pulsații proprii ω care să schimbe astfel valoarea raportului θ/ω încît $0{,}75 < \theta/\omega > 1{,}25$.

În privința efectului amortizării, se constată că influența acesteia este mai importantă în intervalul $0{,}75 \leqslant \theta/\omega \leqslant 1{,}25$. În afara acestui interval, amplitudinile mișcării sînt foarte puțin afectate de amortizare și în consecință poate fi neglijată în funcționarea permanentă.

Referitor la unghiul de fază (sau de defazaj) φ_1 dat de formula (2.61), acesta variază conform graficului din figura 2.12, între zero (cînd $\theta \ll \omega$) și π (cînd $\theta \gg \omega$). În rezonanță (cînd $\theta \simeq \omega$) unghiul de fază variază foarte rapid mai ales în situația unei amortizări slabe, iar dacă $\nu = 0$ (amortizare nulă), se produce un salt brusc de la zero la π. Din figura 2.12, rezultă că la amortizare nulă, dacă $\theta/\omega < 1$, $\varphi_1 = 0$, deplasarea sistemului este în fază cu forța perturbatoare; dacă $\theta/\omega > 1$, $\varphi_1 = \pi$ deplasarea sistemului va fi în opoziție de fază cu forța perturbatoare (v. §2.2.1).

Ținînd seama de posibilitatea reprezentării vectoriale a vibrațiilor (v. §1.7.2), precum și de faptul că atît acțiunea, cît și răspunsul au caracter

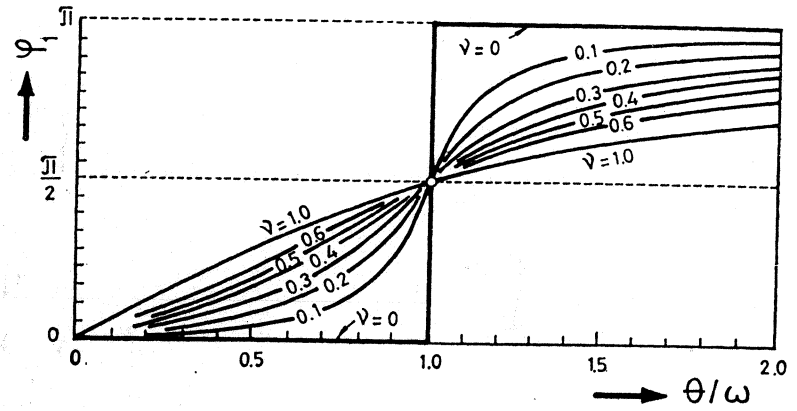


Fig. 2.12

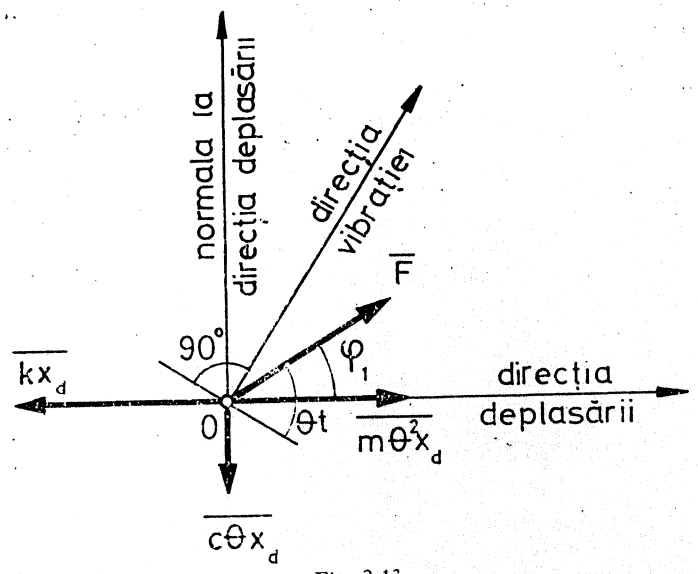


Fig. 2.13

armonic și aceeași pulsație, echilibrul dinamic al mișcării poate fi reprezentat în mod convenabil în *planul fazelor* (fig. 2.13).

Vectorii rotitori din figura 2.13 reprezintă forțele care participă, în orice moment al mișcării, la echilibrul dinamic instantaneu în cazul răspunsului staționar (2.66). Aceste forțe sînt următoarele:

— *forța elastică*, care este de sens contrar mișcării și are amplitudinea kx_d (se opune mișcării);

— *forța de amortizare vîscoasă*, care este defazată înainte (în avans) cu $\pi/2$ față de forța elastică avînd amplitudinea $c\theta x_d$;

— *forța de inerție*, care este de aceeași fază cu mișcarea sistemului și cu amplitudinea $m\theta^2 x_d$;

— *forța perturbatoare*, a cărei expresie este $F_0 \sin \theta t$ (deci de amplitudine F_0), care se află în avans cu unghiul φ_1 față de mișcarea sistemului (răspunsul acestuia) $x(t) = x_d \sin(\theta t - \varphi_1)$.

Scriind echilibrul dinamic al forțelor din figura 2.13, rezultă următoarele ecuații de proiecție:

$$F_0 \cos \varphi_1 + m\theta^2 x_d - kx_d = 0, \quad \text{(pe direcția deplasării } x_d\text{)};$$

$$F_0 \sin \varphi_1 - c\theta x_d = 0, \quad \text{(pe direcția normală la deplasarea } x_d\text{)};$$

sau

$$F_0 \cos\varphi_1 = kx_d - m\theta^2 x_d, \quad F_0 \sin \varphi_1 = c\theta x_d,$$

de unde

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{c\theta}{k - m\theta^2} \quad \text{și} \quad F_0^2 = x_d^2 [(k - m\theta^2)^2 + c^2\theta^2].$$

Dacă în aceste expresii se fac înlocuirile:

$$k = m\omega^2 = \frac{c_{cr}\omega}{2} \quad \text{și} \quad \nu = c/c_{cr},$$

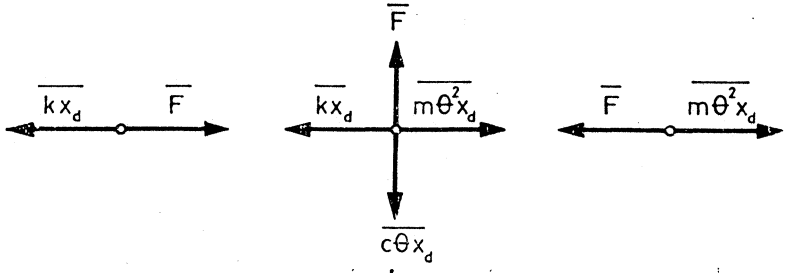


Fig. 2.14

se obține

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{2\nu\left(\frac{\theta}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \quad \text{și} \quad x_d = \mu^* \Delta_{ST},$$

adică tocmai rezultatele obținute anterior (2.61) și (2.68).

Din analiza echilibrului dinamic instantaneu mai rezultă următoarele observații:

a) În cazul în care $\theta \ll \omega$ ($\varphi_1 \to 0$), forțele de inerție și de amortizare sînt foarte mici, practic neglijabile astfel încît forța perturbatoare se va echilibra numai cu forța elastică (fig. 2.14, *a*).

b) În cazul în care $\theta \simeq \omega \left(\varphi_1 \to \frac{\pi}{2}\right)$, deci în rezonanță, forța de inerție se echilibrează cu forța elastică în timp ce forța perturbatoare se va echilibra cu forța de amortizare (fig. 2.14, *b*).

c) În cazul în care $\theta \gg \omega (\varphi_1 \to -\pi)$, forța de amortizare și forța elastică se reduc considerabil (practic devin egale cu zero), forța perturbatoare fiind în echilibru cu forța de inerție (fig. 2.14, *c*).

2.3. VIBRAȚII FORȚATE ÎN VECINĂTATEA REZONANȚEI. FENOMENUL DE BĂTĂI. IDENTIFICAREA CARACTERISTICILOR DINAMICE ALE SURSEI ȘI SISTEMULUI

Se vor analiza vibrațiile sistemului oscilant cu 1 GLD supus unei forțe perturbatoare armonice $F(t) = F_0 \sin \theta t$ în situația în care pulsația θ este foarte apropiată de pulsația proprie ω, dar nu egală, adică:

$$\theta - \omega = 2\psi; \quad \theta + \omega = 2\Phi; \quad \frac{\theta}{\omega} \simeq 1.$$

Se vor trata în mod separat cazurile în care se ține sau nu seama de influența amortizării.

2.3.1. Situația în care se neglijează influența amortizării

Această situație corespunde valorii $c = 0$ sau $\nu = 0$. Pentru stabilirea mișcării sistemului oscilant se pornește de la expresia (2.50),

$$x(t) = \mu\Delta_{ST}(\sin\theta t - \sin\omega t). \tag{2.74}$$

Deoarece

$$\sin\theta t - \sin\omega t = 2\cos\frac{\theta+\omega}{2}t\sin\frac{\theta-\omega}{2}t,$$

sau, luînd în considerație relațiile existente între pulsații se obține:

$$\sin\theta t - \sin\omega t = 2\cos\Phi t\sin\psi t,$$

iar expresia deplasării (2.74) devine:

$$x(t) = [2\mu\Delta_{ST}\sin\psi t]\cos\Phi t = A(t)\cos\Phi t, \tag{2.75}$$

unde, pentru FAD rezultă:

$$\mu = -\frac{\omega^2}{4\psi\Phi}.$$

Vibrația rezultantă este o mișcare armonică de pulsație Φ, avînd amplitudinile variabile în timp tot după o lege armonică cu pulsația ψ.

Reprezentarea grafică a mișcării, caracterizată de expresia (2.75), este dată în figura 2.15. Se constată că această variație a mișcării rezultante (2.74) reprezintă *o vibrație modulată armonic în frecvență*, raportul ψ/Φ fiind indicele de modulație.

Amplitudinile mișcării sînt cuprinse între zero și $2\mu\Delta_{ST}$ conform legii de variație a amplitudinii variabile $A(t)$. Acest mod special de vibrație este cunoscut sub denumirea de *fenomen de bătăi*. Totdeauna cînd amplitudinea atinge valoarea maximă ($2\mu\Delta_{ST}$) se consideră, că se produce o bătaie care în mod practic se manifestă printr-o majorare pronunțată a răspunsului sistemului.

Expresia (2.75) permite să se determine:

— perioada mișcării

$$T = \frac{2\pi}{\Phi} = \frac{4\pi}{\theta+\omega}; \tag{2.76}$$

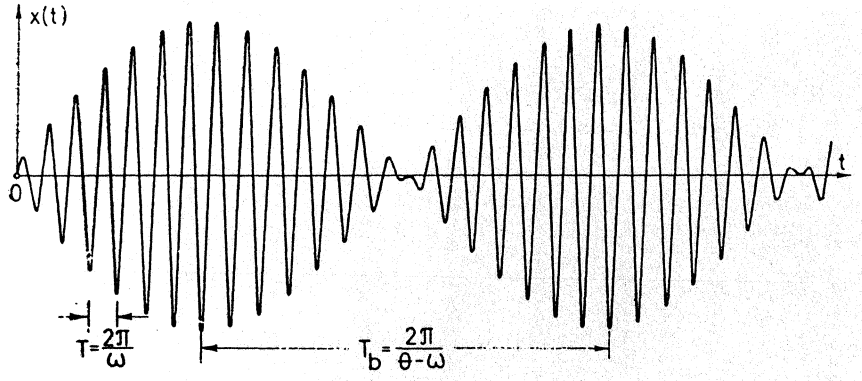


Fig. 2.15

— perioada bătăii

$$T_b = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\psi} = \frac{2\pi}{\theta-\omega}. \tag{2.77}$$

Prin perioada bătăii se înțelege timpul dintre două amplitudini consecutive egale și nu perioada mișcării armonice $A(t)$ care este $2T_b$.

Dacă o vibrogramă de forma celei desenate în figura 2.15 se obține pe cale experimentală, prin măsurarea perioadelor T și T_b efective se pot determina, aplicînd formulele (2.76) și (2.77), pulsația excitației sau sursei θ și pulsația proprie a sistemului oscilant ω.

În rezonanță, cînd

$$\psi \to 0, \quad \sin\psi t \simeq \psi t, \quad \theta \simeq \omega, \quad \mu = -\frac{\omega}{4\psi}$$

expresia (2.75) se transformă astfel:

$$x(t) = \left[-\Delta_{ST}\frac{\theta t}{2}\right]\cos\theta t = \left[-\Delta_{ST}\frac{\omega t}{2}\right]\cos\omega t = -\left[\frac{F_0}{2m\omega}t\right]\cos\omega t. \tag{2.78}$$

Relația (2.78), care este identică cu (2.56), dovedește că la rezonanță, amplitudinile mișcării cresc nelimitat în timp, tinzînd către infinit (fig. 2.16), după o lege de variație liniară.

2.3.2. Situația în care se consideră influența amortizării

Expresia deplasării cînd $\nu < 1$ (dar diferit de zero) se obține prin particularizarea relației (2.65), considerînd $\nu^2 \simeq 0$, iar $\theta/\omega \simeq 1$, adică:

$$x(t) = -\frac{\Delta_{ST}}{2\nu}(1 - e^{-\nu\omega t})\cos\omega t = -\frac{1}{2}\Delta_{ST}\omega\frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\cos\omega t, \tag{2.79}$$

sau

$$x(t) = -\frac{F_0}{2m\omega}\frac{1}{\beta}(1 - e^{-\beta t})\cos\omega t. \tag{2.80}$$

Reprezentarea grafică a expresiei (2.80) dată în figura 2.17 demonstrează că în rezonanță amplitudinile mișcării sînt limitate, iar valorile lor depind de gradul de amortizare. Dacă în relația (2.80) se consideră amortizare nulă ($\beta = 0$), se obține o nedeterminare; prin aplicarea regulii lui l'Hôspital se ridică nedeterminarea, iar în final se regăsește relația precedentă (2.78).

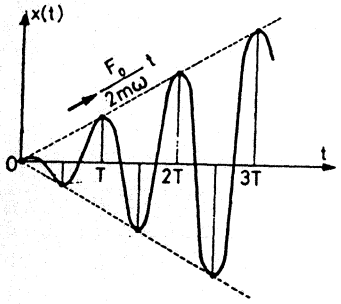


Fig. 2.16

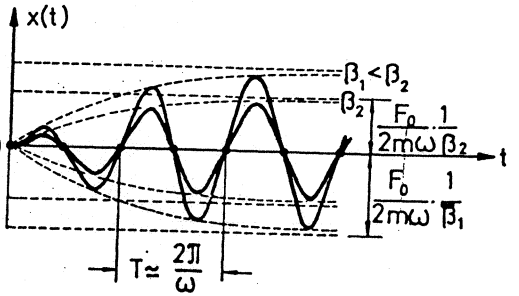


Fig. 2.17

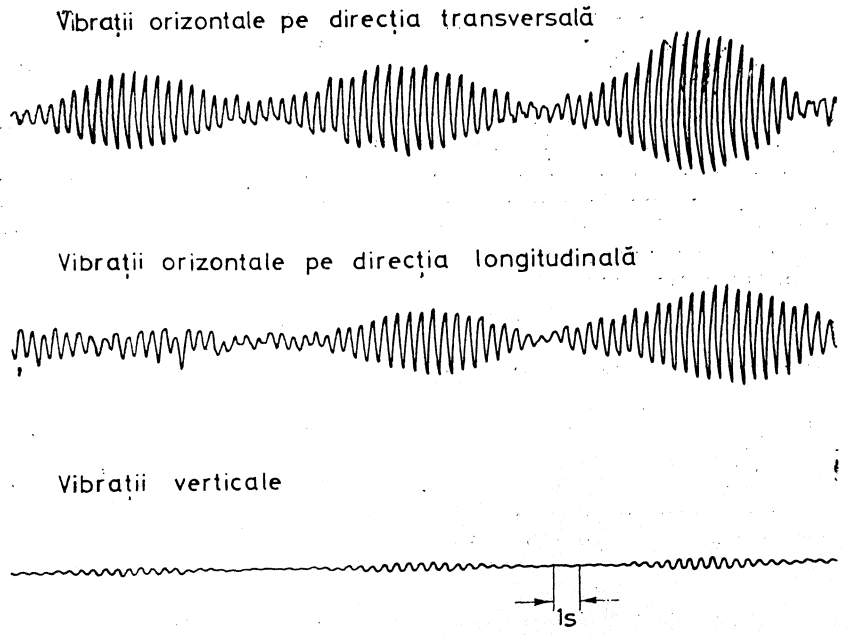


Fig. 2.18

În figura 2.18 este redată o vibrogramă tipică (calibrată) obținută prin înregistrări directe, la Întreprinderea textilă „Libertatea" Sibiu, unde au fost semnalate fenomene de bătăi.* În urma prelucrării datelor experimentale s-au obținut următoarele valori medii ale frecvențelor:

$$f\,(\text{structură}) = 2{,}203\ \text{Hz};\quad f\,(\text{excitație}) = 2{,}287\ \text{Hz}.\quad (\theta/\omega = 1{,}038)$$

Cercetarea fenomenului de bătăi pe cale experimentală este de mare interes practic, contribuind la *identificarea caracteristicilor dinamice*, atît ale sistemului, cît și ale sursei. Acest fapt permite să se decidă măsurile corespunzătoare în vederea evitării funcționării echipamentelor generatoare de vibrații în domeniul rezonanței. În acest sens, măsurile care se pot preconiza se referă la sursă (reglarea acționărilor) sau la sistem (modificarea rigidității structurii prin operații de consolidare a unor elemente).

Identificarea frecvențelor sistemului și sursei poate fi obținută prin prelucrarea unei înregistrări calibrate de tipul celor prezentate în figurile 2.17 și 2.18, pornind de la relațiile (2.76) și (2.77)

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{\theta+\omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2\pi}+\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{2}(f_\theta + f_\omega)$$

$$f_2 = \frac{1}{2T_b} = \frac{\theta-\omega}{4\pi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{2\pi}-\frac{\omega}{2\pi}\right) = \frac{1}{2}(f_\theta - f_\omega)$$

* Acad. Aurel A. Beleș M. Ifrim, S. Larionescu și N. Dimitriu: *Studiu teoretic și experimental asupra vibrațiilor de la Întreprinderea textilă „Libertatea" Sibiu* (1967).

din care rezultă *frecvența sistemului* f_ω și *frecvența sursei* f_θ din expresiile:

$$f_\omega = f_1 - f_2;\quad f_\theta = f_1 + f_2.$$

Aceste relații sînt fundamentale în prelucrarea și interpretarea fenomenului de bătăi care poate avea efecte defavorabile asupra structurilor de rezistență și uneori nocive din punct de vedere psiho-fiziologic asupra organismului uman. Chiar dacă în această situație răspunsul structurii se află în limitele admisibile fără să se producă deteriorări în elementele de rezistență sau echipamente, totuși sînt posibile fenomene de oboseală care pot avea influențe negative în timp asupra ansamblului sistem-sursă. De aceea, la proiectarea în regim dinamic a unei structuri, cunoscînd caracteristicile sursei, nu se admite funcționarea în vecinătatea rezonanței.

Practic, fenomenul de bătăi este periculos din punct de vedere structural și în cele mai multe cazuri nociv prin efectele psiho-fiziologice asupra oamenilor. De aceea, la proiectarea în regim dinamic a unei structuri se va evita cu strictețe funcționarea utilajelor în zona rezonanței.

2.4. DETERMINAREA GRADULUI DE AMORTIZARE VÎSCOASĂ UTILIZÎND CURBA FRECVENȚĂ-RĂSPUNS

În §2.1.2, s-a expus modul în care se determină pe cale experimentală gradul de amortizare al unui sistem oscilant prin intermediul decrementului logaritmic, prin înregistrarea răspunsului liber. Totuși, sînt situații cînd o structură, datorită rigidităților și dimensiunilor importante, nu poate fi pusă în vibrație liberă și în consecință, metoda decrementului devine inaplicabilă. Există însă posibilitatea de a stabili gradul de amortizare cu ajutorul unei curbe de răspuns (obținută pe cale experimentală) de tipul celor prezentate în figura 2.11. Se va arăta modul de calcul al fracțiunii din amortizarea critică ν pornind de la premisa că este cunoscută curba de frecvență — răspuns (fig. 2.19, *a*) obținută prin măsurători instrumentale.

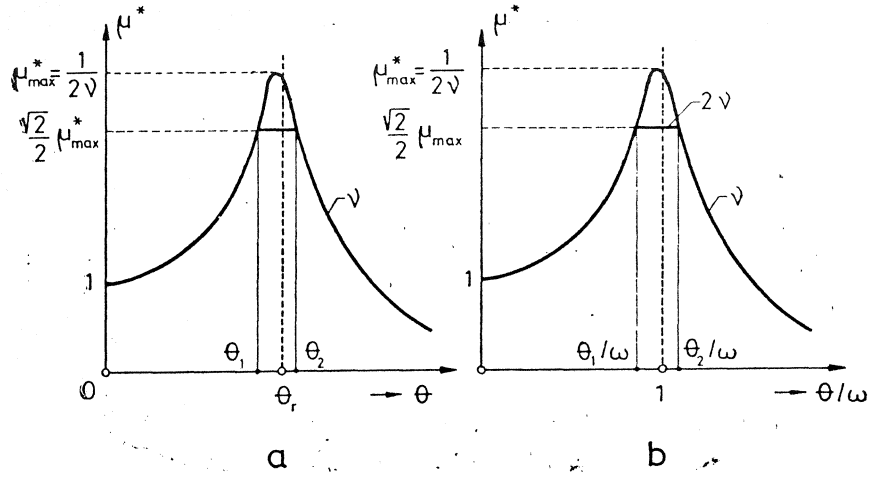


Fig. 2.19

Conform figurii 2.19, *a*, se consideră două valori ale pulsațiilor θ_1 și θ_2, în vecinătatea rezonanței corespunzătoare următorului FAD:

$$\mu^*_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\mu^*_{max},$$

sau

$$\mu^*_{1,2} = \frac{\sqrt{2}}{4\nu},$$

dacă se ține seama de relația (2.73).

Substituind $\mu^*_{1,2}$ în expresia coeficientului dinamic (2.62) și efectuînd operațiile necesare, rezultă ecuația:

$$\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^4 - 2(1 - 2\nu^2)\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 + (1 - 8\nu^2) = 0,$$

ale cărei soluții sînt:

$$\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 = (1 - 2\nu^2) \pm 2\nu\sqrt{1 + \nu^2}.$$

Dacă se neglijează ν^2 față de ν (ν fiind destul de mic în cazurile practice) se obține:

$$\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 = 1 \pm 2\nu, \quad \text{sau} \quad \theta^2 = \omega^2 \pm 2\nu\omega^2,$$

de unde

$$\theta_1^2 = \omega^2 - 2\nu\omega^2, \quad \theta_2^2 = \omega^2 + 2\nu\omega^2.$$

Efectuînd diferența

$$\theta_2^2 - \theta_1^2 = 4\nu\omega^2,$$

rezultă

$$4\nu = \frac{\theta_2^2 - \theta_1^2}{\omega^2} = \frac{(\theta_2 + \theta_1)(\theta_2 - \theta_1)}{\omega^2} \simeq 2\frac{\theta_2 - \theta_1}{\omega},$$

$$\left(\text{deoarece se poate considera } \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \simeq \omega\right),$$

și deci

$$\nu = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\omega}. \tag{2.81}$$

Pulsația proprie a sistemului oscilant fiind în rezonanță practic egală cu pulsația excitației ($\omega \simeq \theta_r$), relația (2.81) permite determinarea directă a fracțiunii din amortizarea critică:

$$\nu = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\theta_r} = \frac{\Delta\theta}{2\theta_r}.$$

Prin $\Delta\theta$ se înțelege „lățimea benzii de frecvență" corespunzătoare coeficientului dinamic $\frac{\sqrt{2}}{2}\mu^*_{max}$.

Relația (2.81) poate fi scrisă și în funcție de frecvențe, adică:

$$\nu = \frac{\Delta f}{2f_r}.$$

unde $\Delta f = f_1 - f_2$, iar $f_r = \theta_r/2\pi$ este frecvența de rezonanță.

Atît lățimea benzii de frecvență, cît și frecvența în rezonanță se determină direct din curba de răspuns.

Dacă se utilizează curba de răspuns în funcție de raportul pulsațiilor θ/ω (sau al frecvențelor corespunzătoare), fracțiunea din amortizarea critică va avea expresia:

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1}{\omega} - \frac{\theta_2}{\omega}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f_1}{f} - \frac{f_2}{f}\right), \tag{2.82}$$

de unde rezultă că lățimea benzii de frecvență relativă θ/ω este egală cu 2ν (v. fig. 2.19, *b*). În multe lucrări de specialitate, acest mod de a determina capacitatea de amortizare se numește și *metoda lățimii benzii de frecvență*.

2.5. VIBRAȚII PRODUSE DE FORȚE PERTURBATOARE ÎN ALTE SITUAȚII DE APLICARE

2.5.1. Acțiunea unui sistem de forțe armonice avînd aceeași pulsație

Se va considera la început cazul din figura 2.20, *a*, cînd asupra sistemului acționează în punctul *k* al suportului elastic forța perturbatoare $F_k(t) = F_{0,k}\sin\theta t$, unde θ reprezintă pulsația, iar $F_{0,k}$ amplitudinea excitației.

Răspunsul staționar al sistemului, exprimat prin deplasări instantanee, se determină fie cu formula (2.52), fie cu formula (2.66), adică

$$x_j(t) = \mu\Delta_{jk}\sin\theta t, \quad (\nu = 0) \tag{2.83}$$

și

$$x_j(t) = \mu^*\Delta_{jk}\sin(\theta t - \varphi_1), \quad (\nu \neq 0) \tag{2.84}$$

unde

$\Delta_{jk} = F_{0,k}\,\delta_{jk}$ este deplasarea pe direcția GLD *j* produsă de acțiunea statică a valorii de amplitudine $F_{0,k}$ a excitației;

δ_{jk} — deplasarea pe direcția GLD *j* cînd pe direcția forței perturbatoare $F_k(t)$ se aplică o forță egală cu unitatea (fig. 2.20).

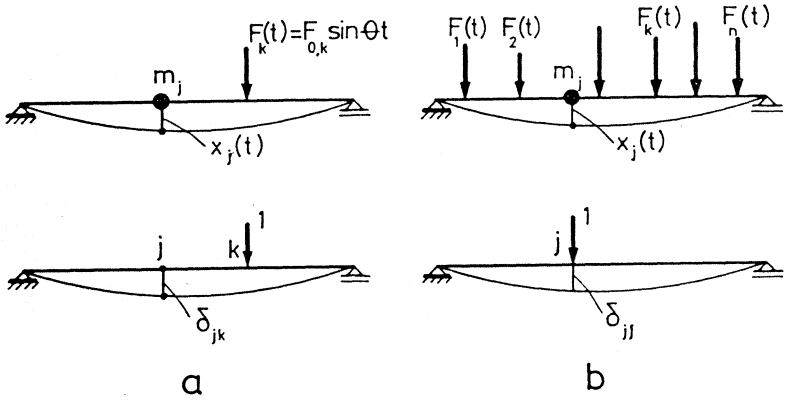


Fig. 2.20

Valorile maxime ale răspunsului exprimat în deplasări vor fi:

$$\left.\begin{aligned} x_{j,k} &= \mu\Delta_{jk}, \quad (\nu = 0) \\ x_{j,k} &= \mu^*\Delta_{jk}, \quad (\nu \neq 0) \end{aligned}\right\} \tag{2.85}$$

În cazul general, cînd asupra modelului dinamic se aplică un sistem de acțiuni armonice $F_k(t) = F_{0,k} \sin \theta t$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ de aceeași pulsație, evaluarea răspunsului staționar, exprimat în deplasări instantanee, se bazează pe aplicarea simultană a principiilor proporționalității și superpoziției, specifice dinamicii liniare. Se vor obține astfel expresiile:

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^{n} \mu\Delta_{jk} \sin \theta t = \mu\Delta_{j,F} \sin \theta t, \quad (\nu = 0) \tag{2.86}$$

și

$$x_j(t) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*\Delta_{jk} \sin \theta t = \mu^*\Delta_{j,F} \sin \theta t, \quad (\nu \neq 0) \tag{2.87}$$

în care

$$\Delta_{j,F} = \sum_{k=1}^{n} \Delta_{jk} = \sum_{k=1}^{n} F_{0,k}\delta_{jk}$$

reprezintă deplasarea totală pe direcția GLD j produsă de acțiunea simultană a valorilor de amplitudine $F_{0,k}$ $(k = 1, 2, \ldots n)$, aplicate static pe direcțiile forțelor perturbatoare $F_k(t)$.

Răspunsul maxim, exprimat în deplasări, pe direcția GLD rezultă

$$\left.\begin{aligned} x_{j,F} &= \mu\Delta_{j,F}, \quad (\nu = 0) \\ x_{j,F} &= \mu^*\Delta_{j,F}, \quad (\nu \neq 0) \end{aligned}\right\} \tag{2.88}$$

și

aceste formule fiind similare cu (2.53) și (2.68).

Datorită mișcării sistemului oscilant, generată de acțiunea forțelor perturbatoare $F_k(t)$, pe direcția GLD j se vor produce accelerații $\ddot{x}_k(t)$. În consecință, răspunsul staționar, exprimat în forțe dinamice pe direcția GLD va fi de natura unei forțe de inerție de forma:

$$F_{j,a}(t) = J_j(t) = -m_j\ddot{x}_j(t) = m_j\theta^2\mu\Delta_{j,F} \sin \theta t \quad (\nu = 0)$$

sau

$$F_{j,a}(t) = J_j(t) = m_j\theta^2\mu^*\Delta_{j,F} \sin \theta t \quad (\nu \neq 0)$$

Răspunsul maxim, în forțe dinamice (de inerție), rezultă

$$\left.\begin{aligned} F_{j,a} &= J_j = m_j\theta^2\mu\Delta_{j,F} \quad (\nu = 0) \\ F_{j,a} &= J_j = m_j\theta^2\mu^*\Delta_{j,F} \quad (\nu \neq 0) \end{aligned}\right\} \tag{2.89}$$

2.5.2. Acțiunea a două sau mai multe forțe armonice cu pulsații diferite

În baza rezultatelor anterioare, se poate determina răspunsul staționar în deplasare, al unui sistem oscilant acționat de două forțe armonice ale căror pulsații sînt diferite (fig. 2.21), prin aplicarea celor două principii ale dinamicii liniare:

$$F_j(t) = F_{0,j} \sin \theta_j t,$$
$$F_k(t) = F_{0,k} \sin \theta_k t.$$

Pentru variația deplasării în timp rezultă următoarele expresii:

$$x_1(t) = \mu_j\Delta_{1j} \sin \theta_j t + \mu_k\Delta_{1k} \sin \theta_k t \quad (\nu = 0) \tag{2.90}$$

și

$$x_1(t) = \mu_j^*\Delta_{1j} \sin \theta_j t + \mu_k^*\Delta_{1k} \sin \theta_k t \quad (\nu \neq 0) \tag{2.91}$$

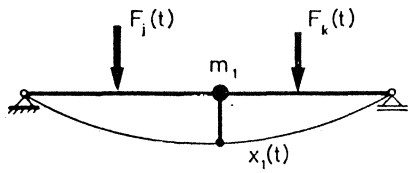


Fig. 2.21

unde

$$\Delta_{1j} = F_{0,j}\delta_{1,j}, \quad \Delta_{1k} = F_{0,k}\delta_{1k},$$

iar coeficienții dinamici FAD μ_j, μ_j^*, și μ_k, μ_k^* se determină în funcție de rapoartele θ_j/ω, respectiv θ_k/ω. Este evident că în acest caz există două posibilități de rezonanță, și anume pentru $\theta_j = \omega$ și $\theta_k = \omega$. Rezultatele obținute pot fi în mod simplu extinse și pentru sisteme de forțe armonice cu perioade diferite, deplasările exprimîndu-se prin sume, ca rezultat al superpoziției efectelor:

$$x_1(t) = \sum_k \mu_k\Delta_{1k} \sin \theta_k t \quad \text{și} \quad x_1(t) = \sum_k \mu_k^*\Delta_{1k} \sin \theta_k t.$$

Forțele dinamice, de natura unor forțe de inerție, se determină prin procedeul aplicat anterior. Valorile maxime depind de raportul dintre pulsațiile forțelor și de modul în care se suprapun cele două funcții armonice. În general deplasarea rezultantă este oarecare. Dacă raportul pulsațiilor celor două forțe este un număr rațional mișcarea rezultantă este periodică, iar dacă sînt egale devine armonică, ca în cazul precedent.

2.5.3. Acțiunea bruscă a unei forțe constante

Făcînd abstracție de prezența amortizării $(\nu = 0)$ se admite că asupra masei unui sistem oscilant cu un singur grad de libertate acționează forța

$$F(t) = F_0 \quad (t \geq t_0), \tag{2.92}$$

reprezentată în figura 2.22.

Ecuația de mișcare rezultă prin particularizarea ecuației (2.6)

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m}. \tag{2.93}$$

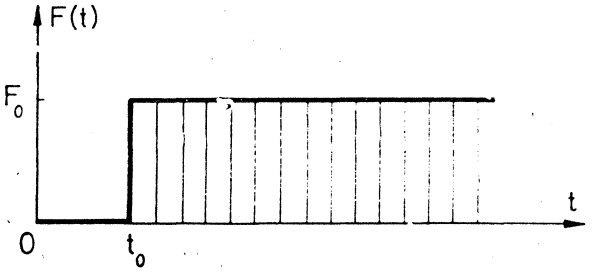


Fig. 2.22

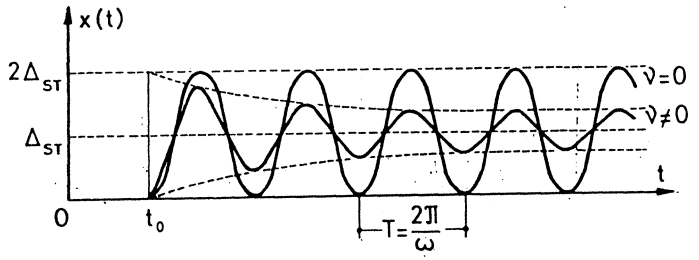


Fig. 2.23

Răspunsul liber (soluția ecuației omogene) $x_L(t)$ este deja cunoscut din relația (2.11), iar răspunsul forțat (soluția particulară) $x_F(t)$ rezultă:

$$x_F(t) = \frac{F_0}{m\omega^2} = \frac{F_0}{k} = \Delta_{ST}, \quad \left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right),$$

încît răspunsul total (soluția generală) va fi:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \frac{F_0}{k}.$$

Forța F_0 fiind aplicată la timpul $t = t_0$, în baza condițiilor inițiale $x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$, se obțin pentru cele două constante expresiile:

$$C_1 = -\frac{F_0}{k} \sin \omega t_0 = -\Delta_{ST} \sin \omega t_0,$$

$$C_2 = -\frac{F_0}{k} \cos \omega t_0 = -\Delta_{ST} \cos \omega t_0,$$

și deci, soluția generală devine:

$$x(t) = \Delta_{ST}(1 - \sin \omega t \sin \omega t_0 - \cos \omega t \cos \omega t_0),$$

sau

$$x(t) = \Delta_{ST}[1 - \cos \omega(t - t_0)] = \mu(t)\Delta_{ST}, \qquad (2.94)$$

în care $\mu(t)$ este coeficientul dinamic funcție de timp, specific acestei acțiuni. Se observă din reprezentarea grafică din figura 2.23 că $x(t)$ variază între zero și $2\Delta_{ST}$, iar $\mu(t)$ între 0 și 2, deci:

$$x_{max} = 2\Delta_{ST}, \quad \mu_{max} = 2.$$

Tot în figura 2.23 este arătat modul în care variază $x(t)$ dacă se ține seama de prezența amortizării ($\nu \neq 0$).

2.5.4. Aplicarea bruscă a unei forțe care produce un impuls dreptunghiular finit

Se consideră că forța care se aplică asupra masei sistemului cu 1GLD fără amortizare este de tipul unui impuls finit în intervalul de timp $0 - t_0$ (fig. 2.24, *a*), deci:

$$F(t) = F_0 \quad (0 \leqslant t < t_0). \qquad (2.95)$$

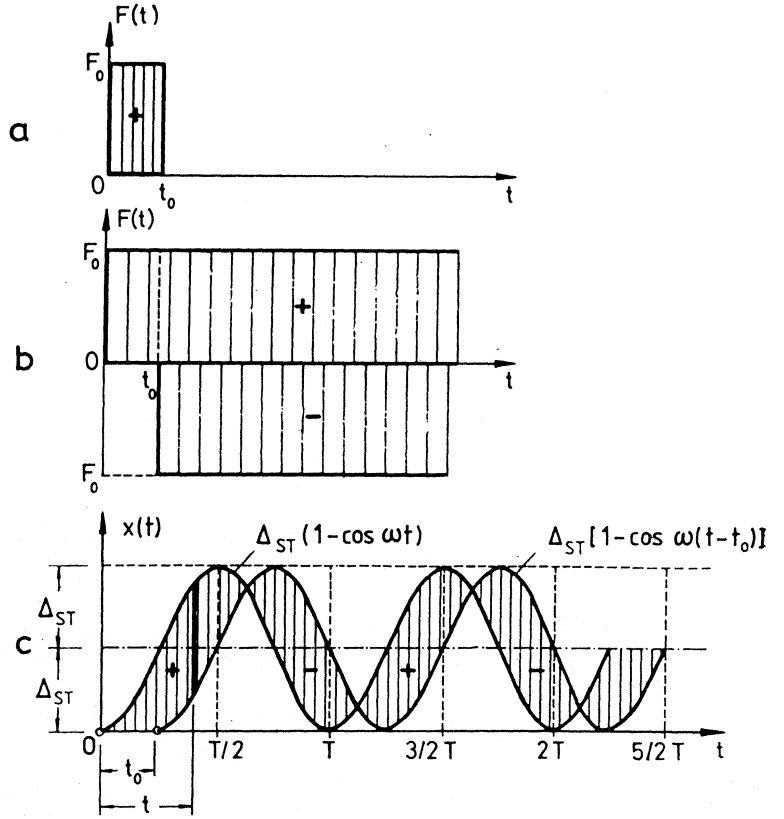


Fig. 2.24

Expresia deplasării în intervalul $0 - t_0$ se obține utilizînd rezultatul obținut anterior (2.94)

$$x(t) = \Delta_{ST}(1 - \cos \omega t) \quad (0 \leqslant t < t_0). \qquad (2.96)$$

În momentul îndepărtării forței $F_0(t \geqslant t_0)$ sistemul continuă să oscileze. Ecuația mișcării se obține simplu, admițînd că impulsul din figura 2.24, *a* rezultă prin suprapunerea celor două situații de încărcare date în figura 2.24, *b*. În felul acesta problema s-a redus la cazul de la §2.5.3, astfel încît deplasarea în intervalul $t > t_0$ va fi:

$$x(t) = \Delta_{ST}(1 - \cos \omega t) - \Delta_{ST}[1 - \cos \omega(t - t_0)],$$

sau

$$x(t) = \Delta_{ST}[\cos \omega(t - t_0) - \cos \omega t], \quad (t > t_0). \qquad (2.97)$$

Reprezentarea grafică a răspunsului dinamic exprimat în deplasări $x(t)$ este dată în figura 2.24, *c*. În intervalul $t > t_0$ mișcarea are caracterul unei vibrații libere cu condițiile inițiale scrise la $t = t_0$.

2.5.5. Aplicarea bruscă a unei forțe care produce un impuls triunghiular finit

Impulsul considerat și aplicat aceluiași sistem dinamic variază liniar de la zero, pentru $t = 0$, și atinge valoarea maximă F_0, la $t = t_0$, scăzînd apoi brusc la zero, deci:

$$F(t) = F_0 \frac{t}{t_0} \quad (0 \leqslant t < t_0) \tag{2.98}$$

avînd valoare finită în intervalul $0—t_0$ (fig. 2.25).

În intervalul $0—t_0$, ecuația mișcării (neglijînd amortizarea) rezultă direct din (2.6):

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0 t}{m t_0},$$

avînd soluția particulară (răspunsul forțat) de forma:

$$x_F(t) = \frac{F_0 t}{m\omega^2 t_0} = \frac{F_0}{k}\frac{t}{t_0} = \Delta_{ST}\frac{t}{t_0}.$$

Soluția generală (răspunsul total) devine:

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t + \Delta_{ST}\frac{t}{t_0}.$$

Introducînd condițiile inițiale

$$t = 0, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0,$$

se obțin constantele:

$$C_1 = -\frac{\Delta_{ST}}{\omega t_0}, \quad C_2 = 0,$$

și deci soluția generală:

$$x(t) = -\frac{\Delta_{ST}}{\omega t_0}\sin \omega t + \Delta_{ST}\frac{t}{t_0},$$

sau

$$x(t) = \frac{\Delta_{ST}}{t_0}\left[t - \frac{\sin \omega t}{\omega}\right]. \tag{2.99}$$

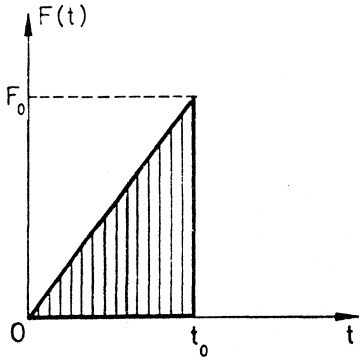


Fig. 2.25

La timpul $t = t_0$, atunci cînd forța devine nulă, expresiile deplasării și vitezei vor fi:

$$x(t_0) = \frac{\Delta_{ST}}{t_0}\left[t_0 - \frac{\sin \omega t_0}{\omega}\right], \tag{2.100}$$

$$\dot{x}(t_0) = \frac{\Delta_{ST}}{t_0}[1 - \cos \omega t_0)]. \tag{2.101}$$

Deplasarea (2.100) și viteza (2.101), la $t = t_0$ (cînd impulsul a încetat) devin condiții inițiale pentru vibrațiile libere ale sistemului oscilant, care se produc în continuare fără amortizare.

2.5.6. Acțiunea unei forțe periodice asupra masei sistemului oscilant

Dacă asupra sistemului acționează pe direcția GLD o forță perturbatoare periodică $F(t)$ de perioadă T', aceasta se poate dezvolta într-o serie Fourier așa cum s-a arătat în § 1.7.5. Funcția acțiunii $F(t)$ se poate reprezenta prin următoarea serie Fourier:

$$F(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta t + b_n \sin n\theta t), \tag{2.102}$$

unde $\theta = 2\pi/T'$, iar n este numărul armonicilor în care este descompusă funcția $F(t)$.

Deoarece ecuația diferențială a mișcării este liniară, se poate aplica principiul superpoziției pentru determinarea răspunsului staționar (permanent).

În absența amortizării ($\nu = 0$), deplasarea dinamică se obține pornind de la relația (2.52):

$$x(t) = \frac{F_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \cos n\theta t + b_n \sin n\theta t}{k\left[1 - \left(\frac{n\theta}{\omega}\right)^2\right]}, \quad (\nu = 0)$$

sau

$$x(t) = \frac{1}{k}\left[F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(a_n \cos n\theta t + b_n \sin n\theta t)\right]. \tag{2.103}$$

În cazul prezenței amortizării ($\nu \neq 0$), deplasarea dinamică se obține din relația (2.66):

$$x(t) = \frac{F_0}{k} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \cos(n\theta t - \varphi_n) + b_n \sin(n\theta t - \varphi_n)}{k\sqrt{\left[1 - \left(\frac{n\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2\left(\frac{n\theta}{\omega}\right)^2}}, \quad (\nu \neq 0)$$

sau

$$x(t) = \frac{1}{k}\left[F_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n^*[a_n \cos(n\theta t - \varphi_n) + b_n \sin(n\theta t - \varphi_n)]\right]. \tag{2.104}$$

S-au introdus notațiile:

$$\mu_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{n\theta}{\omega}\right)^2}, \tag{2.105}$$

$$\mu_n^* = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{n\theta}{\omega}\right)^2\right] + 4\nu^2\left(\frac{n\theta}{\omega}\right)^2}}, \tag{2.106}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{2\nu\frac{n\theta}{\omega}}{1 - \left(\frac{n\theta}{\omega}\right)^2}. \tag{2.107}$$

Pentru funcțiile periodice cele mai des întîlnite în dinamica structurilor în tabelul 1.2 se dau dezvoltările în serii Fourier.

2.6. FACTOR DE TRANSMISIBILITATE

În scopul de a reduce sau a limita efectele dinamice transmise structurilor de susținere a echipamentelor generatoare de acțiuni variabile în timp, acestea se „izolează" prin intermediul unor elemente artificiale de atenuare (arcuri, plută, cauciuc, neopren etc.). Problema esențială constă în a diminua pe cît este posibil transmiterea vibrațiilor și deci a forțelor dinamice la baza fixă de rezemare.

Factorul de transmisibilitate sau *transmisibilitatea* TR reprezintă raportul dintre forța maximă transmisă bazei de rezemare (considerată perfect rigidă) și amplitudinea forței perturbatoare exterioară $F_0 \sin \theta t$, aplicată sistemului. În continuare se va analiza cazul general în care se ia în considerare și influența amortizării, adică $\nu \neq 0$.

Conform figurii 2.26, forța transmisă fundației va avea expresia:

$$F_T(t) = kx(t) + c\dot{x}(t). \tag{2.108}$$

Dacă se studiază numai regimul staționar (permanent) de funcționare al sursei, care prezintă interes practic, expresia (2.108) se poate explicita ținînd seama de expresia (2.66), adică:

$$x(t) = \mu^* \Delta_{ST} \sin(\theta t - \varphi_1),$$

rezultînd variația vitezei:

$$\dot{x}(t) = \mu^* \Delta_{ST} \theta \cos(\theta t - \varphi_1).$$

Înlocuind în expresia (2.108) aceste relații se obține:

$$F_T(t) = \mu^* \Delta_{ST} k \sin(\theta t - \varphi_1) + \mu^* \Delta_{ST} c\theta \cos(\theta t - \varphi_1),$$

sau

$$F_T(t) = |F_T| \sin(\theta t - \varphi_1 + \alpha),$$

unde $|F_T|$ este valoarea de amplitudine a forței transmise fundației

$$|F_T| = \sqrt{(\mu^* \Delta_{ST} k)^2 + (\mu^* \Delta_{ST} c\theta)^2} = \mu^* \Delta_{ST} k \sqrt{1 + \left(\frac{c\theta}{k}\right)^2}.$$

Întrucît

$$\Delta_{ST} k = \frac{F_0}{k} k = F_0, \quad \frac{c}{c_{cr}} = \nu, \quad \frac{c}{k} = \frac{\nu 2 m\omega}{m\omega^2} = \frac{2\nu}{\omega},$$

rezultă

$$|F_T| = \mu^* F_0 \sqrt{1 + 4\nu^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \tag{2.109}$$

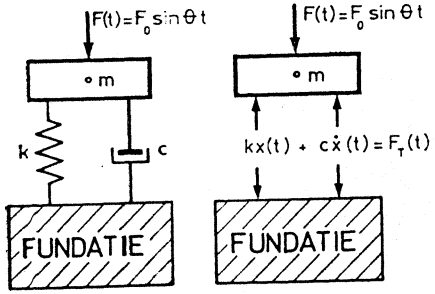


Fig. 2.26

Conform definiției, *transmisibilitatea forței* TR va fi:

$$TR = \frac{|F_T|}{F_0} = \mu^* \sqrt{1 + 4\nu^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 + 4\nu^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}. \tag{2.110}$$

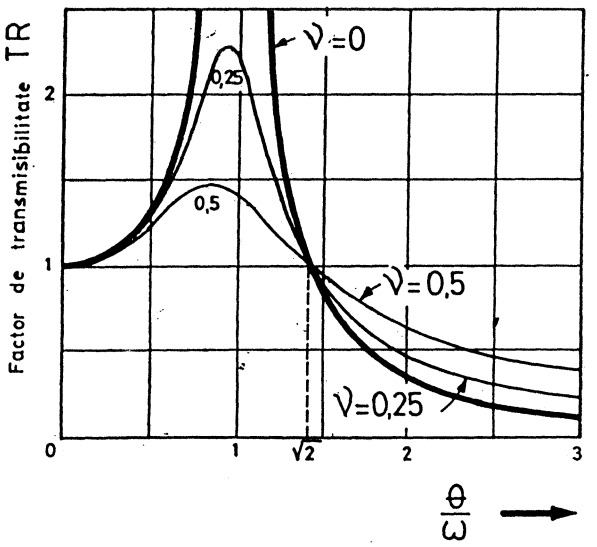


Fig. 2.27

Formula (2.110) poate fi particularizată pentru cazul în care se neglijează amortizarea ($\nu = 0$), obținîndu-se:

$$TR = \mu = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}. \tag{2.111}$$

Acest ultim caz nu interesează din punctul de vedere al izolării vibrațiilor întrucît nu este pusă în evidență amortizarea, element esențial al izolării.

În figura 2.27 este reprezentată grafic variația factorului de transmisibilitate în funcție de raportul θ/ω. Din analiza acestui grafic se constată că pentru $\theta/\omega > \sqrt{2}$, transmisibilitatea este subunitară, astfel încît forța transmisă este mai mică decît forța pertubatoare. În același timp prezența amortizării are un rol defavorabil. În intervalul $0 \leqslant \theta/\omega < \sqrt{2}$, forța transmisă fundației este mai mare decît forța perturbatoare, astfel încît funcționarea în această zonă este dezavantajoasă, deși influența amortizării este favorabilă. În rezonanță ($\theta \simeq \omega$) transmisibilitatea are valori limitate care depind direct de gradul de amortizare.

Montajele de amortizare realizate pe resoarte flexibile fac ca funcționarea să se situeze în zona mai favorabilă $\theta/\omega > 2$, fiind astfel justificată în izolarea fundațiilor de mașini, acordarea înaltă a sursei sau subacordarea sistemului.

În concluzie:

— dacă $\theta/\omega \leqslant \sqrt{2}$, $TR \geqslant 1$;

— dacă $\theta/\omega \simeq 1$, $TR = \frac{\sqrt{1 + 4\nu^2}}{2\nu}$;

— dacă $\theta/\omega > \sqrt{2}$, $TR < 1$.

Studiul transmisibilității mișcării și în general al efectelor dinamice exprimate în diverse mărimi specifice, precum și problema izolării ansamblului

sursă-sistem, este de importanță practică considerabilă mai ales în cazul proiectării structurilor independente (fundații în cadre sau fundații bloc) care susțin agregate și instalații industriale, cum ar fi: mașini-unelte, motoare electrice de acționare, turbine, pompe, turbocompresoare, electrogeneratoare etc.

2.7. VIBRAȚII FORȚATE PRODUSE DE ACȚIUNEA UNEI MIȘCĂRI ARMONICE APLICATE INDIRECT ASUPRA SISTEMULUI DINAMIC. RĂSPUNS FORȚAT

Există numeroase situații cînd acțiunea dinamică nu se aplică direct asupra sistemului dinamic, ci se manifestă printr-o mișcare $u(t)$ care acționează indirect asupra bazei sale de rezemare, considerată în general perfect rigidă. Asemenea perturbații, exprimate în cantități cinematice (deplasări, viteze sau accelerații), sînt generate de surse din exteriorul sistemului dinamic și se transmit prin teren (mediul de propagare) ca efecte secundare ale altor evenimente dinamice. Aceste tipuri de perturbații pot fi artificiale (industriale) sau naturale (seismice).

Așa cum s-a arătat la începutul acestui capitol, acțiunilor, care se manifestă indirect asupra structurilor, le corespund totdeauna caracteristici de răspuns exprimate în mărimi relative.

Se va analiza în continuare cazul particular al unei perturbații armonice, aplicată indirect unui sistem cu 1 GLD, caracterizată de funcția $u(t) = u_0 \sin \theta t$, în care u_0 este amplitudinea, iar θ — pulsația perturbației (fig. 2.1, *b*). În partea a II-a a lucrării se va studia efectul acțiunilor indirecte produse de mișcarea seismică, în care caz funcția $u(t)$ este oarecare.

În cazul acțiunii indirecte armonice, *răspunsul dinamic exprimat în deplasări instantanee relative* $x(t)$ se determină prin adaptarea la situațiile tratate în § 2.2.

Ecuația generală a mișcării sistemului dinamic are forma (2.8):

$$\ddot{x}(t) + 2\beta\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -\ddot{u}(t) = +u_0\theta^2 \sin \theta t, \tag{2.112}$$

cu mențiunea că $x(t)$ reprezintă de această dată *deplasarea relativă* a sistemului oscilant raportată la mișcarea de transport $u(t)$.

Se constată că ecuațiile (2.112) și (2.57) sînt identice dacă se consideră egalitatea $u_0\theta^2 = F_0/m$. Ținînd seama de această observație, soluția ecuației (2.112) numai în regim staționar (permanent) este analoagă cu soluția (2.66), rezultînd pentru *deplasarea relativă* $x(t)$ expresia:

$$x(t) = \mu^* \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 u_0 \sin(\theta t - \varphi_1),$$

deoarece, Δ_{ST} din expresia (2.66) se substituie astfel:

$$\Delta_{ST} = \frac{F_0}{k} = \frac{u_0\theta^2 m}{k} = \frac{u_0\theta^2 m}{m\omega^2} = u_0\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2.$$

Expresia deplasării relative mai poate fi scrisă în următoarea formă compactă:

$$x(t) = \bar{\mu}^* u_0 \sin(\theta t - \varphi_1), \tag{2.113}$$

în cazul considerării influenței amortizării, și

$$x(t) = \bar{\mu} u_0 \sin \theta t, \tag{2.114}$$

în cazul cînd se face abstracție de amortizare.

Coeficienții dinamici sau *factorii de amplificare dinamică* (FAD) $\bar{\mu}$ și $\bar{\mu}^*$ care intervin în expresiile (2.114) și (2.113) sînt următorii:

$$\bar{\mu} = \frac{\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}, \tag{2.115}$$

$$\bar{\mu}^* = \frac{\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}. \tag{2.116}$$

Variația coeficienților $\bar{\mu}$ și $\bar{\mu}^*$ este prezentată în graficele din figurile 2.28, respectiv 2.29, în funcție de raportul pulsațiilor θ/ω, iar variația fazei se obține cu formula (2.61), fiind deci aceeași cu reprezentarea grafică din figura 2.12.

Concluzii asupra variației răspunsului staționar exprimat în deplasări relative se deduc direct din aspectul curbelor date în figurile 2.28 și 2.29. Analog cazurilor precedente, mărimea răspunsului depinde de raportul pulsațiilor θ/ω și de gradul de amortizare al sistemului ν. Din expresia (2.116) rezultă următoarele situații:

— cînd $\theta \ll \omega$, $\quad \bar{\mu}^*_{min} \to 0$;

— cînd $\theta \simeq \omega$, $\quad \bar{\mu}^*_{max} \simeq \frac{1}{2\nu}$;

— cînd $\theta \gg \omega$, $\quad \bar{\mu}^*_{limită} \to 1$.

Aspectele teoretice expuse aici stau la baza construcției și funcționării instrumentelor seismice, care din punct de vedere dinamic reprezintă sisteme oscilante. Cînd un asemenea instrument lucrează în zona $\theta \ll \omega$, răspunsul acestuia va fi proporțional cu accelerația absolută a mișcării terenului. Instrumentul se numește *accelerometru*. Dacă instrumentul funcționează în zona $\theta \gg \omega$, răspunsul înregistrat este proporțional cu deplasarea mișcării terenului. Un astfel de instrument se numește *seismometru*.

2.8. VIBRAȚII FORȚATE PRODUSE DE ACȚIUNI OARECARE

2.8.1. Acțiunea unei forțe oarecare $F(t)$ aplicată direct asupra sistemului oscilant

Dacă se presupune că asupra masei sistemului cu 1 GLD acționează forța perturbatoare oarecare $F(t)$ (care nu este armonică sau periodică), ecuația de mișcare va fi de tipul expresiei (2.3), adică:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t). \tag{2.117}$$

Pentru determinarea răspunsului dinamic permanent în raport cu deplasarea instantanee a sistemului, se rezolvă ecuația (2.117) aplicînd transformata Laplace în maniera arătată în § 1.8.

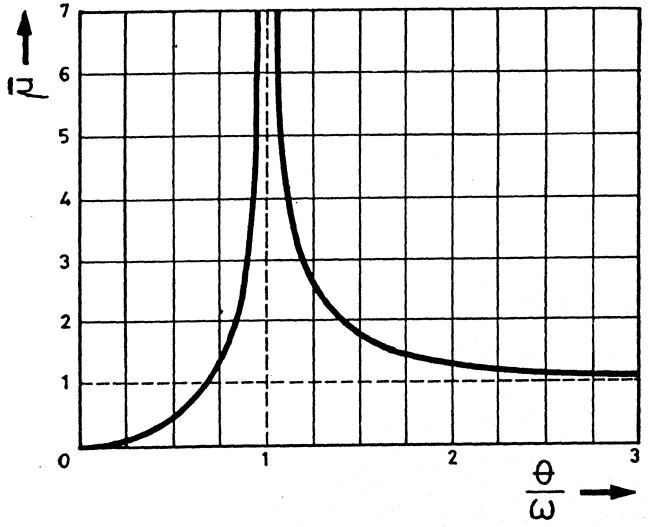


Fig. 2.28

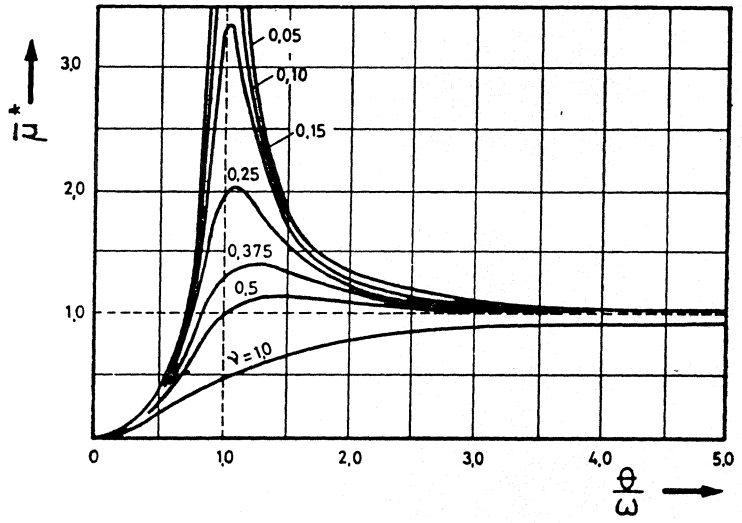


Fig. 2.29

Prin aplicarea transformatei Laplace ecuației (2.117) se obține ecuația operațională:

$$m[s^2X(s) - sx(0) - \dot{x}(0)] + c[sX(s) - x(0)] + kX(s) = F(s). \quad (2.118)$$

Din ecuația algebrică (2.118) se determină transformata Laplace a răspunsului:

$$X(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k}F(s) + \frac{ms + c}{ms^2 + cs + k}x(0) + \frac{m}{ms^2 + cs + k}\dot{x}(0).$$

Deoarece se analizează numai răspunsul permanent (considerînd că vibrațiile libere au un caracter tranzitoriu) condițiile inițiale vor fi

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0,$$

și deci

$$X(s) = \frac{F(s)}{ms^2 + cs + k},$$

unde

$$F(s) = \mathcal{L}[F(t)] = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt,$$

reprezintă transformata Laplace a excitației, iar

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^\infty e^{-st}x(t)\,dt,$$

transformata Laplace a răspunsului.

Funcția de transfer (identică cu admitanța sistemului), conform definiției (§ 1.9), va rezulta:

$$H(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + cs + k},$$

sau

$$H(s) = \frac{1}{m(s^2 + 2\omega\nu s + \omega^2)}, \quad (2.119)$$

întrucît

$$\frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega}, \quad c = 2m\omega\nu \quad \text{și} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Pentru a determina răspunsul sistemului în domeniul timp, urmează să se obțină mai întîi răspunsul impulsului $h(t)$ care este egal cu transformata inversă Laplace a funcției de transfer $H(s)$, conform relației (1.49):

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]. \quad (2.120)$$

Transformata inversă a funcției (2.119) se obține folosind tabelul de corespondență 1.4. Pentru a putea utiliza acest tabel este necesar ca expresia (2.119) să fie adusă la forma:

$$H(s) = \frac{1}{m}\frac{1}{(s + \nu\omega)^2 + \omega^2(1 - \nu^2)} = \frac{1}{m\omega^*}\frac{\omega^*}{(s + \nu\omega)^2 + \omega^{*2}}, \quad (2.121)$$

unde ω^* este pulsația proprie a sistemului ținînd seama de influența amortizării (formula 2.34).

În tabelul 1.4, poziția *16*, se găsește inversa funcției în (s) astfel încît răspunsul impulsului rezultă

$$h(t) = \frac{1}{m\omega^*} e^{-\nu\omega t} \sin \omega^* t. \tag{2.122}$$

Utilizînd integrala de convoluție (§ 1.11), se obține expresia *răspunsului forțat și permanent* în domeniul timpului, pentru sistemul cu amortizare:

$$x(t) = \frac{1}{m\omega^*} \int_0^t F(\tau)\, e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin \omega^*(t-\tau)\, d\tau, \tag{2.123}$$

iar dacă se neglijează amortizarea

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t-\tau)\, d\tau. \tag{2.124}$$

Integralele care intervin în expresiile (2.123) și (2.124) sînt cunoscute sub denumirea de integralele lui Duhamel.

Aceleași rezultate se obțin dacă se consideră funcția de excitație $F(t)$ constituită dintr-o succesiune de impulsuri elementare $F(\tau)\, d\tau$. Răspunsul total rezultă prin superpoziția tuturor răspunsurilor la impulsurile elementare.

Dacă în expresiile (2.123) și (2.124) se consideră forța armonică $F(t) = F_0 \sin \theta t$, se regăsesc relațiile (2.52) și (2.66).

În cazul în care interesează răspunsul tranzitoriu produs de forța $F(t)$ este necesar să se ia în considerație și răspunsul liber.

Ținînd seama de condițiile inițiale (2.26) rezultă:

- pentru sistemul oscilant cu amortizare:

$$x(t) = e^{-\nu\omega t}\left[\frac{v_0 + \nu\omega x_0}{\omega^*} \sin \omega^* t + x_0 \cos \omega^* t\right] + \frac{1}{m\omega^*} \int_0^t F(\tau)\, e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin \omega^*(t-\tau)\, d\tau. \tag{2.125}$$

Prin transformarea și gruparea termenilor acestei expresii se ajunge la:

$$x(t) = e^{-\nu\omega t}\left\{\left[\frac{v_0 + \nu\omega x_0}{\omega^*} + \frac{1}{m\omega^*} \int_0^t F(\tau)\, e^{\nu\omega\tau} \cos \omega^* \tau\, d\tau\right] \sin \omega^* t + \left[x_0 - \frac{1}{m\omega^*} \int_0^t F(\tau)\, e^{\nu\omega t} \sin \omega^* \tau\, d\tau\right] \cos \omega^* t\right\}, \tag{2.126}$$

- pentru sistemul fără amortizare

$$x(t) = \left[\frac{v_0}{\omega} + \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \cos \omega\tau\, d\tau\right] \sin \omega t + \left[x_0 - \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(\tau) \sin \omega\tau\, d\tau\right] \cos \omega t. \tag{2.127}$$

2.8.2. Acțiunea unei mișcări oarecare $u(t)$ aplicată indirect asupra sistemului oscilant

Întrucît excitația $u(t)$ se aplică bazei de rezemare a sistemului dinamic, ecuația de mișcare rezultă de forma:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{u}(t), \tag{2.128}$$

în care $x(t)$, $\dot{x}(t)$ și $\ddot{x}(t)$ caracterizează răspunsul relativ al sistemului.

Aplicînd același procedeu de operare din cazul precedent, se obțin pentru *răspunsul permanent exprimat în deplasări relative*, expresiile:

$$x(t) = -\frac{1}{\omega^*} \int_0^t \ddot{u}(\tau)\, e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin \omega^*(t-\tau)\, d\tau, \tag{2.129}$$

pentru sistemul cu amortizoare, și

$$x(t) = -\frac{1}{\omega} \int_0^t \ddot{u}(\tau) \sin \omega(t-\tau)\, d\tau, \tag{2.130}$$

pentru sistemul fără amortizare ($\nu = 0$).

Se observă că și în aceste expresii intervin integralele lui Duhamel.

Acest caz, în care baza de rezemare este supusă unei excitații oarecare $u(t)$, corespunde acțiunilor forțate produse de mișcarea seismică. Deoarece funcția mișcării $u(t)$ nu este determinată în timp, răspunsul sistemului se definește prin valori probabile, situate în anumite limite.

În cazul particular al unei mișcări periodice $u(t) = u_0 \sin \theta t$ se vor obține rezultatele stabilite anterior, prin particularizarea relațiilor (2.129) și (2.130).

2.9. METODE ENERGETICE ÎN STUDIUL VIBRAȚIILOR

Teoremele energiei, cunoscute din mecanica teoretică, au o largă aplicabilitate în studiul vibrațiilor datorită mai ales eficienței în rezolvarea numerică a numeroase probleme. În acest sens se poate aplica *legea energiei cinetice*, valabilă în orice moment al mișcării:

$$\frac{d}{dt}[E_c(t) + E_p(t)] = \frac{dL(t)}{dt} \tag{2.131}$$

unde

$E_c(t)$ reprezintă energia cinetică instantanee a sistemului;
$E_p(t)$ — energia potențială instantanee a sistemului;
$L(t)$ — lucrul mecanic instantaneu produs de forța rezistentă (de amortizare) și forța perturbatoare care se aplică sistemului.

În analiza vibrațiilor libere fără amortizare, lucrul mecanic elementar fiind nul, legea (2.131) se reduce la *teorema conservării energiei totale* (mecanice E_m) deoarece:

$$E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) = \text{constant}. \tag{2.132}$$

Rezultă deci:

$$\frac{dE_m(t)}{dt} = \frac{d}{dt}[E_c(t) + E_p(t)] = 0. \tag{2.133}$$

În cazul sistemului cu 1 GLD avînd mișcare de translație, $E_c(t)$ și $E_p(t)$ au expresiile:

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t), \qquad E_p(t) = \frac{1}{2} kx^2(t),$$

încît

$$E_m(t) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} kx^2(t). \tag{2.134}$$

Aplicînd teorema conservării energiei se obține

$$[m\ddot{x}(t) + kx(t)]\,\dot{x}(t) = 0,$$

sau

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0, \tag{2.135}$$

adică ecuația mișcării libere neamortizate a sistemului cu 1 GLD.

Se observă că în timpul vibrațiilor unui astfel de sistem, în poziția inițială de echilibru, energia potențială este nulă, iar energia cinetică devine maximă. Cînd sistemul atinge elongațiile maxime, viteza fiind nulă, energia cinetică devine egală cu zero și energia potențială atinge valoarea maximă. Bazați pe aceste observații, aplicînd relația (2.131) rezultă:

$$(E_c)_{max} = (E_p)_{max}. \tag{2.136}$$

Relația (2.136) este de mare importanță în dinamica structurilor și stă la baza metodei numerice elaborate de Rayleigh pentru calculul pulsațiilor proprii ale sistemelor cu mai multe grade de libertate. Aplicînd relația (2.136) la sistemul cu un singur grad de libertate, presupunînd $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ conform expresiei (2.12) se obține:

$$(E_c)_{max} = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2, \qquad (E_p)_{max} = \frac{1}{2} kA^2$$

și deci

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

adică pulsația proprie de vibrație a sistemului oscilant (2.7). Metoda Rayleigh se prezintă in extenso în capitolul 6.

Metoda energetică permite determinarea gradului de amortizare în cazul vibrațiilor libere amortizate de tipul celor reprezentate în figura 2.7.

Dacă se admite soluția (2.33)

$$x(t) = A(t) \sin(\omega^* t + \varphi) \simeq A(t) \sin(\omega t + \varphi),$$

energia totală a sistemului va fi:

$$E(t) = E_m(t) = E_c(t) + E_p(t) \simeq \frac{1}{2} m\omega^2 A^2(t) \cos^2(\omega t + \varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2} kA^2(t) \sin^2(\omega t + \varphi),$$

sau

$$E = \frac{1}{2} kA^2(t) \tag{2.137}$$

deoarece

$$m\omega^2 = k.$$

Energia consumată de forța de amortizare în cursul unui ciclu rezultă:

$$dE = d\left[\frac{1}{2} kA^2(t)\right],$$

sau

$$dE = kA(t)\,dA(t) = \frac{1}{2} kA^2(t) \cdot 2 \frac{dA(t)}{A(t)} = E \frac{2\,dA(t)}{A(t)},$$

de unde, ținînd seama și de expresia (2.39) se obține:

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = \frac{dE}{2E} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n} \cong \Delta,$$

încît, decrementul logaritmic poate fi calculat și cu formula:

$$\Delta = \frac{dE}{2E} = \frac{\psi}{2} = 2\pi\nu. \tag{2.138}$$

Raportul dE/E se notează prin ψ și are semnificația unui coeficient de disipare a energiei.

Din expresia (2.138) se poate determina fracțiunea din amortizarea critică prin intermediul coeficientului ψ:

$$\nu = \frac{\psi}{4\pi}, \tag{2.139}$$

precum și coeficientul de amortizare efectiv cu ajutorul relațiilor (2.21), (2.22), adică:

$$c = \nu c_{cr} = \frac{\psi}{4\pi} 2m\omega = \frac{m\omega\psi}{2\pi}. \tag{2.140}$$

2.10. RĂSPUNSUL SISTEMELOR CU COMPORTARE NELINIARĂ

2.10.1. Conceptul de analiză neliniară

În paragrafele anterioare s-au tratat numai acele sisteme care pot fi reduse la modele de analiză cu comportare geometrică și fizică liniară. În acest caz, toate caracteristicile de definire ale sistemului dinamic rămîn constante pe toată durata aplicării acțiunilor exterioare. Prin urmare, asemenea sisteme nu prezintă procese de degradare inerțială, disipativă sau elastică în timp.

Există totuși situații, generate atît de calitatea materialelor, cît și de natura și intensitatea acțiunilor exterioare, în care caracteristicile de definire ale sistemului să se modifice în timp după anumite legi de degradare mai mult sau mai puțin precizate. Fenomenele de degradare se manifestă direct asupra proprietăților de ordin geometric și fizic, proprietăți care devin variabile în timp. Aceste fenomene specifice definesc comportarea neliniară a sistemului, întrucît modelul liniar este inacceptabil în acest caz.

Diferența dintre cele două situații este pusă în evidență și din punct de vedere matematic. Într-adevăr un model cu comportare liniară este guvernat

de o ecuație de echilibru dinamic instantaneu care reprezintă o ecuație diferențială de ordinul II cu coeficienți constanți:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F(t), \tag{2.141}$$

întrucît m, c și k reprezintă constantele sistemului dinamic.

Dacă în modelul cu comportare neliniară se presupune că toate caracteristicile (inerțială, disipativă și elastică) se modifică în timpul istoric al răspunsului, echilibrul se va exprima tot printr-o ecuație diferențială de ordinul II, dar cu coeficienți variabili, avînd următoarea formă generală:

$$m(t)\,\ddot{x}(t) + c(t)\,\dot{x}(t) + k(t)\,x(t) = F(t). \tag{2.142}$$

Integrarea unei asemenea ecuații, aparent elementară, este extrem de dificilă chiar atunci cînd funcțiile care caracterizează coeficienții sînt riguros definite.

În această situație, mai ales cînd variația coeficienților este oarecare, pentru rezolvarea ecuației de mișcare, se utilizează metode numerice de integrare de tip „pas cu pas" (step-by-step) care presupun discretizarea în raport cu timpul a tuturor funcțiilor care intervin în ecuația (2.142). Metoda avînd un caracter iterativ și aproximativ, evaluarea răspunsului în timpul istoric (time history) al aplicării acțiunii rezultă prin cumularea răspunsurilor incrementale corespunzătoare unor incremente de timp Δt, de durată foarte scurtă.

Mișcarea sistemului pe intervalul de timp incremental este guvernată de condiția de echilibru dinamic instantaneu, exprimată atît la începutul, cît și la sfîrșitul intervalului. Răspunsul incremental exprimat în deplasări și viteze incrementale de la sfîrșitul unui anumit interval devin condiții inițiale pentru intervalul următor. Operațiile de calcul sînt conduse „pas cu pas", obținînd în final variația răspunsului exprimat în deplasări, viteze sau accelerații. Prin aproximarea corespunzătoare a variației funcțiilor care definesc în timp coeficienții din ecuația (2.142) pe fiecare interval de timp Δt, operațiile de calcul se reduc la analiza succesivă a unui număr nelimitat de sisteme liniare cu caracteristici diferite de la interval la interval, pe baza unor condiții inițiale specifice fiecărui sfîrșit de interval.

2.10.2. **Exprimarea ecuației de echilibru dinamic incremental**

Se consideră sistemul cu 1 GLD din figura 2.30, *a* supus unei acțiuni directe $F(t)$ oarecare (fig. 2.30, *b*), ale cărui caracteristici de amortizare (fig. 2.30, *c*) și de rigiditate (fig. 2.30, *d*) sînt variabile în timp, caracteristica inerțială m fiind considerată constantă pe toată durata mișcării.

Ecuația de mișcare la timpul t rezultă din condiția de echilibru dinamic instantaneu, așa cum s-a arătat la începutul acestui capitol, adică:

$$-F_i(t) + F_a(t) + F_e(t) = F(t). \tag{2.143}$$

În mod analog se scrie și ecuația de mișcare la timpul $t + \Delta t$:

$$-F_i(t + \Delta t) + F_a(t + \Delta t) + F_e(t + \Delta t) = F(t + \Delta t). \tag{2.144}$$

Prin substituirea ecuației (2.143) în ecuația (2.144) se obține *ecuația de echilibru dinamic incremental:*

$$-\Delta F_i(t) + \Delta F_a(t) + \Delta F_e(t) = \Delta F(t). \tag{2.145}$$

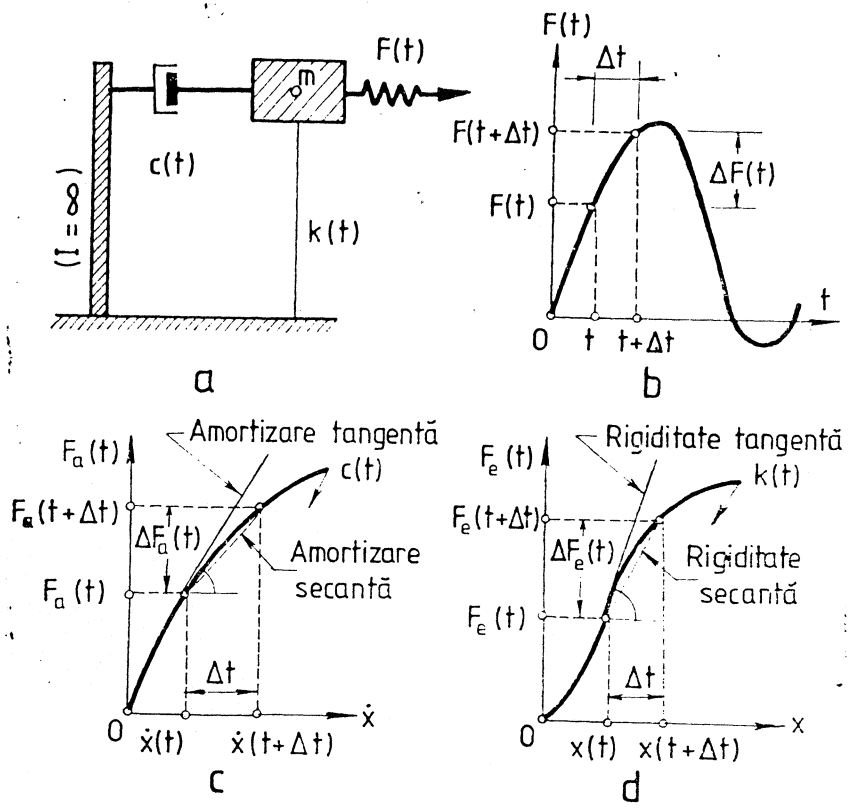


Fig. 2.30

Semnificația forțelor incrementale, care intervin în această ecuație, rezultă direct din figura 2.30. Expresiile analitice ale acestor forțe au următoarea formă:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta F_i(t) &= F_i(t + \Delta t) - F_i(t) = -m\Delta\ddot{x}(t) \\
\Delta F_a(t) &= F_a(t + \Delta t) - F_a(t) = c(t)\,\Delta\dot{x}(t) \\
\Delta F_e(t) &= F_e(t + \Delta t) - F_e(t) = k(t)\,\Delta x(t) \\
\Delta F(t) &= F(t + \Delta t) - F(t) = \Delta F(t)
\end{aligned}\right\} \tag{2.146}$$

În analiza răspunsului incremental variația în timp a caracteristicilor de disipare și de elasticitate ale sistemului vor fi definite prin *amortizare tangentă* (fig. 2.30, *c*) și *rigiditate tangentă* (fig. 2.30, *d*). Se introduce această aproximație deoarece atît amortizarea secantă, cît și rigiditatea secantă depind de viteza și deplasarea de la sfîrșitul intervalului de timp Δt care reprezintă de fapt necunoscutele ce urmează a fi determinate. Evaluarea secantelor pe intervalul Δt poate fi făcută numai prin operații iterative laborioase care nu se justifică din punct de vedere practic avînd în vedere aproximarea satisfăcătoare pe care o furnizează utilizarea tangentelor.

Ţinînd seama de expresiile (2.146), ecuaţia de echilibru dinamic, incrementul devine

$$m\Delta\ddot{x}(t) + c(t)\,\Delta\dot{x}(t) + k(t)\,\Delta x(t) = \Delta F(t). \qquad (2.147)$$

În această ecuaţie, coeficienţii variabili pot fi exprimaţi prin orice formă de neliniaritate disipativă şi elastică. În acest sens, variaţia rigidităţilor $k(t)$ poate fi exprimată atît prin deplasări, ca în cazul materialelor cu comportare inelastică, cît şi prin proprietăţile histeretice ale materialului, corespunzător unei comportări postelastice.

2.10.3. Integrarea numerică a ecuaţiei de mişcare prin integrarea „pas cu pas". Metoda acceleraţiilor liniare

În literatura de specialitate există metode de integrare numerică de tip „pas cu pas" a ecuaţiei de echilibru dinamic instantaneu [8], [51], [129], [144], [147] etc., care furnizează rezultate satisfăcătoare din punct de vedere ingineresc, în timp ce operaţiile de calcul se conduc pe baza unor algoritme de analiză destul de simple.

În metoda acceleraţiilor liniare se consideră că acceleraţia de răspuns a sistemului cu 1 GLD are o variaţie liniară pe fiecare increment de timp Δt, substituind astfel curba acceleraţiilor efective printr-o variaţie poligonală (fig. 2.31, *a*). În acest interval proprietăţile de definire ale sistemului rămînînd constante, analiza răspunsului dinamic incremental se efectuează ca în cazul sistemelor cu comportare liniară, în care condiţiile iniţiale corespund deplasării şi vitezei de la sfîrşitul fiecărui pas de timp Δt anterior pasului Δt analizat. Admiţînd ipoteza acceleraţiilor incrementale liniare, rezultă că variaţia vitezelor incrementale vor fi definite printr-o parabolă pătratică, iar variaţia deplasărilor incrementale printr-o parabolă cubică.

Metoda variaţiei liniare a acceleraţiilor incrementale, pe intervalul de timp Δt, este expusă în multe lucrări de specialitate avînd însă ca sursă principală studiile elaborate de R.W. Clough, studii sintetizate în tratatul [51] elaborat împreună cu J. Penzien.

În vederea efectuării analizei numerice se va considera un pas oarecare aparţinînd variaţiei acceleraţiilor de răspuns $\ddot{x}(t)$, definit de ramura liniară delimitată de intervalul de timp incremental $\Delta t = t_j - t_i$ (fig. 2.31, *b*).

Expresia variaţiei acceleraţiilor pe acest interval rezultă:

$$\ddot{x}(\tau) = \ddot{x}(t_i) + \Delta\ddot{x}(\tau) = \ddot{x}(t_i) + \frac{\Delta\ddot{x}(t_j)}{\Delta t}\,\tau.$$

Prin integrări succesive se vor obţine:
— variaţia vitezelor (parabolă pătratică)

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}(t_i) + \int_0^\tau \ddot{x}(\tau)\,d\tau = \dot{x}(t_i) + \ddot{x}(t_i)\tau + \frac{\Delta\ddot{x}(t_j)}{\Delta t}\cdot\frac{\tau^2}{2};$$

— variaţia deplasărilor (parabolă cubică)

$$x(\tau) = x(t_i) + \int_0^\tau \dot{x}(\tau)\,d\tau = x(t_i) + \dot{x}(t_i)\,\tau + \ddot{x}(t_i)\,\frac{\tau^2}{2} + \frac{\Delta\ddot{x}(t_j)}{\Delta t}\cdot\frac{\tau^3}{6}.$$

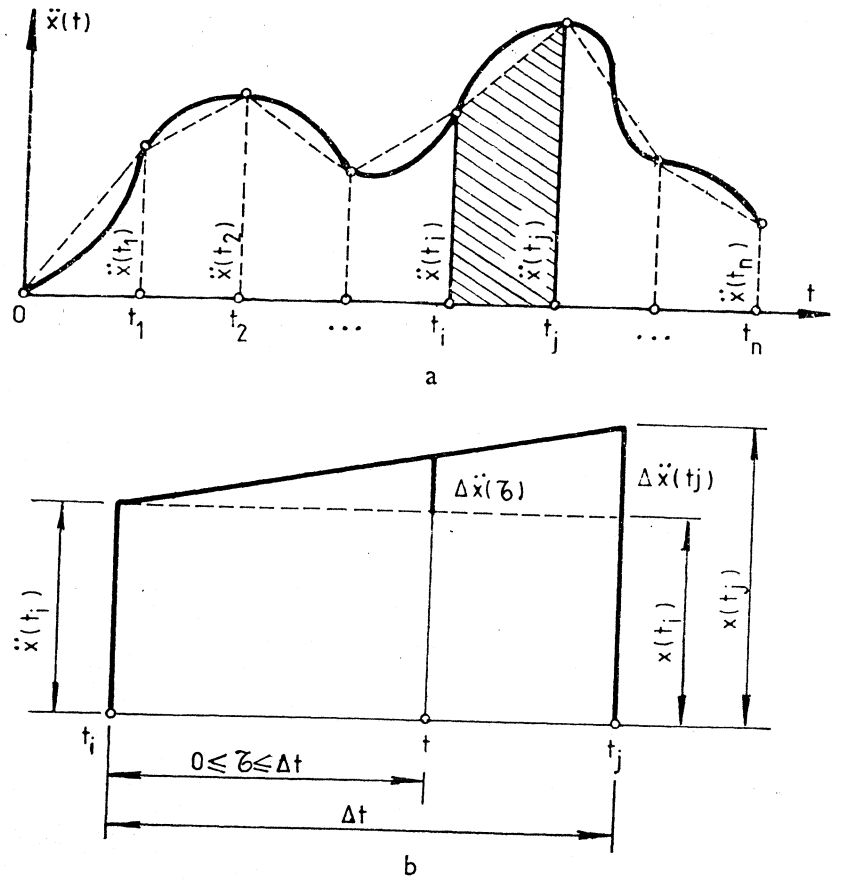


Fig. 2.31

La sfîrşitul intervalului de timp ($\tau = \Delta t$) viteza şi deplasarea vor avea următoarele expresii:

$$\dot{x}(t_j) = \dot{x}(t_i) + \ddot{x}(t_i)\,\Delta t + \frac{\Delta\ddot{x}(t_i)}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t^2}{2}, \qquad (2.148)$$

$$x(t_j) = x(t_i) + \dot{x}(t_i)\,\Delta t + \ddot{x}(t_i)\,\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta\ddot{x}(t_j)}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t^3}{6}, \qquad (2.149)$$

de unde rezultă variaţiile vitezei şi deplasării incrementale corespunzătoare intervalului de timp Δt:

$$\Delta\dot{x}(t_j) = \dot{x}(t_j) - \dot{x}(t_i) = \ddot{x}(t_i)\,\Delta t + \frac{\Delta\ddot{x}(t_i)}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t^2}{2}, \qquad (2.150)$$

$$\Delta x(t_j) = x(t_j) - x(t_i) = \dot{x}(t_i)\,\Delta t + \ddot{x}(t_i)\,\frac{\Delta t^2}{2} + \frac{\Delta\ddot{x}(t_j)}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta t^3}{6}. \qquad (2.151)$$

Întrucît rezolvarea numerică se va efectua în raport cu deplasarea incrementală $\Delta x(t_j)$, din relația (2.151) se va explicita accelerația incrementală $\Delta\ddot{x}(t_j)$ urmînd a fi introdusă în relația (2.150). În acest sens, se obține:

$$\Delta\ddot{x}(t_j) = \Delta x(t_j)\cdot\frac{6}{\Delta t^2} - \dot{x}(t_i)\frac{6}{\Delta t} - 3\ddot{x}(t_i), \tag{2.152}$$

$$\Delta\dot{x}(t_j) = \Delta x(t_j)\frac{3}{\Delta t} - 3\dot{x}(t_i) - \ddot{x}(t_i)\frac{\Delta t}{2}. \tag{2.153}$$

Prin înlocuirea expresiilor (2.152) și (2.153) în ecuația de echilibru dinamic incremental (2.147), rezultă:

$$m\Delta\ddot{x}(t_j) + c(t_j)\,\Delta\dot{x}(t_j) + k(t_j)\,\Delta x(t_j) = \Delta F(t_j), \tag{2.154}$$

sau

$$m\left[\Delta x(t_j)\frac{6}{\Delta t^2} - \dot{x}(t_i)\frac{6}{\Delta t} - 3\ddot{x}(t_i)\right] + c(t_j)\left[\Delta x(t_j)\frac{3}{\Delta t} - 3\dot{x}(t_i) - \ddot{x}(t_i)\frac{\Delta t}{2}\right] + k(t_j)\,\Delta x(t_j) = \Delta F(t_j). \tag{2.155}$$

Scrierea ecuației (2.154) mai poate fi reorganizată astfel:

$$\left[k(t_j) + m\frac{6}{\Delta t^2} + c(t_j)\frac{3}{\Delta t}\right]\Delta x(t_j) = \Delta F(t_j) + m\left[\dot{x}(t_i)\frac{6}{\Delta t} + 3\ddot{x}(t_i)\right] + c(t_j)\left[3\dot{x}(t_i) + \ddot{x}(t_i)\frac{\Delta t}{2}\right], \tag{2.156}$$

au într-o forma mai condensată

$$\tilde{k}(t_j)\,\Delta x(t_j) = \Delta\tilde{F}(t_j), \tag{2.157}$$

unde

$$\tilde{k}(t_j) = k(t_j) + m\frac{6}{\Delta t^2} + c(t_j)\cdot\frac{3}{\Delta t} \tag{2.158}$$

reprezintă „rigiditatea dinamică incrementală efectivă", iar

$$\Delta\tilde{F}(t_j) = \Delta F(t_j) + m\left[\dot{x}(t_j)\frac{6}{\Delta t} + 3\ddot{x}(t_j)\right] + c(t_j)\left[3\dot{x}(t_j) + \ddot{x}(t_j)\frac{\Delta t}{2}\right] \tag{2.159}$$

reprezintă „încărcarea incrementală efectivă".

Se observă că pentru orice secvență de timp t_j dat, ecuația (2.157) este identică cu ecuația incrementală care exprimă echilibrul static instantaneu. Efectul comportării dinamice a sistemului neliniar apare în ecuația (2.157) prin introducerea în $\tilde{k}(t_j)$ și $\Delta\tilde{F}(t_j)$ a influenței inerției și disipării. În această situație, la sfîrșitul fiecărui increment de timp Δt, deplasarea incrementală se obține prin operații algebrice simple. Celelalte mărimi cinematice incrementale specifice se obțin prin intermediul relațiilor (2.152) și (2.153). Toate aceste mărimi devin condiții inițiale pentru intervalul următor de timp $\Delta t = t_j - t_{j+1}$.

În analiza unui sistem cu comportare neliniară prin metoda integrării numerice, se consideră totdeauna cunoscute condițiile inițiale exprimate în deplasările $x(t_0)$ și viteze $v(t_0)$, încît accelerația inițială se obține din ecuația de mișcare (2.143) astfel:

$$\ddot{x}(t_0) = \frac{1}{m}\,[F(t_0) - F_a(t_0) - F_e(t_0)]. \tag{2.160}$$

La sfîrșitul fiecărui interval, definit prin timpul incremental Δt se determină deplasarea și viteza astfel:

$$\left.\begin{aligned} x(t_j) &= x(t_i + \Delta t) = x(t_i) + \Delta x(t_j) \\ \dot{x}(t_j) &= \dot{x}(t_i + \Delta t) = \dot{x}(t_i) + \Delta\dot{x}(t_j) \end{aligned}\right\}. \tag{2.161}$$

În metoda de integrare numerică „pas cu pas" expusă mai sus, s-a considerat o variație liniară a accelerației pe timpi incrementali Δt și de asemenea că proprietățile elastice și disipative ale sistemului nu se modifică pe intervalul de timp Δt. Cu toate aceste ipoteze simplificatoare, dacă metoda este corect aplicată și în condițiile unei discretizări riguroase, rezultatele numerice ce se obțin sînt satisfăcătoare din punct de vedere practic. În această privință, stabilirea duratei incrementului de timp Δt, care guvernează calitatea discretizării, trebuie să țină seama de modul de variație al acțiunilor exterioare, specificul neliniarităților elastice și disipative, precum și de valoarea perioadei proprii de vibrație T a sistemului. Pentru ca erorile care intervin inerent în această metodă (avînd în vedere caracterul său aproximativ) să devină minime, se recomandă ca $\Delta t/T \leqslant 1/10$.

Controlul sau identificarea eventualelor erori din fiecare pas al procesului iterativ reprezintă o cerință obligatorie în analiza numerică efectuată. În acest caz se poate exprima echilibrul dinamic instantaneu la sfîrșitul fiecărui interval de timp Δt, adică

$$F_i(t_j) + F_a(t_j) + F_e(t_j) = F(t_j)$$

sau

$$\ddot{x}(t_j) = \frac{1}{m}\,[F(t_j) - c(t_j)\,\dot{x}_j - k(t_j)\,x_j].$$

Această metodă poate fi aplicată cu mult succes și în cazul analizei sistemelor cu comportare liniară, operațiile de calcul fiind mult simplificate datorită faptului că toate caracteristicile de definire ale sistemului (m, c, k) nu se modifică în timp.

Metoda integrării numerice „pas cu pas" a fost inițiată în anul 1952 și perfecționată în 1962 de către N.M. Newmark [144], [145]. Pentru variația vitezei și deplasării pe intervalul de timp Δt au fost propuse următoarele relații:

$$\dot{x}(t_j) = \dot{x}(t_i) + [\ddot{x}(t_i) + \ddot{x}(t_j)]\frac{\Delta t}{2}, \tag{2.162}$$

$$x(t_j) = x(t_i) + \dot{x}(t_i)\,\Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{x}(t_i)\,\Delta t^2 + \beta\ddot{x}(t_j)\,\Delta t^2. \tag{2.163}$$

S-a constatat că metoda de analiză furnizează rezultate bune atunci cînd coeficientul numeric β are valori cuprinse între 1/8 și 1/4. În general acesta depinde de modul în care se discretizează curba accelerațiilor, precum și de variația acesteia pe intervalul de timp incremental Δt considerat. Dacă acest interval de timp este foarte redus (raportat la perioada proprie de vibrație a sistemului), valoarea coeficientului β poate fi luat egal cu 1/6. În această situație relația (2.163) devine:

$$x(t_j) = x(t_i) + \dot{x}(t_i)\,\Delta t + \ddot{x}(t_i)\frac{\Delta t^2}{3} + \ddot{x}(t_j)\frac{\Delta t^2}{6}. \tag{2.164}$$

Întrucît conform figurii 2.31, *b* rezultă

$$\ddot{x}(t_i) + \ddot{x}(t_j) = 2\ddot{x}(t_i) + \Delta\ddot{x}(t_j),$$

se constată că relațiile (2.162) și (2.164) sînt identice cu relațiile (2.148) și (2.149), astfel încît această metodă, în condițiile în care se consideră $\beta = 1/6$, se reduce la metoda variației liniare a accelerațiilor de răspuns.

În cazul în care pe intervalul de timp Δt se admite $\beta = 1/4$, rezultă pentru variația deplasărilor incrementale o variație parabolică pătratică. Această situație corespunde unei discretizări a accelerațiilor de răspuns în trepte, cu accelerații constante pe fiecare interval Δt, avînd valoarea egală cu media accelerațiilor de la capetele acestuia.

Într-adevăr, înlocuind $\beta = 1/4$ în relația (2.163) rezultă:

$$x(t_j) = x(t_i) + \dot{x}(t_i)\,\Delta t + \ddot{x}(t_i)\frac{\Delta t^2}{4} + \ddot{x}(t_j)\frac{\Delta t^2}{4}.$$

Operațiile de calcul „pas cu pas" decurg în mod analog cu cele din metoda accelerațiilor liniare.

2.11. APLICAȚII

Aplicația 2.11.1. Se cere determinarea pulsației și perioadei proprii de vibrație a grinzii din figura 2.32 acționată gravitațional, $Q = mg$. Întrucît masa proprie se concentrează, grinda se transformă într-un sistem oscilant cu un singur grad de libertate caracterizat numai de deplasarea masei $m = Q/g$ pe direcția verticală. Se vor considera următoarele date inițiale: $Q = 6\text{tf}\ (58{,}85\text{kN})$; $EI = 3\,000\ \text{tfm}^2\ (29\,430\text{kNm}^2)$; $l = 4{,}00$ m.

Pentru calculul pulsației proprii se aplică formula:

$$\omega = \sqrt{g/x_{ST}},$$

unde x_{ST} reprezintă săgeata statică produsă de acțiunea forței Q aplicată pe direcția de oscilație a masei m. Calculul acestei deplasări se face prin metodele cunoscute din rezistența materialelor sau statica structurilor. În cazul de față se poate folosi formula dată în tabelul 2.1, adică

$$x_{ST} = \frac{5Ql^3}{192EI}.$$

Înlocuind datele numerice, rezultă $x_{ST} = 0{,}333$ cm și deci

$$\omega = 54{,}4\ \text{rad/s} \quad \text{și} \quad T = 2\pi/\omega = 0{,}115\ \text{s}.$$

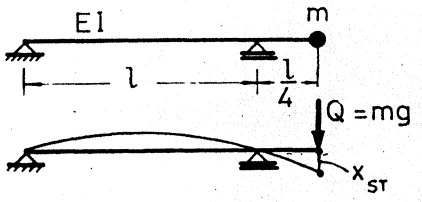


Fig. 2.32

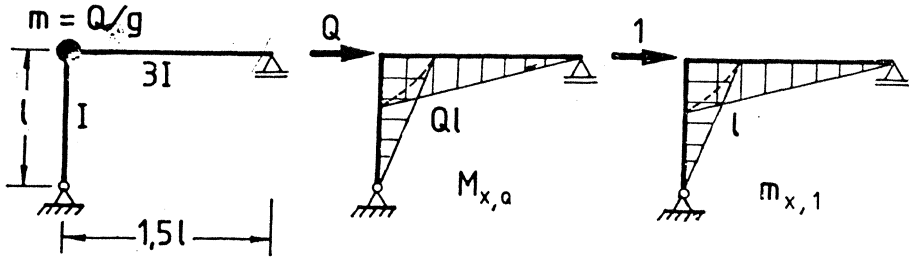


Fig. 2.33

Aplicația 2.11.2. Să se stabilească expresiile pulsației, frecvenței și perioadei proprii de vibrație pentru bara cotită din figura 2.33. Se vor folosi formulele (2.16), (2.17) și (2.18).

Săgeata statică produsă din acțiunea încărcării gravitaționale Q, orientată pe direcția de oscilație (orizontală) se determină cu expresia Maxwell-Mohr, adică:

$$x_{ST} = \int M_{x,Q} m_{x,1} \frac{\mathrm{d}x}{EI}.$$

Prin integrarea diagramelor de momente date în figura 2.33 rezultă:

$$x_{ST} = 0{,}5Ql^3/EI, \qquad \sqrt{x_{ST}} = 0{,}707\sqrt{Ql^3/EI}.$$

În consecință, se vor obține expresiile următoare:

$$\omega = 44{,}3\sqrt{EI/Ql^3}, \quad f = 7{,}07\sqrt{EI/Ql^3}, \quad T = 0{,}1414\sqrt{Ql^3/EI}.$$

Aplicația 2.11.3. Să se calculeze pulsația și perioada proprie de vibrație pentru hala industrială din figura 2.34. Se va considera că stîlpii sînt articulați la capetele superioare de fermele acoperișului. Datele problemei sînt următoarele: $Q = 240$ tf (2350 kN) — rezultanta încărcărilor gravitaționale transmise de acoperiș; $EI = 5\,000\ \text{tf.m}^2\ (49\,000\ \text{kN}\cdot\text{m}^2)$; $h = 5{,}00$ m.

Deoarece structura acoperișului se poate considera perfect rigidă în raport cu rigiditatea stîlpilor la deplasări laterale, săgeata statică produsă de acțiunea orizontală a forței Q va rezulta:

$$x_{ST} = \frac{Qh^3}{3E\Sigma I\ (\text{stîlpi})} = \frac{Qh^3}{15EI}.$$

Dacă se ține seama de datele numerice se obține:

$$x_{ST} = 40\ \text{cm},$$

încît, pulsația și perioada vor fi:

$$\omega = 4{,}95\ \text{rad/s} \quad \text{și} \quad T = 1{,}26\ \text{s}.$$

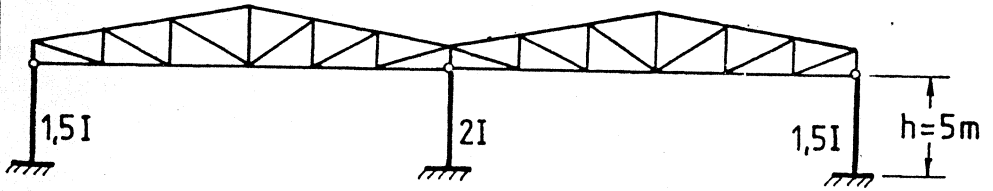


Fig. 2.34

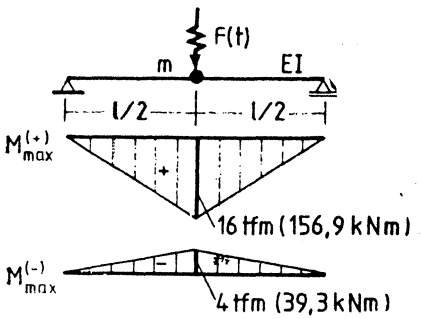


Fig. 2.35

În cazul în care sr consideră încastrări perfecte şi la capetele superioare ale stîlpilor, săgeata va avea expresia:

$$x_{ST} = \frac{Qh^3}{12E\Sigma I\,(\text{stîlpi})} = \frac{Qh^3}{60EI},$$

şi deci

$$x_{ST} = 10 \text{ cm}, \quad \omega = 9{,}9 \text{ rad/s} \quad \text{şi}$$
$$T = 0{,}63 \text{ s}.$$

Aplicaţia 2.11.4. Să se determine diagrama momentelor încovoietoare pentru grinda din figura 2.35, încărcată cu sarcina $Q = mg$, ţinînd seama şi de efectul aplicării dinamice a forţei $F(t) = F_0 \sin \theta t$. Se cunosc următoarele mărimi iniţiale:

$$Q = 3\text{tf}\,(29{,}43 \text{ kN}); \quad F_0 = 2\text{tf}\,(19{,}6 \text{ kN}), \quad \theta = 27 \text{ rad/s};$$
$$EI = 4\,000 \text{ tf} \cdot \text{m}^2\,(39\,240 \text{ kN} \cdot \text{m}^2); \quad l = 8 \text{ m}.$$

Efectul dinamic al aplicării forţei perturbatoare $F(t)$ este pus în evidenţă de coeficientul dinamic μ care se determină cu formula (2.48):

$$\mu = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2}.$$

Pentru a obţine pulsaţia proprie ω a grinzii se calculează în prealabil săgeata statică produsă de acţiunea sarcinii Q pe direcţia gradului de libertate. Din tabelul 2.1, pentru grinda simplu rezemată acţionată la mijlocul deschiderii de forţa Q, rezultă următoarea expresie a săgeţii:

$$x_{ST} = \frac{Ql^3}{48EI}.$$

Avînd în vedere datele numerice şi folosind relaţia (2.16) se obţine $x_{ST} = 0{,}8$ cm; $\omega \simeq 35$ rad/s; $\theta/\omega = 0{,}775$, astfel încît coeficientul dinamic rezultă $\mu = 2{,}5$. Forţa dinamică maximă se determină cu expresia (2.55):

$$F_d = \mu F_0 = 5 \text{ tf } (49 \text{ kN}).$$

Avînd în vedere efectul alternant al forţei dinamice, diagramele de momente care sînt reprezentate în figura 2.35 au rezultat din relaţia:

$$M = M_Q \pm M_F.$$

Momentele, maxim şi minim, din mijlocul deschiderii vor fi:

$$M_{l/2} = (Q \pm \mu F_0)\frac{l}{4} = (6 \pm 10)\text{ tfm} = (58{,}8 \pm 98{,}1) \text{ kNm},$$

iar deplasările în mijlocul deschiderii

$$x_{l/2} = x_Q \pm x_F = (0{,}8 \pm 1{,}33) \text{ cm}.$$

Aplicaţia 2.11.5. Se cere diagrama momentelor încovoietoare pentru grinda continuă din figura 2.36 solicitată de încărcarea gravitaţională $Q = mg$ şi de forţa perturbatoare $F(t) = F_0 \sin \theta t$, cunoscîndu-se: $Q = 4\text{tf}$ (39,24 kN); $F_0 = 2{,}5$ tf (24,5 kN); $\theta = 40$ rad/s; $EI = 4\,000$ tf.m^2 (39 240 kN·m^2), $l = 6$ m. Calculul se conduce la fel ca în aplicaţia precedentă.

Săgeata statică produsă de acţiunea sarcinii Q se determină ţinînd seama că sistemul este static nedeterminat. Dacă se efectuează un asemenea calcul şi se iau în considerare datele numerice ale problemei se obţine:

$$x_{ST} = \frac{23}{1\,536}\frac{Ql^3}{EI} = 0{,}323 \text{ cm}$$

şi în consecinţă

$$\omega = \sqrt{g/x_{ST}} \simeq 55 \text{ rad/s}.$$

Coeficientul dinamic va rezulta

$$\mu = \frac{1}{1 - (40/55)^2} \simeq 2{,}12.$$

În baza relaţiilor (2.53) şi (2.55) se pot determina valorile de amplitudine ale deplasării şi forţei, corespunzătoare acţiunii dinamice a sarcinii perturbatoare $F(t)$, adică:

$$x_d = \pm \mu\Delta_{ST} = \pm\mu \cdot \frac{23}{1\,536}\frac{F_0 l^3}{EI} = \pm 0{,}428 \text{ cm},$$

$$F_d = \pm \mu F_0 = \pm 5{,}3 \text{ tf } (52 \text{ kN}).$$

Ţinînd seama şi de încărcarea gravitaţională Q, diagramele de momente vor rezulta din acţiunea următoarelor forţe aplicate static:

$$P^{(+)}_{max} = Q + \mu F_0 = 9{,}3 \text{ tf } (91{,}24 \text{ kN}),$$
$$P^{(-)}_{max} = Q - \mu F_0 = -1{,}3 \text{ tf } (12{,}76 \text{ kN}).$$

Cu ajutorul acestor încărcări s-au determinat diagramele de momente încovoietoare din figura 2.36, folosind metodele de calcul cunoscute din Statica construcţiilor.

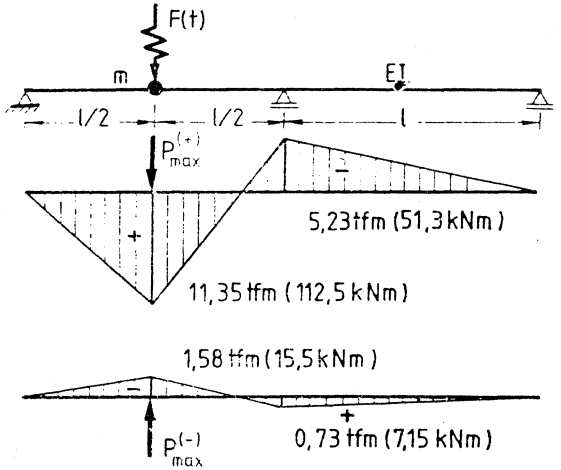


Fig. 2.36

Deplasările maxime ale masei m vor fi:

$$x_{max}^{(+)} = x_{ST} + \mu\Delta_{ST} = 0{,}751 \text{ cm},$$

$$x_{max}^{(-)} = x_{ST} - \mu\Delta_{ST} = -0{,}105 \text{ cm}.$$

Aplicația 2.11.6. Să se determine variația deplasărilor masei m, în regim staționar (permanent) de acționare a forțelor perturbatoare armonice $F_1(t) = F_{0,1} \sin \theta_1 t$ și $F_2(t) = F_{0,2} \sin \theta_2 t$, care se aplică grinzii din figura 2.37, *a*. Se presupun cunoscute: $Q = mg = 6\text{tf}$ (58,85 kN); $F_{0,1} = 2\text{tf}$ (19,6 kN); $F_{0,2} = 1\text{tf}$ (9,81 kN); $\theta_1 = 25$ rad/s; $\theta_2 = 50$ rad/s; $EI = 12\,000$ tf.m² (118 000 kNm²); $l = 8$ m.

Variația deplasărilor pe direcția de oscilație a masei m se determină cu ajutorul relației (2.90):

$$x_A(t) = \mu_1 \Delta_{A,1} \sin \theta_1 t + \mu_2 \Delta_{A,2} \sin \theta_2 t,$$

unde

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - (\theta_1/\omega)^2}, \qquad \mu_2 = \frac{1}{1 - (\theta_2/\omega)^2},$$

iar $\Delta_{A,1}$ și $\Delta_{A,2}$ reprezintă deplasările statice pe direcția verticală a punctului A, cînd grinda este acționată static de forțele $F_{0,1}$, respectiv $F_{0,2}$.

Este necesar să se calculeze mai întîi pulsația proprie a sistemului în vederea identificării prealabile a unui eventual pericol de rezonanță. În cazul în care fenomenul de rezonanță nu este posibil, pulsația proprie se va folosi la determinarea coeficienților dinamici μ_1 și μ_2.

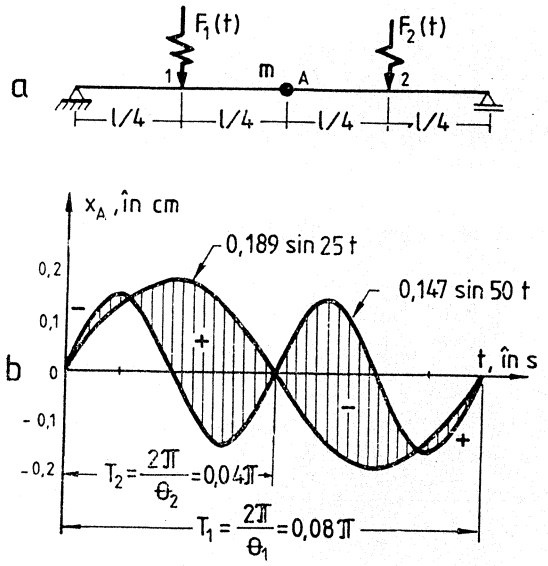


Fig. 2.37

Calculul pulsației se face ca și în cazurile precedente prin intermediul săgeții statice produsă de încărcarea gravitațională Q aplicată în punctul A. Rezultă:

$$x_{ST} = \frac{Ql^3}{48EI} = 0{,}533 \text{ cm},$$

și deci

$$\omega = \sqrt{g/x_{ST}} \simeq 42 \text{ rad/s} \neq \theta_1, \theta_2.$$

Înlocuind ω, θ_1 și θ_2 în expresiile coeficienților dinamici, se obțin valorile:

$$\mu_1 = 1{,}548, \qquad \mu_2 = -2{,}398.$$

Deplasările statice rezultate din acțiunea separată a forțelor $F_{0,1}$ și $F_{0,2}$ care se calculează prin metodele cunoscute, vor fi:

$$\Delta_{A,1} = 0{,}122 \text{ cm}, \qquad \Delta_{A,2} = 0{,}061 \text{ cm},$$

astfel încît, expresia deplasărilor masei m în regim staționar devine

$$x_A(t) = 0{,}189 \sin 25t - 0{,}147 \sin 50t.$$

Fiecare componentă a mișcării este reprezentată în figura 2.37, *b*. În aceeași figură este pusă în evidență și mișcarea rezultantă care este de tip periodic întrucît $\theta_2/\theta_1 = 2$. Perioadele celor două componente sînt următoarele:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\theta_1} = \frac{2\pi}{25} = 0{,}08\pi, \quad \text{(s)}, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\theta_2} = \frac{2\pi}{50} = 0{,}04\pi, \quad \text{(s)}.$$

Perioada variației deplasărilor $x_A(t)$ va fi egală cu T_1, așa cum rezultă din figura 2.37, *b*. Valorile deplasărilor produse de acțiunea simultană a forțelor perturbatoare $F_1(t)$ și $F_2(t)$, în intervalul $0 \leqslant t \leqslant T_2$, au rezultat:

$t = 0,$	$x_A = 0;$
$t = 0{,}01\ \pi,$	$x_A = -0{,}013$ cm;
$t = 0{,}02\ \pi,$	$x_A = 0{,}189$ cm;
$t = 0{,}03\ \pi,$	$x_A = 0{,}280$ cm;
$t = 0{,}04\ \pi,$	$x_A = 0.$

Aplicația 2.11.7. O fundație de beton susține un utilaj al cărui motor transmite pe direcția verticală o forță perturbatoare $F(t) = F_0 \sin \theta(t)$. Greutatea proprie a utilajului este $G_1 = 15$ tf (147 kN). Blocul de fundație are forma unui paralelipiped avînd laturile $a = 2{,}0$ m și $b = 1{,}5$ m, iar înălțimea $h = 1{,}2$ m (fig. 2.38). Dacă se consideră $\gamma_b = 2{,}5$ tf/m³ (24,5 kN/m²) rezultă greutatea proprie a blocului de beton egală cu $G_2 = 9$ tf (88,5 kN). Forța perturbatoare $F(t)$ este caracterizată de $F_0 = 2$ tf (19,6 kN) și de $\theta = 45$ rad/s. Terenului

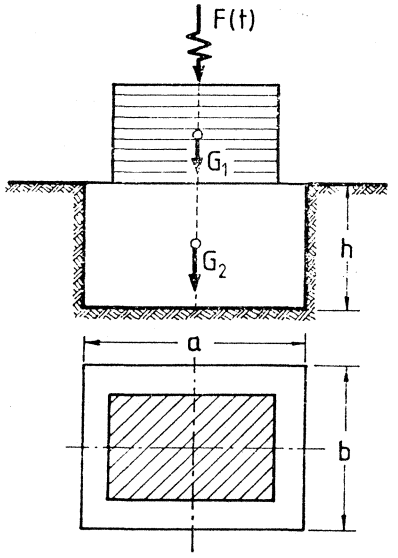


Fig. 2.38

de fundație, considerat de tip mediu, îi corespunde un coeficient de compresiune elastică uniformă, pe direcție verticală, $C_z = 2\text{kgf/cm}^3$ (1,96 daN/cm³).

Se cere să se calculeze presiunile totale pe talpa de fundație ținînd seama de efectul dinamic produs de forța perturbatoare. Calculul se va face în două ipoteze, în prima se va neglija influența amortizării ($\nu = 0$), iar în a doua se va considera efectul amortizării prin fracțiunea din amortizarea critică $\nu = 0{,}15$.

Determinarea pulsației proprii de vibrație a ansamblului format din blocul de fundație și utilajul propriu-zis se face aplicînd formula cunoscută

$$\omega = \sqrt{g/x_{ST}},$$

unde, în acest caz, deplasarea statică x_{ST} reprezintă tasarea pe direcția verticală produsă de sarcina statică $G = G_1 + G_2 = 24$ tf (235, 5 kN). Deci

$$x_{ST} = \frac{G}{C_z A_f} = \frac{\sigma}{C_z},$$

în care A_f este aria tălpii fundației, adică $A_f = a \cdot b$. Dacă se înlocuiesc datele numerice în expresiile de mai sus vor rezulta valorile următoare:

$$x_{ST} = 0{,}4 \text{ cm}, \quad \omega = 49{,}5 \text{ rad/s}, \quad \theta/\omega = 0{,}91.$$

În cazul în care se neglijează amortizarea ($\nu = 0$), coeficientul dinamic se obține cu relația

$$\mu = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} \simeq 5{,}9,$$

iar forța dinamică maximă corespunzătoare

$$F_d = \mu F_0 = 11{,}8 \text{ tf (116 kN)}.$$

Forța totală maximă care acționează asupra tălpii de fundație va fi:

$$N(\nu = 0) = G_1 + G_2 + F_d = 35{,}8 \text{ tf (351 kN)}.$$

Efortul unitar maxim pe talpa fundației, corespunzător acestei forțe, va avea valoarea:

$$\sigma_{max}(\nu = 0) = \frac{N(\nu = 0)}{A_f} \simeq 1{,}2 \text{ kgf/cm}^2 \ (1{,}18 \text{ daN/cm}^2).$$

Dacă se ține seama de influența amortizării și se consideră $\nu = 0{,}15$ coeficientul dinamic se determină cu relația (2.62):

$$\mu^* = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]^2 + 4\nu^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}} \simeq 3{,}2.$$

În consecință rezultă:

$$N(\nu = 0{,}15) = 30{,}4 \text{ tf (298 kN)};$$
$$\sigma_{max}(\nu = 0{,}15) \simeq 1{,}01 \text{ kgf/cm}^2 \ (0{,}99 \text{ daN/cm}^2).$$

Deoarece $\theta/\omega < 1$, utilajul căruia îi corespunde forța perturbatoare $F(t)$ funcționează în zona acordării joase a sursei (sistemul este supraacordat).

Aplicația 2.11.8. Pentru structura de beton armat, static nedeterminată, din figura 2.39, *a* acționată de încărcarea gravitațională $Q = mg$ și forța perturbatoare $F(t) = F_0 \sin \theta t$ se determină diagramele de momente încovoietoare maximă și minimă în regim staționar. Se consideră următoarele date numerice: $Q = mg = 8$ tf (78,48 kN), $F_0 = 4$ tf (39,24 kN), $\theta = 40$ rad/s.

Considerînd momentul de inerție de referință I corespunzător unei secțiuni de 30 × 40 cm, rezultă $EI = 4\,800$ tfm² (47 088 kNm²).

Se calculează mai întîi pulsația proprie ω a sistemului. Pentru aceasta este necesar să se determine săgeata statică x_{ST} a structurii, produsă de acțiunea încărcării Q pe direcția GLD.

Luînd în considerare datele aplicației au rezultat $x_{ST} = 0{,}375$ cm, iar pulsația proprie $\omega = 51{,}252$ rad/s.

Factorul de amplificare dinamică (FAD) este

$$\mu = \frac{1}{1 - (\theta/\omega)^2} = \frac{1}{1 - (40/51{,}252)^2} = 2{,}558.$$

Diagramele de momente M_{max} și M_{min} reprezentate în figurile 2.39, *b* și 2.39, *c* sînt produse de forțele $Q + \mu F_0 = 18{,}232$ tf (178, 86 kN), respectiv $Q - \mu F_0 = -2{,}232$ tf (−21,90 kN).

Deoarece forța μF_0 depășește în valoare absolută forța Q, diagrama M_{min} rezultă inversată față de M_{max} ($F_d = Q + \mu F_0$).

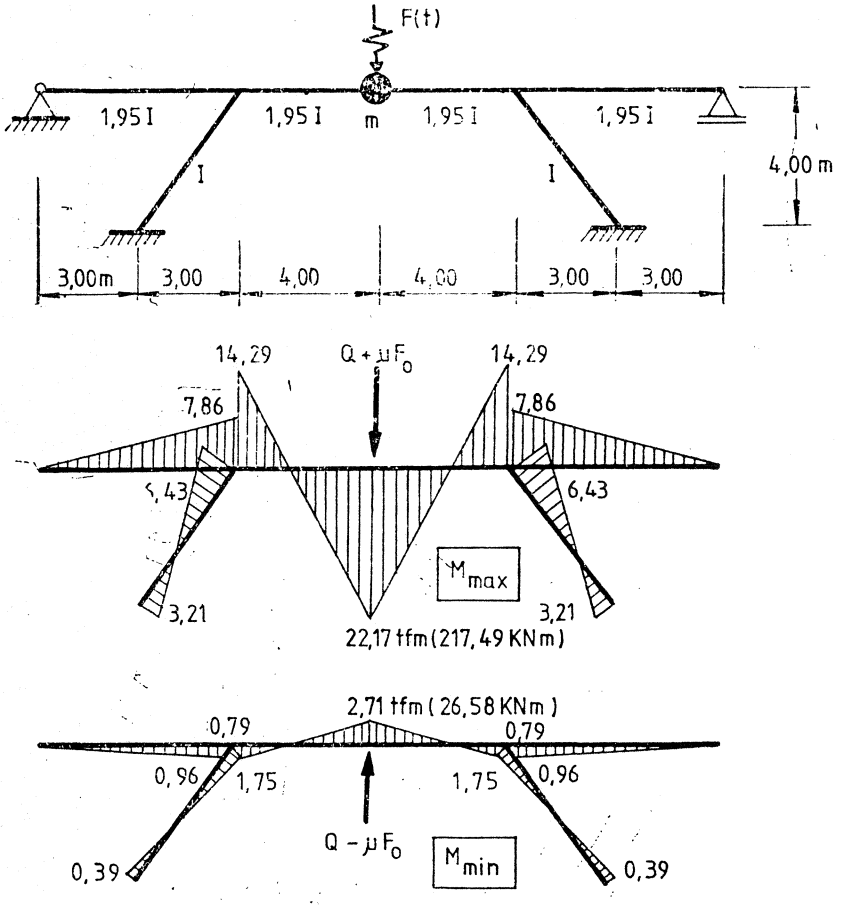


Fig. 2.39

3

DINAMICA SISTEMELOR DISCRETE. SISTEME CU UN NUMĂR FINIT DE GLD

În analiza dinamică nu pot fi reduse toate structurile la sisteme oscilante cu un singur grad de libertate dinamică (1 GLD), avînd în vedere complexitatea și particularitățile configurațiilor structurale, precum și faptul că masele, cu rare excepții, au o distribuție continuă. În asemenea situații, pe baza unei *modelări inerțiale* riguroase, se pot transforma structurile reale în sisteme oscilante discrete cu un număr limitat n de grade de libertate dinamice (nGLD). Localizarea punctelor nodale de concentrare a maselor discretizate trebuie să reflecte cît mai fidel comportarea reală a structurii modelate, astfel încît configurațiile deformatelor dinamice să fie evaluate cu cît mai multă exactitate. Se înțelege că rezultatele analizei numerice vor avea o acuratețe ridicată dacă densitatea punctelor nodale, de concentrare a maselor, crește în mod corespunzător. Prin adoptarea unui sistem inerțial discret, cîmpul de vectori, care precizează configurațiile deformatelor dinamice instantanee va fi definit de un număr finit de coordonate discrete (GLD). Criteriile care stau la baza discretizării inerțiale au fost expuse pe larg în § 1.5.1.

În acest capitol vor fi examinate, din punct de vedere dinamic, numai structurile plane ale căror elemente de rezistență sînt dominant încovoiate. În asemenea cazuri se pot neglija inerția de rotație și inerția de translație axială, întrucît influența lor este nesemnificativă în raport cu cea a inerției de translație transversală, asociată deformațiilor de încovoiere. Se admit deci ipotezele cu privire la concentrarea punctuală (nodală) a maselor și a inextensibilității barelor, care în majoritatea situațiilor corespund comportării reale a structurilor. În consecință, se va substitui modelul discret standard, printr-un *model discret simplificat* în care coordonatele dinamice independente, adică necunoscutele sistemului, sînt definite numai prin mișcări de translație transversală. Această simplificare reduce considerabil numărul coordonatelor dinamice, ceea ce reprezintă un avantaj substanțial în analizele numerice. Se face mențiunea că este posibilă reducerea numărului de coordonate, chiar dacă nu se neglijează influența inerțiilor de rotație sau axiale, prin *metoda condensării coordonatelor*, așa cum se va arăta în cap. 4.

Masele concentrate din punctele nodale provin din masa proprie a structurii, din masa unităților nestructurale, precum și din masele încărcărilor adiționale corespunzătoare destinației construcției. În această situație toate *elementele componente și conexiunile structurii de rezistență au numai funcție elastică și disipativă.*

În privința *modelării disipative* se va admite că disiparea sistemelor analizate este slabă, astfel încît se va neglija prezența amortizării. Prin urmare, în acest capitol, sistemele dinamice vor fi considerate energetic conservative, urmînd ca în capitolul 4 să fie introdusă influența amortizării. De altfel, așa cum a rezultat și din capitolul 2, influența amortizării naturale asupra caracteristicilor dinamice poate fi neglijată. În consecință sistemul dinamic va fi descris numai inerțial și elastic. *Modelarea elastică*, exprimată prin intermediul proprietăților de flexibilitate și rigiditate, se obține în conformitate cu conceptele prezentate în § 1.5.3.

Astfel, caracteristicile primare de definire ale modelului matematic, generate în coordonatele dinamice ale sistemului, vor fi următoarele:

— matricea de inerție (a maselor discrete) care rezultă diagonală $[M]$, prin decuplaj inerțial, datorită particularității modelului discret simplificat;

— matricea de flexibilitate dinamică $[D]$, simetrică și pozitiv definită;

— matricea de rigiditate dinamică $[R] = [K]$, simetrică și pozitiv definită.

Matricele $[M]$, $[D]$ și $[R]$ sînt de ordinul n, n (sistemul avînd nGLD), iar matricele elastice au proprietatea cunoscută $[D][R] = [I]$, unde prin $[I]$ s-a notat matricea unitară sau identică (v. § 1.14).

În cuprinsul acestui capitol vor fi abordate următoarele aspecte principale cu privire la dinamica sistemelor discrete cu nGLD:

● *Vibrațiile libere* (răspuns dinamic liber), care se produc după ce acțiunea perturbatoare a încetat. Se analizează în baza condițiilor inițiale (cunoscute) în care se manifestă mișcarea sistemului.

● *Vibrațiile proprii*, interpretate ca soluții particulare ale vibrațiilor libere, se studiază independent de condițiile inițiale. În această situație, intervenind numai caracteristicile inerțiale și elastice ale sistemului, analiza vibrațiilor proprii permite *identificarea caracteristicilor dinamice proprii* ale structurilor (valori și vectori proprii).

● *Vibrațiile forțate* (răspuns dinamic forțat) vor fi tratate numai în cazul acțiunilor de tip armonic (sau periodic), cu caracter permanent.

Ecuațiile de condiție, care guvernează modelul matematic admis, vor fi exprimate în sensul principiilor expuse în § 1.14. Metodele de operare, în concept dinamic, vor fi deci următoarele:

— *metoda forțelor de inerție*, numită și *metoda matricei de flexibilitate* $[D]$, care se bazează pe exprimarea condițiilor de compatibilitate a deplasărilor dinamice instantanee, pe direcția GLD ale sistemului;

— *metoda deplasărilor dinamice instantanee*, numită și *metoda matricei de rigiditate* $[R]$, care constă în exprimarea condițiilor de echilibru dinamic instantaneu, pe direcția GLD ale sistemului.

Toate efectele dinamice, care reprezintă consecința aplicării acțiunilor variabile în timp, se evaluează în raport cu pozițiile de echilibru static ale sistemelor.

Faptul că în dinamica structurilor necunoscutele (GLD) se definesc independent de metodele de operare demonstrează unitatea formulărilor matematice. Rezultă deci că utilizarea unui anumit mod de analiză reprezintă o problemă exclusiv de opțiune, dacă se face abstracție de particularitățile modelului matematic. De altfel, între cele două metode de operare există o legătură directă datorită tocmai proprietății existente între matricele elastice.

La tratarea modelului matematic, precum și la exprimarea ecuațiilor de condiție, se vor folosi elemente de algebră matriceală.

Întrucît se admite că sistemul dinamic are o comportare fizică și geometrică liniară, se vor aplica simultan principiile proporționalității și superpoziției.

3.1. VIBRAȚII LIBERE. RĂSPUNS LIBER. VIBRAȚII PROPRII. IDENTIFICAREA CARACTERISTICILOR DINAMICE PROPRII

3.1.1. Utilizarea metodei matricei de flexibilitate dinamică [D]

În această metodă se vor exprima deplasările dinamice instantanee în funcție de forțele de inerție, prin intermediul matricei $[D]$, pe direcția fiecărui GLD, în acord cu conceptul de operare expus în § 1.14. Dacă asupra modelului discret simplificat cu nGLD din figura 3.1 se aplică un impuls inițial, sistemul va efectua vibrații libere (transversale) în jurul poziției de echilibru static. În timpul mișcării, pe direcția GLD se manifestă deplasări, viteze și accelerații, ale căror variații caracterizează răspunsul liber al sistemului. În consecință, accelerațiile instantanee vor genera pe direcția tuturor GLD forțe de inerție $I(t)$ exprimate prin vectorul:

$$\{I(t)\}_{n,1} = \left\{ \begin{array}{l} -m_1\ddot{x}_1(t) \\ -m_2\ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ -m_k\ddot{x}_k(t) \\ \vdots \\ -m_n\ddot{x}_n(t) \end{array} \right\}_{n,1} = -[M]_{n,n}\{\ddot{x}(t)\}_{n,1}, \tag{3.1}$$

Ecuațiile de condiție vor avea următoarea formă generală:

$$\{x(t)\}_{n,1} = [D]_{n,n}\{I(t)\}_{n,1} \tag{3.2}$$

sau

$$x_k(t) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{kj} I_j(t), \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

în care $\{x(t)\}$ reprezintă vectorul deplasărilor dinamice instantanee, $[M]$ — matricea diagonală de inerție sau a maselor (decuplată inerțial), iar $[D]$ — matricea de flexibilitate dinamică (cuplată elastic), care rezultă prin asamblarea vectorilor elastici $\{\delta\}_k$, $k = 1, 2, \ldots n$, așa cum se arată în figura 3.1.

Introducînd în sistemul de ecuații (3.2) expresia forțelor de inerție (3.1) se obține *ecuația generală a vibrațiilor libere:*

$$[D][M]\{\ddot{x}(t)\} + \{x(t)\} = \{0\}. \tag{3.3}$$

Se constată că ecuația vibrațiilor libere (3.3), exprimată compact în formulare matriceală, reprezintă un sistem de ecuații diferențiale de ordinul II cu coeficienți constanți.

Soluțiile particulare ale ecuației (3.3) vor caracteriza vibrațiile proprii ale sistemului dinamic. Datorită identității formale existente între ecuația (3.3) și ecuația corespunzătoare sistemului cu 1 GLD (2.10), soluțiile particulare vor avea caracter armonic de forma (2.12), încît vectorii deplasărilor și accelerațiilor instantanee devin:

$$\left.\begin{array}{l} \{x(t)\} = \{A\}\sin(\omega t + \varphi), \\ \{\ddot{x}(t)\} = -\omega^2\{A\}\sin(\omega t + \varphi), \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

unde prin $\{A\}$ s-a notat vectorul amplitudinilor deplasărilor.

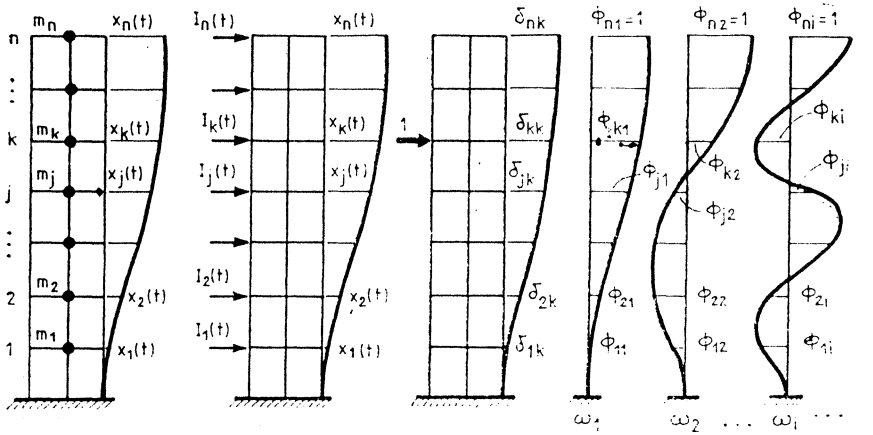


Fig. 3.1

Prin substituirea soluțiilor (3.4) în ecuația (3.3) se obține *ecuația generală a vibrațiilor proprii:*

$$(\omega^2[D][M] - [I])\{A\} = \{0\}, \tag{3.5}$$

sau

$$([D][M] - \lambda[I])\{A\} = \{0\}, \quad \lambda = 1/\omega^2. \tag{3.6}$$

În ecuațiile de mai sus ω sau λ reprezintă *valorile proprii*, $\{A\}$ — *vectorii proprii* ai sistemului dinamic, iar $[I]$ — matricea unitate (sau identică).

În vederea simplificării operațiilor de calcul, s-a introdus notația λ (cu semnificație tot de valoare proprie), care prezintă avantajul că în matricea $[D][M]$ a sistemului de ecuații (3.6) se depune pe diagonala principală.

Spre deosebire de ecuația vibrațiilor libere, ecuația vibrațiilor proprii este algebrică, liniară și omogenă. Necunoscutele care intervin vor fi valorile proprii (exprimate prin pulsații, frecvențe sau perioade) și vectorii proprii (exprimați prin ordonate discrete pe direcția GLD) care definesc configurațiile geometrice ale formelor proprii de vibrație.

Ecuațiile (3.5) și (3.6) sînt satisfăcute de soluțiile banale $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = \ldots = A_n = 0$, dar care nu prezintă interes practic întrucît caracterizează starea de repaus a sistemului dinamic. Pentru ca sistemul să vibreze (să se afle în stare de mișcare) se impune condiția ca amplitudinile A_k să fie diferite de zero. Avînd în vedere că ecuațiile (3.5) și (3.6) sînt algebrice și omogene, condiția necesară și suficientă ca să admită soluții diferite de zero este ca determinantul principal să fie nul, adică

$$\Delta(\omega) = |\omega^2[D][M] - [I]| = 0, \tag{3.7}$$

$$\Delta(\lambda) = |[D][M] - \lambda[I]| = 0. \tag{3.8}$$

Ecuația (3.7) în ω^2 sau ecuația (3.8) în λ vor admite n soluții, rezultînd deci pentru sistemul oscilant un număr de valori proprii egal cu numărul GLD.

Ecuația de forma (3.7) sau (3.8) se numește *ecuația valorilor proprii, ecuația caracteristică* sau *ecuația frecvențelor* (deși nu intervin explicit frecvențele).

Prin rezolvarea ecuației valorilor proprii se obțin n soluții reale, pozitive și în majoritatea situațiilor distincte, avînd semnificația de pulsații, de frecvențe sau de perioade proprii, totalitatea acestora definind *matricea spectrală* a sistemului dinamic.

Matricea spectrală exprimată în pulsații proprii ω are forma:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1 & & & \text{ZERO} \\ & \omega_2 & & \\ & & \omega_i & \\ \text{ZERO} & & & \omega_n \end{bmatrix}, \qquad (3.9)$$

iar matricele spectrale exprimate în frecvențe proprii f și perioade proprii T se obțin direct din (3.9) astfel:

$$[F] = \frac{1}{2\pi}[\Omega], \quad [T] = 2\pi[\Omega]^{-1}. \qquad (3.10)$$

Se observă că matricea spectrală este diagonală. Prin inversarea unei asemenea matrice se obține tot o matrice diagonală, elementele acesteia reprezentînd inversele elementelor din matricea originală.

Pulsația proprie cu valoarea cea mai mică (joasă), notată prin ω_1, se numește *pulsație proprie fundamentală*, iar celelalte valori ω_i reprezintă *pulsații proprii de ordin superior* sau de ordinul i ($\omega_i > \omega_1$, $i = 2, 3, .. n$).Cunoscînd cele n pulsații proprii ale sistemului dinamic se determină direct *frecvența proprie fundamentală* $f_1 = \omega_1/2\pi$, *frecvențele proprii de ordin superior* $f_i = \omega_i/2\pi$, *perioada proprie fundamentală* $T_1 = 2\pi/\omega_1$ și *perioadele proprii de ordin superior* $T_i = 2\pi/\omega_i$. Prin urmare, ierarhizarea valorilor proprii este următoarea:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_i \ldots > \lambda_n$$

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_i < \ldots < \omega_n$$

$$f_1 < f_2 < \ldots < f_i < \ldots < f_n$$

$$T_1 > T_2 > \ldots > T_i > \ldots > T_n$$

Se constată că valorile proprii sînt caracteristici intrinseci ale sistemelor dinamice deoarece depind exclusiv de proprietățile inerțiale și elastice ale modelului.

Dacă în ecuația vibrațiilor proprii (3.6) se introduc succesiv valorile proprii $\lambda = \lambda_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) se obțin n sisteme de ecuații în care variația amplitudinilor deplasărilor $\{A\}_i$ devin necunoscutele problemei. Este evident că fiecărei valori proprii λ_i îi corespunde un vector propriu $\{A\}_i$, cum rezultă din ecuația:

$$([D][M] - \lambda_i[I])\{A\}_i = \{0\}, \quad i = 1, 2, \ldots n \qquad (3.11)$$

Această ecuație, numită și *ecuația vectorilor proprii dimensionali*, fiind algebrică și omogenă nu poate fi rezolvată în raport cu amplitudinile dimensionale A decît în situația în care i se mai asociază unele condiții auxiliare (condițiile inițiale ale mișcării). Acest mod de rezolvare, specific răspunsului liber, va fi expus în § 3.1.4. Cu toate acestea, ecuația (3.11) permite evaluarea

configurațiilor geometrice ale amplitudinilor deplasărilor prin intermediul unor mărimi adimensionale, care definesc *vectorii proprii adimensionali* ai sistemului, obținute prin transformarea

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{1,i} \\ \Phi_{2,i} \\ \vdots \\ \Phi_{k,i} \\ \vdots \\ \Phi_{n,i} \end{Bmatrix}_{n,1} = \frac{1}{A_{1,i}} \begin{Bmatrix} A_{1,i} \\ A_{2,i} \\ \vdots \\ A_{k,i} \\ \vdots \\ A_{n,i} \end{Bmatrix}_{n,1},$$

sau

$$\{\Phi\}_i = \frac{1}{A_{1,i}}\{A\}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (3.12)$$

în care $A_{1,i}$ este o amplitudine de referință (în general arbitrară), iar ordonata corespunzătoare din vectorul propriu adimensional ($\Phi_{1,i} = 1$) reprezintă valoarea „pivot" a configurațiilor geometrice corespunzătoare variației amplitudinilor relative (fig. 3.1).

Înlocuind transformarea (3.12) în ecuația (3.6) se obține *ecuația vectorilor proprii adimensionali:*

$$([D][M] - \lambda_i[I])\{\Phi\}_i = \{0\}, \quad i = 1, 2, \ldots n \qquad (3.13)$$

Sistemul de ecuații (3.13), devenit neomogen, poate fi rezolvat obținîndu-se astfel totalitatea vectorilor proprii care definesc *matricea modală* a sistemului dinamic:

$$[\Phi] = [\{\Phi\}_1 \{\Phi\}_2 \ldots \{\Phi\}_i \ldots \{\Phi\}_n] = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1} & \Phi_{1,2} \ldots \Phi_{1,i} \ldots \Phi_{1,n} \\ \Phi_{2,1} & \Phi_{2,2} \ldots \Phi_{2,i} \ldots \Phi_{2,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{k,1} & \Phi_{k,2} \ldots \Phi_{k,i} \ldots \Phi_{k,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_{n,1} & \Phi_{n,2} \ldots \Phi_{n,i} \ldots \Phi_{n,n} \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

Trebuie subliniat faptul că fiecare din cele n sisteme de ecuații de forma (3.13) conține ($n - 1$) necunoscute $\Phi_{k,i}$ întrucît vectorii proprii adimensionali sînt raportați la ordonata „pivot" $\Phi_{1,i} = 1$.

Numărul vectorilor proprii, numiți și *forme proprii de vibrație* sau funcții proprii este egal cu numărul GLD ale sistemului. Conform relației (3.4), vectorii proprii au caracter staționar, avînd o variație armonică. La fel ca valorile proprii, vectorii proprii sînt caracteristici intrinseci ale sistemelor dinamice depinzînd numai de proprietățile inerțiale și elastice.

Vectorul propriu care corespunde valorii proprii fundamentale se numește *vector propriu fundamental* (sau formă proprie fundamentală de vibrație), iar ceilalți vectori se numesc *vectori proprii de ordin superior* (sau de ordinul i). Configurațiile geometrice ale tuturor vectorilor proprii sînt compatibile cu legăturile sistemului dinamic și cu constrîngerile elastice interioare, specifice ordinului căruia corespund (fig. 3.1). Cu cît ordinul de vibrație proprie i este mai ridicat, cu atît numărul constrîngerilor elastice interioare crește, iar deformatele relative vor rezulta mai „rigidizate".

Ansamblul format dintr-o valoare proprie și un vector propriu se numește *mod propriu de vibrație*. Rezultă deci că numărul modurilor proprii de vibrație este egal cu numărul GLD. *Modul propriu fundamental de vibrație* corespunde caracteristicilor proprii fundamentale, iar celorlalte caracteristici, *modurile proprii de ordin superior*.

Valoarea proprie și vectorul propriu corespunzător sînt mărimi asociate și în consecință matricele spectrală (3.9) și modală (3.14) sînt definite ca *matrice asociate*.

Dacă se ține seama de transformarea (3.12), ecuația generală a vibrațiilor proprii (3.6) mai poate fi scrisă și sub forma:

$$([D]\,[M] - \lambda\,[I])\,\{\Phi\} = \{0\}. \tag{3.15}$$

Dacă matricea rezultată din produsul $[D]\,[M]$, numită *matrice dinamică*,

$$[\mathcal{D}] = [D]\,[M], \tag{3.16}$$

se înlocuiește în ecuația (3.15), aceasta poate fi substituită printr-o identitate astfel:

$$[\mathcal{D}]\,\{\Phi\} = \lambda\{\Phi\}. \tag{3.17}$$

Din relația (3.17) rezultă că $\{\Phi\}$ este un vector propriu al matricei dinamice $[\mathcal{D}]$, în timp ce scalarul λ reprezintă valoarea proprie, asociată vectorului propriu. Această observație stă la baza metodei numerice iterative, pentru calculul caracteristicilor modurilor proprii de vibrație, care va fi expusă în capitolul 6.

Se subliniază faptul că valorile și vectorii proprii reprezintă *caracteristicile dinamice proprii* ale sistemului (independente de cauze), care permit *identificarea structurilor* reale din punct de vedere dinamic. Problema identificării, atît pe cale teoretică, prin intermediul modelului matematic admis, cît și pe cale experimentală, are o importanță decisivă în dinamica structurilor, întrucît guvernează calitativ și cantitativ răspunsul dinamic, implicit comportarea structurilor la acțiuni tranzitorii sau permanente. Trebuie menționat că în cazul prezenței amortizării naturale, influența acesteia asupra caracteristicilor dinamice proprii este practic neglijabilă. În același timp identificarea caracteristicilor dinamice proprii contribuie la „dimensionarea dinamică", prin faptul că permite stabilirea configurației structurale și a conexiunilor, în funcție de specificul acțiunilor exterioare.

3.1.2. **Utilizarea metodei matricei de rigiditate dinamică** $[R]$

În această metodă se vor exprima forțele de inerție în funcție de deplasările instantanee, prin intermediul matricei $[R]$, întrucît ecuațiile de condiție exprimă echilibrul dinamic instantaneu pe direcția tuturor coordonatelor dinamice (GLD). Vibrațiile libere se produc în condițiile descrise în § 3.1.1.

Modelul discret simplificat va fi caracterizat inerțial prin matricea diagonală a maselor (rămîn valabile observațiile expuse inițial) și elastic prin matricea de rigiditate. Coeficienții matricei de rigiditate vor fi exprimați în raport cu coordonatele dinamice ale modelului matematic și definiți ca reacțiuni (§ 1.5.3). Determinarea practică a elementelor constitutive ale matricei $[R]$ prin reacțiuni este mai intuitivă, mult mai simplă și apropiată de conceptele staticii structurilor. În acest sens este necesar să se introducă un sistem de

bază dinamic (SBD) care se obține blocînd toate GLD laterale prin intermediul unor legături simple (fig. 3.2). În § 1.5.3 s-a demonstrat că un coeficient de rigiditate definit ca reacțiune este egal și de același semn cu coeficientul de rigiditate definit ca acțiune ($r_{kj} = k_{jk}$).

Prin deblocarea succesivă a GLD în fiecare legătură se vor înregistra reacțiuni independente produse de forțele de inerție $R_{k,i}(t)$ (datorită decuplajului inerțial existent) și reacțiuni elastice totale $R_{k,e}(t)$ produse de deplasările dinamice instantanee care se manifestă simultan pe direcția tuturor GLD (datorită cuplajului elastic existent), $k = 1, 2, \ldots n$ (fig. 3.2, *b*). Forțele de legătură instantanee din blocajele SBD vor fi deci:

$$R_k(t) = R_{k,i}(t) + R_{k,e}(t), \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

sau

$$\{R(t)\}_{n,1} = \{R_i(t)\}_{n,1} + \{R_e(t)\}_{n,1}. \tag{3.18}$$

Întrucît în realitate sistemul este liber să oscileze, pentru a permite mișcarea pe direcția GLD este necesar ca blocajele introduse să fie suprimate. Avînd în vedere principiul forțelor de legătură (sau axioma legăturilor), această condiție se exprimă analitic prin anularea tuturor reacțiunilor din blocajele SBD, deci:

$$R_k(t) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots n,$$

sau

$$\{R(t)\}_{n,1} = \{R_i(t)\}_{n,1} + \{R_e(t)\}_{n,1} = \{0\}, \tag{3.19}$$

care sintetizează ecuațiile de condiție în metoda matricei de rigiditate.

Explicitarea termenilor care intervin în ecuația (3.19) se va face în conformitate cu figura 3.2, adică:

$$R_{k,i}(t) = -I_k(t);\ R_{k,e}(t) = \sum_{j=1}^{n} R_{k,j}(t) = \sum_{j=1}^{n} r_{kj}x_j(t).$$

Întrucît sensul forței de inerție a fost admis (ca și pînă acum) conform principiului lui d'Alembert, rezultă că blocajele GLD sînt comprimate.

În formulare matriceală, expresiile de mai sus devin

$$\{R_i(t)\}_{n,1} = -\{I(t)\}_{n,1};\quad \{R_e(t)\}_{n,1} = [R]_{n,n}\,\{x(t)\}_{n,1}, \tag{3.20}$$

astfel încît ecuațiile (3.19) vor exprima explicit condițiile de echilibru dinamic instantaneu între forțele de inerție și forțele elastice

$$\{I(t)\}_{n,1} = [R]_{n,n}\,\{x(t)\}_{n,1}, \tag{3.21}$$

sau

$$I_k(t) = \sum_{j=1}^{n} r_{kj}x_j(t), \qquad k = 1, 2, \ldots n,$$

în conformitate cu premisele de operare în această metodă prezentate la începutul acestui subparagraf și în § 1.14.

Matricele care intervin în ecuația (3.21) au fost deja definite. În privința matricei de rigiditate dinamică $[R]$ (cuplată elastic) se face precizarea că se obține prin asamblarea vectorilor elastici $\{r\}_k$, $k = 1, 2, \ldots n$, definiți în fi-

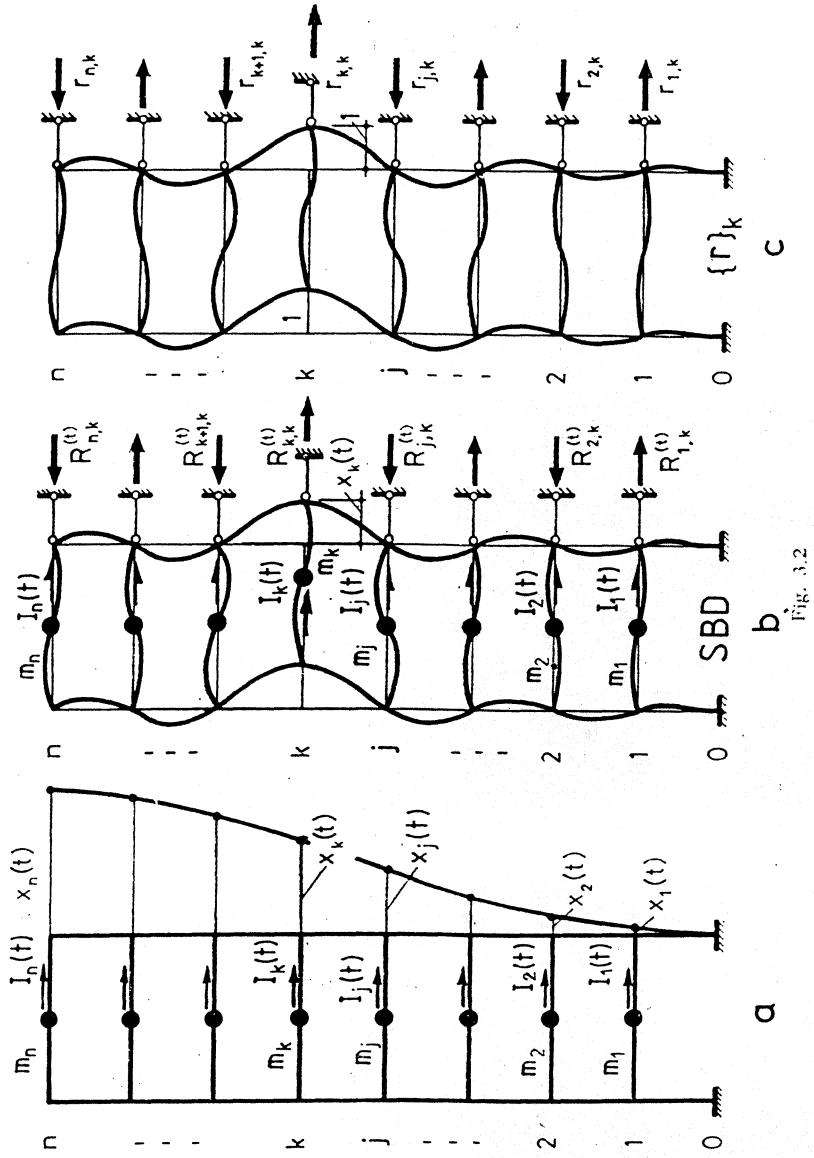


Fig. 3.2

gura 3.2, *c*. Deoarece vectorul forțelor de inerție are expresia (3.1), *ecuația generală a vibrațiilor libere* (diferențială de ordinul II cu coeficienți constanți) rezultă:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [R]\{x(t)\} = \{0\}. \tag{3.22}$$

Soluțiile care satisfac această ecuație fiind de tip armonic, datorită identității formale cu ecuația (2.10) corespunzătoare sistemelor cu 1 GLD, vor avea forma (3.4). Substituind soluțiile (3.4) în ecuația (3.22) se obține *ecuația generală a vibrațiilor proprii*:

$$([R] - \omega^2[M])\{A\} = \{0\}, \tag{3.23}$$

adică un sistem de ecuații algebric, liniar și omogen. Deoarece matricea de inerție este diagonală, nu se va mai introduce notația λ întrucît valoarea proprie ω^2 se depune direct pe diagonala principală a matricei $[R]$.

Din condițiile care au fost deja prezentate în § 3.1.1, rezultă direct *ecuația vectorilor proprii* prin anularea determinantului matricei sistemului de ecuații (3.23):

$$\Delta(\omega^2) = |[R] - \omega^2[M]| = 0 \tag{3.24}$$

și de asemenea *ecuația vectorilor proprii*, exprimată în ordonate adimensionale:

$$([R] - \omega_i^2[M])\{\Phi\}_i = \{0\}, \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{3.25}$$

Modul de operare cu privire la determinarea modurilor proprii de vibrație, adică a caracteristicilor dinamice proprii ale sistemelor exprimate prin matricea spectrală și matricea modală, precum și interpretările corespunzătoare, sînt identice cu cele expuse în metoda matricei de flexibilitate $[D]$.

În vederea aplicării metodelor numerice iterative de identificare a valorilor și vectorilor proprii, ecuația vibrațiilor proprii se poate exprima, în urma transformării (3.12), astfel:

$$([R] - \omega^2[M])\{\Phi\} = \{0\}. \tag{3.26}$$

Prin premultiplicare cu $[M]^{-1}$ (inversa matricei de inerție), ecuația (3.26) va avea forma:

$$([M]^{-1}[R] - \omega^2[I])\{\Phi\} = \{0\},$$

care se poate transforma în următoarea identitate:

$$[\mathcal{K}]\{\Phi\} = \omega^2\{\Phi\}, \tag{3.27}$$

unde

$$[\mathcal{K}] = [M]^{-1}[R] = [M]^{-1}[D]^{-1} = ([D][M])^{-1} = [\mathcal{D}]^{-1}, \tag{3.28}$$

deoarece matricele $[D]$ și $[R]$ sînt inverse (1.69).

Rezultă deci proprietatea:

$$[\mathcal{D}][\mathcal{K}] = [\mathcal{K}][\mathcal{D}] = [I], \tag{3.29}$$

similară cu proprietatea matricelor pur elastice (1.69), ceea ce dovedește că relațiile (3.17) și (3.27) sînt inverse. Se observă și în acest caz că $\{\Phi\}$ este un vector propriu al matricei $[\mathcal{K}]$, iar ω^2 valoarea proprie asociată a acestui vector.

Proprietățile (1.69) și (3.29) demonstrează că ecuațiile vibrațiilor proprii (3.15) și (3.26) sînt inverse. Într-adevăr, dacă se premultiplică ecuația (3.15) cu $[R]$ și se face comutarea termenilor se obține ecuația (3.26), întrucît $\lambda = 1/\omega^2$.

Se face mențiunea că ecuațiile valorilor și vectorilor proprii pot fi exprimate direct prin matricele $[\mathcal{D}]$ și $[\mathcal{K}]$.

3.1.3. Proprietatea de ortogonalitate a vectorilor proprii

Ecuația (3.26), scrisă sub forma unei identități,

$$\omega^2 [M] \{\Phi\} = [R] \{\Phi\},$$

se va particulariza pentru două moduri proprii de vibrație distincte $i \neq j$, deci

$$\omega_i^2 [M] \{\Phi\}_i = [R] \{\Phi\}_i, \tag{3.30}$$

$$\omega_j^2 [M] \{\Phi\}_j = [R] \{\Phi\}_j. \tag{3.31}$$

Prin transpunerea relației (3.30) rezultă:

$$\omega_i^2([M] \{\Phi\}_i)^T = ([R] \{\Phi\}_i)^T,$$

sau

$$\omega_i^2 \{\Phi\}_i^T [M]^T = \{\Phi\}_i^T [R]^T, \tag{3.32}$$

întrucît transpusa produsului a două matrice este egală cu produsul comutat al celor două matrice transpuse.

Deoarece $[M]^T = [M]$ și $[R]^T = [R]$, așa cum s-a demonstrat în § 1.5, relația (3.32) devine:

$$\omega_i^2 \{\Phi\}_i^T [M] = \{\Phi\}_i^T [R]. \tag{3.33}$$

Prin premultiplicarea expresiei (3.31) cu $\{\Phi\}_i^T$ și postmultiplicarea expresiei (3.33) cu $\{\Phi\}_j$ se obține:

$$\omega_i^2 \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j = \{\Phi\}_i^T [R] \{\Phi\}_j,$$

$$\omega_j^2 \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j = \{\Phi\}_i^T [R] \{\Phi\}_j$$

Scăzînd ultima relație din prima

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j = 0,$$

și avînd în vedere că cele două moduri de vibrații i și j sînt independente, adică

$$\omega_i \neq \omega_j, \quad i \neq j,$$

se obține următoarea relație finală:

$$\{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j = 0 \quad (i \neq j), \tag{3.34}$$

care reprezintă *proprietatea de ortogonalitate*, numită și condiția de ortogonalitate a vectorilor proprii, exprimată prin intermediul matricei de inerție.

Relația (3.34) are semnificație de produs scalar. Într-adevăr, dacă se dezvoltă condiția (3.34)

$$\{\Phi_{1,i}\ \Phi_{2,i} \dots \Phi_{k,i} \dots \Phi_{n,i}\} \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & \text{ZERO} & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_k & \\ \text{ZERO} & & & & \ddots \\ & & & & m_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_{1,j} \\ \Phi_{2,j} \\ \vdots \\ \Phi_{k,j} \\ \vdots \\ \Phi_{n,j} \end{Bmatrix} = 0$$

și se efectuează operația matriceală, proprietatea de ortogonalitate se va exprima prin următoarea relație simplă

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,i} \Phi_{k,j} = 0 \quad (i \neq k). \tag{3.35}$$

Proprietatea de ortogonalitate este o consecință directă a modului de variație a vectorilor proprii care sînt descriși de funcții armonice.

Aceeași proprietate poate fi demonstrată pornind de la observația că orice deformată dinamică este compatibilă cu legăturile sistemului și se află în echilibru dinamic instantaneu.

Dacă se consideră două deformate modale $\{A\}_i$ și $\{A\}_j$, independente, starea de echilibru dinamic instantaneu se va exprima pe baza teoremei reciprocității lucrului mecanic virtual (Maxwell-Betti), exprimată prin produse scalare. Întrucît în timpul mișcării, forțele de inerție care se manifestă pe direcția GLD, adică $\{I\}_i$ și $\{I\}_j$, sînt independente, deformata $\{A\}_i$ are caracter virtual pentru $\{I\}_j$, la fel deformata $\{A\}_j$ pentru $\{I\}_j$. Cele două deformate modale instantanee fiind compatibile cu legăturile și în echilibru, se poate scrie:

$$\{I\}_i^T \{A\}_j = \{I\}_j^T \{A\} = \{A\}_i^T \{I\}_j,$$

întrucît produsul scalar este comutativ.

Avînd în vedere soluția (3.4), transformarea (3.12) și expresia forțelor de inerție (3.1) se obține:

$$(\omega_i^2 [M] A_{1,i} \{\Phi\}_i)^T A_{1,j} \{\Phi\}_j = (A_{1,i} \{\Phi\}_i)^T \omega_j^2 [M] A_{1,j} \{\Phi\}_j,$$

sau

$$\omega_i^2 \{\Phi\}_i [M]^T \{\Phi\}_j A_{1,i} A_{1,j} = \omega_j^2 \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j A_{1,i} A_{1,j},$$

deoarece

$$[M]^T = [M].$$

Este evident că prin simplificare și trecerea membrului drept în stînga se obține proprietatea (3.34).

În același mod, se poate demonstra că proprietatea de ortogonalitate a vectorilor proprii se poate exprima prin matricea de flexibilitate (ecuația 3.15) sau prin matricea de rigiditate (ecuația 3.26)

$$\{\Phi\}_i^T [D] \{\Phi\}_j = 0, \quad (i \neq j), \tag{3.36}$$

$$\{\Phi\}_i^T [R] \{\Phi\}_j = 0, \quad (i \neq j) \tag{3.37}$$

și de asemenea prin intermediul matricei de amortizare

$$\{\Phi\}_i^T [C] \{\Phi\}_j = 0 \quad (i \neq j). \tag{3.38}$$

În concluzie, proprietatea de ortogonalitate a vectorilor proprii se exprimă în raport cu toate matricele primare de definire ale sistemului dinamic (inerțială, disipativă și elastică).

3.1.4. Evaluarea răspunsului liber în baza condițiilor inițiale date

Deplasările dinamice instantanee, pe direcția GLD, corespunzătoare modului i de vibrație se obțin utilizînd soluția (3.4), adică:

$$x_{k,i}(t) = A_{k,i} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (k, i = 1, 2, \ldots n)$$

Deplasările dinamice instantanee totale, pe direcția GLD, se obțin prin superpoziție modală

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{k,i}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_{k,i} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{3.39}$$

și vor caracteriza mișcarea liberă a tuturor punctelor de aplicație a maselor.

Se observă că fiecare expresie de tipul (3.39) conține două constante de integrare $A_{k,i}$ și φ_i și deci, pentru toate deplasările vor interveni $2n$ constante. Aceste constante urmează a fi determinate în baza condițiilor inițiale ale vibrațiilor libere, exprimate în deplasări și viteze.

Substituind transformarea (3.12), expresia (3.39) se poate scrie sub o formă mai convenabilă

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{k,i} A_{1,i} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad k = 1, 2, \ldots n \tag{3.40}$$

în care noile coordonate vor fi amplitudinea de referință a deplasării $A_{1,i}$ și faza φ_i.

În vederea simplificării operațiilor de calcul, relația (3.40) se va înlocui prin

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{k,i} (M_i \cos \omega_i t + N_i \sin \omega_i t), \tag{3.41}$$

analog situațiilor analizate în § 2.1.

Între constantele din expresiile (3.40) și (3.41) există cunoscutele relații de legătură

$$A_{1,i} = \sqrt{M_i^2 + N_i^2}, \qquad \operatorname{tg} \varphi_i = \frac{M_i}{N_i}.$$

Cele $2n$ condiții inițiale, la timpul $t = 0$, vor fi următoarele:

$$x_k(0) = x_{k,0}, \text{ și } \dot{x}_k(0) = v_{k,0}, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Prin înlocuirea condițiilor inițiale în (3.41) se obține:

$$x_{k,0} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{k,i} M_i, \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{3.42}$$

$$v_{k,0} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Phi_{k,i} N_i, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{3.43}$$

Dacă se multiplică expresiile (3.42) și (3.43) cu $m_k \Phi_{k,j}$ și apoi se sumează în raport cu GLD $k = 1, 2, \ldots n$, rezultă:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j} x_{k,0} = \sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j} \sum_{i=1}^{n} \Phi_{k,i} M_i,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j} v_{k,0} = \sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Phi_{k,i} N_i.$$

Dezvoltînd sumele în raport cu i și ținînd seama de proprietatea de ortogonalitate a vectorilor proprii (3.35), se obțin următoarele egalități:

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j} x_{k,0} = M_j \sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j}^2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j} v_{k,0} = N_j \omega_j \sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j}^2,$$

din care se determină expresiile generale ale constantelor de integrare, în funcție de caracteristicile dinamice proprii ale sistemului și condițiile inițiale ale mișcării:

$$M_j = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j} x_{k,0}}{\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j}^2}, \tag{3.44}$$

$$N_j = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j} v_{k,0}}{\omega_j \sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,j}^2} \quad (j = 1, 2, \ldots n) \tag{3.45}$$

Expresiile generale (3.44) și (3.45) permit evaluarea răspunsului liber al oricărui sistem dinamic cu nGLD, în care s-a neglijat influența amortizării. Prin particularizare, dacă $n = 1$, se obțin constantele de integrare corespunzătoare sistemelor cu 1 GLD.

În situația în care termenii care compun deplasarea totală (3.41) definesc o serie Fourier, mișcarea liberă va avea caracter periodic. În general, vibrația liberă are o variație în timp oarecare.

Se constată că în cazul în care condițiile inițiale corespund unui anumit vector propriu, variația deplasărilor instantanee pe direcția GLD coincide cu configurația formei proprii de vibrație respective.

Astfel, dacă se consideră numai condițiile inițiale

$$x_k(0) = x_0\Phi_{k,j}, \qquad \dot{x}_k(0) = 0,$$

rezultă

$$M_j = x_0, \qquad N_j = 0,$$

și deci

$$A_{1,j} = x_0, \quad \operatorname{tg}\varphi_i = \infty, \quad \varphi_i = \pi/2,$$

toate celelalte constante fiind nule. Introducînd în expresia (3.40) aceste constante rezultă că configurația geometrică a deplasărilor dinamice instantanee coincide cu vectorul propriu de ordinul j:

$$x_k(t) = x_0\Phi_{k,j}\sin(\omega_i t + \pi/2).$$

Acest aspect particular al vibrațiilor libere stă la baza tehnicilor experimentale de identificare a caracteristicilor dinamice proprii ale structurilor.

Variația deplasărilor maxime modale, în mișcarea liberă, se obține prin multiplicarea ordonatelor $\Phi_{k,i}$ ale vectorilor adimensionali (3.14) cu constanta $A_{1,i}$, deci

$$\{x\}_i = A_{1,i}\{\Phi\}_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

rezultînd în dreptul ordonatei „pivot" $\Phi_{1,i} = 1$ chiar valoarea efectivă a amplitudinii deplasării de referință, adică $A_{1,i}$.

3.2. VIBRAȚII FORȚATE PRODUSE DE ACȚIUNI ARMONICE. RĂSPUNS FORȚAT TOTAL

3.2.1. Utilizarea metodei matricei de flexibilitate dinamică [D]

Se va considera sistemul dinamic din figura 3.3 asupra căruia acționează forțele perturbatoare, periodice și sincrone, $F_h(t) = F_{h,0}\sin\theta t$ $(h = 1, 2, \ldots m)$ avînd amplitudinile $F_{h,0}$ și pulsația unică θ. Acțiunile exterioare, variabile

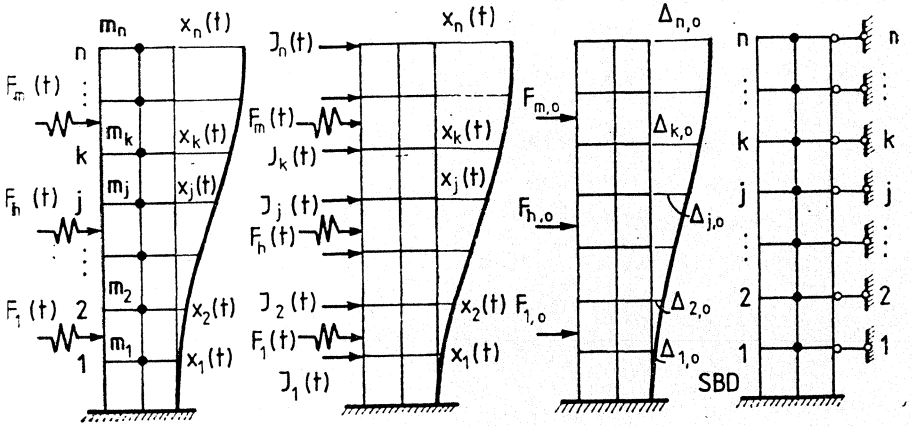


Fig. 3.3

în timp, vor genera pe direcția GLD deplasări, viteze și accelerații, corespunzătoare regimului forțat de solicitare. Rezultă deci, că în orice moment al mișcării, în afara forțelor perturbatoare exterioare $F_h(t)$, se manifestă asupra sistemului forțe de inerție $J_k(t)$, pe direcția GLD $k = 1, 2, \ldots n$, care reprezintă efecte dinamice suplimentare produse de aplicarea acțiunilor exterioare.

Ecuațiile de mișcare se obțin prin exprimarea condiției de compatibilitate a deformatei dinamice instantanee a sistemului, acționat simultan de forțele de inerție $J_k(t)$ și forțele perturbatoare $F_h(t)$, în conformitate cu metodele de operare expuse în § 1.14. În consecință, rezultă:

$$x_k(t) = \sum_{j=1}^{n}\delta_{kj}J_j(t) + \sum_{h=1}^{m}\delta_{kh}F_h(t), \quad k = 1, 2, \ldots n,$$

sau în formulare matriceală:

$$\{x(t)\}_{n,1} = [D]_{n,n}\{J(t)\}_{n,1} + [\bar{D}]_{n,m}\{F(t)\}_{m,1}. \tag{3.46}$$

În ecuația generală a vibrațiilor forțate (3.46), $[D]$ reprezintă matricea de flexibilitate dinamică a sistemului (exprimată în coordonate dinamice, adică pe direcția GLD), iar $[\bar{D}]$ are caracteristica unei matrice de transfer a efectelor dinamice din coordonatele forțelor perturbatoare $h = 1, 2, \ldots m$ pe direcția GLD $k = 1, 2, \ldots n$. Un coeficient al acestei matrice δ_{kh} (de natura unui coeficient de flexibilitate) reprezintă deplasarea produsă pe direcția GLD k atunci cînd pe direcția h a forței perturbatoare acționează o forță egală cu unitatea. Rezultă deci că matricea $[\bar{D}]$, cu coeficienți dimensionali, se exprimă în coordonate mixte $h = 1, 2, \ldots m$ (aparținînd forțelor perturbatoare) și $k = 1, 2, \ldots n$ (aparținînd sistemului discret).

Ecuația (3.46) se poate explicita dacă se substituie expresiile forțelor de inerție și perturbatoare:

$$\{J(t)\} = -[M]\{\ddot{x}(t)\}\,; \quad \{F(t)\} = \{F_0\}\sin\theta t, \tag{3.47}$$

rezultînd:

$$[D][M]\{\ddot{x}(t)\} + \{x(t)\} = [\bar{D}]\{F_0\}\sin\theta t. \tag{3.48}$$

Se poate observa că produsul

$$[\bar{D}]_{n,m}\{F_0\}_{m,1} = \{\Delta_0\}_{n,1}, \tag{3.49}$$

definește vectorul deplasărilor statice pe direcția GLD produse de acțiunea simultană a valorilor de amplitudine $F_{h,0}$, corespunzătoare forțelor perturbatoare. Într-adevăr, rezultă din relația (3.49) și din figura 3.3 că un element al v ectorului deplasărilor are expresia:

$$\Delta_{k,0} = \sum_{h=1}^{n}\delta_{kh}F_{h,0}.$$

În aceste condiții ecuația (3.48) devine

$$[D][M]\{\ddot{x}(t)\} + \{x(t)\} = \{\Delta_0\}\sin\theta t. \tag{3.50}$$

S-a obținut astfel un sistem de ecuații diferențiale de ordinul II și coeficienți constanți, analog cu ecuația (2.41) din cazul sistemelor cu 1 GLD.

Soluția generală (răspunsul dinamic exprimat în deplasări totale) a ecuației (3.50) este de forma

$$\{x(t)\} = \{x_L(t)\} + \{x_F(t)\}.$$

Soluția ecuației omogene $x_L(t)$, care reprezintă mișcarea liberă tranzitorie a sistemului, poate fi neglijată datorită influenței amortizării. Prin urmare, mișcarea sistemului va fi exprimată numai în regim forțat și permanent. În cazul acțiunilor armonice, răspunsul forțat al sistemului dinamic va avea caracter staționar-stabilizat și permanent, adică

$$\{x(t)\} = \{x_F(t)\}.$$

Pe baza concluziilor din § 1.12 și a identității formale existente între ecuațiile (3.50) și (2.41) răspunsul permanent al sistemului, la acțiuni de tip armonic, are totdeauna o variație armonică de forma:

$$\{x(t)\} = \{x\} \sin \theta t, \tag{3.51}$$

unde s-a notat cu $\{x\}$ vectorul deplasărilor dinamice maxime (în regim forțat), iar cu θ pulsația mișcării (identică cu cea a acțiunilor). Substituirea soluției (3.51) în ecuația (3.50) necesită următoarele explicitări:

$$\{\ddot{x}(t)\} = -\theta^2 \{x\} \sin \theta t,$$

$$\{J(t)\} = \theta^2 [M] \{x\} \sin \theta t = \{J\} \sin \theta t,$$

unde

$$\{J\} = \theta^2 [M] \{x\}, \tag{3.52}$$

reprezintă vectorul forțelor de inerție maxime, de amplitudine, cu caracter alternant.

Trebuie făcută precizarea că forțele de inerție care se manifestă pe direcția GLD în mișcarea liberă (§ 3.1) s-au notat cu $I_k(t)$, în timp ce forțele de inerție (pe direcția aceleași GLD), produse în regim forțat și permanent s-au notat cu $J_k(t)$. Această ultimă categorie de forțe de inerție pune în evidență efectul aplicării dinamice a acțiunilor exterioare.

Prin înlocuirea expresiilor de mai sus în ecuația (3.50) rezultă o ecuație algebrică și liniară de forma:

$$-\theta^2 [D] [M] \{x\} + \{x\} = \{\Delta_0\}. \tag{3.53}$$

Rezolvarea problemei se va face în raport cu forțele de inerție maxime care furnizează efectele maxime totale produse de acțiunea forțelor perturbatoare. Evaluarea răspunsului dinamic maxim sau instantaneu prin forțe de inerție este specific metodei matricei $[D]$, care se mai numește și „metoda forțelor de inerție".

Din relația (3.52), prin premultiplicare cu $\frac{1}{\theta^2} [M]^{-1}$ se obține vectorul deplasărilor dinamice maxime:

$$\{x\} = \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1} \{J\}. \tag{3.54}$$

Expresia (3.54) pune în evidență legătura existentă între răspunsul total maxim exprimat prin forțe de inerție sau deplasări. Rezultă că operarea în raport cu forțele de inerție sau cu deplasările dinamice reprezintă o problemă de opțiune.

Înlocuind (3.54) în ecuația (3.53) se obține:

$$\left([D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1}\right) \{J\} + \{\Delta_0\} = \{0\}. \tag{3.55}$$

Dacă se introduce notația:

$$[D^*] = [D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1},$$

ecuația (3.55) devine:

$$[D^*] \{J\} + \{\Delta_0\} = \{0\}. \tag{3.56}$$

Matricea $[D^*]$, care va fi denumită *matricea de flexibilitate corectată* sau modificată, se obține din matricea originală de flexibilitate în care numai coeficienții aparținînd diagonalei principale sînt astfel corectați:

$$\delta^*_{kk} = \delta_{kk} - \frac{1}{m_k \theta^2}, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Inversa matricei de inerție (a maselor) va fi tot o matrice diagonală ale cărei elemente sînt inversele celor din matricea originală, adică:

$$[M]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & & & & \\ & \frac{1}{m_2} & & \text{ZERO} & \\ & & \ddots & & \\ & \text{ZERO} & & \frac{1}{m_k} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & \frac{1}{m_n} \end{bmatrix}.$$

Prin rezolvarea ecuației (3.56) se obțin valorile maxime ale forțelor de inerție:

$$\{J\} = -[D^*]^{-1} \{\Delta_0\} = -\frac{\text{adj}\,[D^*]}{|D^*|} \{\Delta_0\} \tag{3.57}$$

În relația (3.57) adj $[D^*]$ este adjuncta matricei $[D^*]$, care se poate obține prin metoda cofactorului, iar $|D^*|$ determinantul aceleiași matrice.

Pentru ca efectele dinamice să rezulte cu valori finite este necesar ca valoarea determinantului $|D^*|$ să fie diferită de zero.

În situația în care efectele dinamice produc fenomene de amplificare (teoretic tind către infinit deoarece s-a neglijat prezența amortizării), se produce *fenomenul de rezonanță*, și deci:

$$|D^*| = \left|[D] - \frac{1}{\theta^2} [M]^{-1}\right| = |\theta^2 [D] [M] - [I]| = 0. \tag{3.58}$$

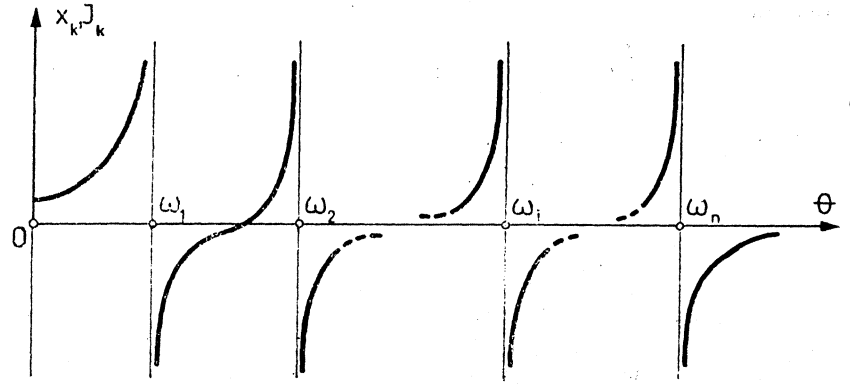


Fig. 3.4

Condiția de rezonanță (3.58) este satisfăcută numai în cazul cînd $\theta = \omega_i$ ($i = 1, 2, ...$), întrucît această condiție coincide cu ecuația valorilor proprii (3.7).

În concluzie, într-un sistem cu nGLD, acționat de forțe perturbatoare armonice se pot produce n rezonanțe deoarece condiția (3.58) este îndeplinită de toate valorile proprii ale sistemului, adică $\theta = \omega_1$, $\theta = \omega_2$, ... $\theta = \omega_i$, ... $\theta = \omega_n$, dacă $\theta \geqslant \omega_n$. Deci în cazul sistemelor cu nGLD se poate produce *fenomenul de rezonanță multiplă*, așa cum rezultă din variația răspunsului maxim reprezentat în figura 3.4. În rezonanță, răspunsul sistemului este puternic amplificat (teoretic infinit) indiferent în ce mărimi specifice se exprimă. În realitate răspunsul în rezonanță este limitat datorită influenței favorabile a capacității de amortizare internă a sistemului (v. § 2.2.2).

Răspunsul maxim total, exprimat prin deplasări dinamice x_d pe direcția GLD, se obține din ecuația (3.53) în care se face substituția (3.52):

$$\{x\} = \theta^2 [D] [M] \{x\} + \{\Delta_0\},$$

sau

$$\{x_d\} = [D] \{J\} + \{\Delta_0\} = [D] \{J\} + [\bar{D}]\{F_0\}, \tag{3.59}$$

având în vedere caracterul alternant al efectelor dinamice. Este evident că aceste deplasări sînt raportate la poziția de echilibru static al sistemului.

3.2.2. **Utilizarea metodei matricei de rigiditate dinamică [R]**

Conceptul acestei metode a fost expus în § 3.1.2. Sistemul dinamic, precum și caracteristicile acțiunilor se mențin identice situației analizate anterior și reprezentate în figura 3.3. Sistemul de bază dinamic (SBD) admis și asupra căruia se operează se obține prin blocarea tuturor GLD (fig. 3.3).

Ecuațiile de mișcare, a căror semnificație este de echilibru dinamic instantaneu, se obțin prin anularea reacțiunilor totale din blocajele SBD acționat simultan de forțele de inerție (generate de accelerațiile instantanee), forțele elastice (generate de deplasările instantanee) și forțele exterioare de tip armonic.

Rezultă deci:

$$R_k(t) = R_{k,i}(t) + R_{k,e}(t) + R_{k,F}(t) = 0 \quad (k = 1, 2, ...n)$$

sau în exprimare matriceală

$$\{R(t)\}_{n,1} = \{R_i(t)\}_{n,1} + \{R_e(t)\}_{n,1} + \{R_F(t)\}_{n,1} = \{0\} \tag{3.60}$$

Reacțiunile în blocajele GLD k produse de forțele de inerție i, forțele elastice e și forțele exterioare F au următoarele expresii:

$$R_{k,i}(t) = -J_k(t), \quad \{R_i(t)\}_{n,1} = -\{J(t)\}_{n,1}$$

$$R_{k,e}(t) = \sum_{j=1}^{n} r_{kj} x_j(t), \quad \{R_e(t)\}_{n,n} = [R]_{n,n} \{x(t)\}_{n,1}$$

$$R_{k,F}(t) = \sum_{h=1}^{m} r_{kh} F_h(t), \quad \{R_F(t)\}_{n,1} = [\bar{R}]_{n,m} \{F(t)\}_{m,1}$$

Prin substituirea acestor expresii în ecuația (3.60) se obține ecuația generală a vibrațiilor forțate sub forma:

$$-\{J(t)\}_{n,1} + [R]_{n,n} \{x(t)\}_{n,1} + [\bar{R}]_{n,m} \{F(t)\}_{m,1} = \{0\}. \tag{3.61}$$

În această ecuație $[R]$ reprezintă matricea de rigiditate dinamică a sistemului (ai cărei coeficienți se exprimă prin reacțiuni unitare în SBD), iar $[\bar{R}]$ are semnificația unei matrice de transfer a efectelor dinamice produse de forțele perturbatoare raportate la coordonatele $h = 1, 2, ... m$, pe direcția GLD $k = 1, 2, ... n$. Se constată că matricea $[\bar{R}]_{n,m}$, ca și matricea $[\bar{D}]_{n,m}$, se exprimă în coordonate mixte. Un coeficient de tipul r_{kh} reprezintă reacțiunea care se manifestă în blocajul GLD k din SBD, cînd pe direcția h a forței perturbatoare acționează o forță egală cu unitatea. Toți coeficienții care definesc matricea $[\bar{R}]$ rezultă negativi, deoarece forțele egale cu unitatea $F_{h,0} = 1$, aplicîndu-se asupra sistemului în sensul pozitiv al versorilor coordonatelor GLD (v. fig. 3.3), au asupra blocajelor SBD efecte mecanice de compresiune.

Dacă se ține seama de expresiile (3.47), ecuația generală a vibrațiilor forțate (3.61) se va exprima printr-un sistem de ecuații diferențiale de ordinul II cu coeficienți constanți astfel:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [R] \{x(t)\} + [\bar{R}] \{F_0\} \sin \theta t = \{0\}. \tag{3.62}$$

Introducînd notația:

$$[\bar{R}]_{n,m}\{F_0\}_{n,1} = \{R_0\}_{n,1},$$

în care

$$R_{k,0} = \sum_{h=1}^{m} r_{kh} F_{h,0}$$

reprezintă reacțiunile în blocajele GLD din SBD produse de acțiunea statică simultană a valorilor de amplitudine $F_{h,0}$ a forțelor perturbatoare, ecuația (3.62) mai poate fi scrisă sub forma:

$$[M] \{\ddot{x}(t)\} + [R] \{x(t)\} + \{R_0\} \sin \theta t = \{0\}. \tag{3.63}$$

Răspunsul forțat (permanent și staționar) al sistemului, exprimat în deplasări dinamice instantanee, fiind de forma (3.51), ecuația de mișcare (3.62) devine

$$([R] - \theta^2 [M]) \{x\} + \{R_0\} = \{0\}. \tag{3.64}$$

În acest caz rezolvarea problemei se va face în raport cu deplasările maxime (sau instantanee), această categorie de necunoscute fiind specifică metodei $[R]$ care se mai numește „metoda deplasărilor dinamice". Forțele de inerție pot fi determinate direct prin intermediul relației (3.52).

Dacă în ecuația (3.64) se substituie notația:

$$[R^*] = [R] - \theta^2 [M],$$

rezultă:

$$[R^*] \{x\} + \{R_0\} = \{0\}, \tag{3.65}$$

Noua matrice $[R^*]$, numită *matrice de rigiditate corectată* sau modificată, derivă din matricea originală de rigiditate în care numai coeficienții principali sînt corectați astfel:

$$r^*_{kk} = r_{kk} - m_k \theta^2, \quad k = 1, 2, \ldots n.$$

Vectorul deplasărilor maxime, care definește răspunsul maxim total, se obține prin rezolvarea ecuației (3.65) adică:

$$\{x\} = -[R^*]^{-1} \{R_0\} = -\frac{\text{adj}\,[R^*]}{|R^*|} \{R_0\} \tag{3.66}$$

În relația (3.66) s-a notat prin adj $[R^*]$ adjuncta matricei $[R^*]$, iar prin $|R^*|$ determinantul acesteia, a cărui valoare trebuie să fie diferită de zero pentru ca efectele dinamice să rezulte limitate.

În acest caz *fenomenul de rezonanță multiplă* rezultă din condiția:

$$|R^*| = |[R] - \theta^2 [M]| = 0, \tag{3.67}$$

care este satisfăcută numai cînd pulsația excitației θ are valori egale cu una din pulsațiile proprii ale sistemului ω_i, adică $\theta = \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots n$. În această situație condiția de rezonanță (3.67) devine identică cu ecuația valorilor proprii (3.24). În § 3.2.1 au fost prezentate unele comentarii cu privire la fenomenul de rezonanță.

Răspunsul maxim total, exprimat prin forțe dinamice F_d pe direcția GLD, se obține din ecuația (3.64) în care se înlocuiește expresia (3.52)

$$\{F_d\} = [R] \{x_d\} = \{J\} + \{R_0\}. \tag{3.68}$$

Se poate stabili o relație de legătură între matricele mixte $[\bar{D}]$ și $[\bar{R}]$. Dacă ecuația (3.61) se premultiplică cu matricea $[D]_{n,n}$ rezultă:

$$-[D]_{n,n} \{J(t)\}_{n,1} + [D]_{n,n} [R]_{n,n} \{x(t)\}_{n,1} + [D]_{n,n} [\bar{R}]_{n,m} \{F(t)\}_{m,1} = \{0\} \tag{3.69}$$

Ținînd seama de proprietatea (1.69), adică $[D][R] = [I]$, precum și de observația anterioară cu privire la semnul negativ al coeficienților matricei $[\bar{R}]$, prin identificarea ecuațiilor (3.69) și (3.46) se obține următoarea relație de legătură:

$$[\bar{D}]_{n,m} = [D]_{n,n} [\bar{R}]_{n,m}, \tag{3.70}$$

în care s-a făcut abstracție de semne. Această relație este identică cu (1.74), demonstrată în § 1.14.

Dacă se postmultiplică relația (3.70) cu vectorul $\{F_0\}$ se obține

$$[\bar{D}] \{F_0\} = [D] [\bar{R}] \{F_0\}$$

sau

$$\{\Delta_0\} = [D] \{R_0\}, \tag{3.71}$$

ceea ce dovedește că expresiile (3.59) și (3.68) sînt inverse sau chiar identice.

Prin premultiplicarea expresiei (3.71) cu $[R]$ se poate explicita vectorul reacțiunilor din blocajele SBD produse de $\{F_0\}$:

$$\{R_0\} = [R] \{\Delta_0\}$$

astfel încît forțele dinamice (3.68) se pot exprima și astfel:

$$\{F_d\} = \{J\} + [R] \{\Delta_0\}. \tag{3.72}$$

În cazul în care forțele perturbatoare se aplică pe direcția GLD, $h = k = 1, 2, \ldots n$, matricea $[\bar{R}]$ se confundă cu matricea unitate, deoarece $[\bar{R}] = [I]$ și în consecință relația (3.70) devine identitate, iar $\{R_0\} = -\{F_0\}$, semnul minus punînd în evidență efectul mecanic real asupra blocajelor din SBD.

Expresia (3.72) se poate obține direct prin premultiplicarea relației (3.59) cu $[R]$, ceea ce arată că cele două metode utilizate sînt inverse, întrucît matricele în raport cu care s-a operat au această proprietate.

În analiza vibrațiilor proprii, libere și forțate se pot utiliza *proprietățile de simetrie structurală*, specifice sistemelor dinamice. În acest sens, pe lîngă simetrie geometrică și simetrie elastică (în care se includ legăturile interioare și exterioare), sistemul trebuie să posede simetrie inerțială (în privința distribuției și mărimii maselor), precum și simetrie disipativă. Deși criteriile de simetrie sînt mai complexe decît în statica structurilor, avantajele ce decurg sînt la fel de importante. Folosirea simetriei conduce la decuplarea ecuațiilor de condiție, în funcție de natura necunoscutelor (GLD simetrice sau antisimetrice), și de asemenea permite ca operațiile numerice să fie efectuate pe jumătate de structură.

3.3. CAZUL PARTICULAR AL SISTEMULUI DINAMIC CU DOUĂ GRADE DE LIBERTATE

Se consideră sistemul cu două grade de libertate din figura 3.5, *a*, acționat de forțele perturbatoare armonice $F_1(t)$ și $F_2(t)$. În aceeași figură sînt prezentate semnificațiile coeficienților de flexibilitate (fig. 3.5, *b*, *c*) și coeficienților de rigiditate (fig. 3.5, *d*, *e*).

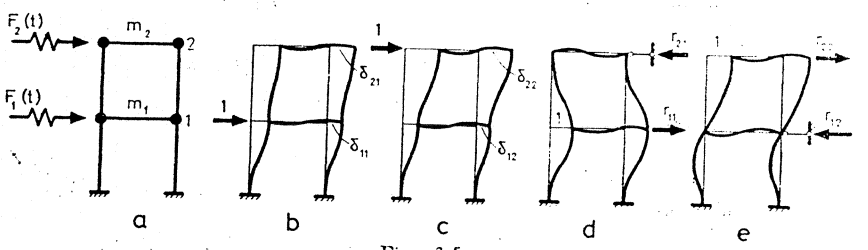


Fig. 3.5.

În conformitate cu relația (1.69) se poate stabili direct legătura dintre elementele matricelor $[D]$ și $[R]$, întrucît cele două matrice sînt inverse, adică:

$$[R] = [D]^{-1} = \frac{\text{adj}\,[D]}{|D|}, \tag{3.73}$$

unde

adj $[D]$ este matricea adjunctă a matricei $[D]$;

$|D|$ — determinantul format din elementele matricei $[D]$.

Efectuînd operația (3.73) se obține:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2} \begin{bmatrix} \delta_{22} & -\delta_{21} \\ -\delta_{12} & \delta_{11} \end{bmatrix}, \tag{3.74}$$

relație care permite să se determine coeficienții de rigiditate dacă se cunosc coeficienții de flexibilitate sau invers.

În egalitatea (3.74) toți coeficienții r și δ își conțin semnele rezultate prin calcul. Spre exemplu, în cazul concret din figura 3.5 toți coeficienții δ sînt pozitivi, coeficienții r_{11} și r_{22} sînt de asemenea pozitivi, iar coeficienții $r_{12} = r_{21}$ rezultă negativi.

Toate expresiile de calcul privind caracteristicile dinamice proprii ale sistemului (valori și vectori proprii), precum și răspunsul la vibrații forțate (prin cele două metode expuse), se obțin prin particularizarea relațiilor cuprinse în § 3.1 și 3.2. Este evident că analiza dinamică va fi substanțial simplificată datorită faptului că ecuația caracteristică este un polinom de gradul doi, iar formele proprii rezultă dintr-o ecuație cu o singură necunoscută. Răspunsul la vibrații forțate se reduce la rezolvarea unui sistem de două ecuații algebrice liniare.

În cadrul aplicațiilor numerice este prezentată analiza completă a unui asemenea sistem cu două grade de libertate.

3.4. APLICAȚII

Aplicația 3.4.1. Să se determine pulsațiile și formele proprii de vibrație ale sistemului oscilant cu două grade de libertate dinamică din figura 3.6, folosind metoda forțelor de inerție (matricea de flexibilitate).

Pulsațiile proprii se obțin prin rezolvarea ecuației caracteristice

$$|[D]\,[M] - \lambda\,[I]| = 0,$$

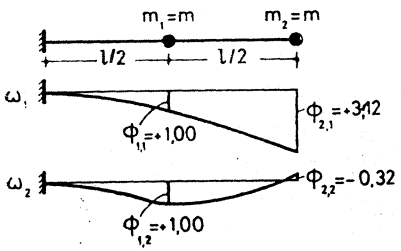


Fig. 3.6.

unde $\lambda = 1/\omega^2$. Deplasările unitare, care se calculează prin metodele staticii structurilor, au expresiile:

$$EI\delta_{11} = l^3/24; \quad EI\delta_{22} = l^3/3;$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = 5l^3/48.$$

Ținînd seama de aceste expresii, precum și de faptul că $m_1 = m_2 = m$, matricele de flexibilitate și inerție vor fi:

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{l^3}{48EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

astfel încît ecuația caracteristică va avea forma:

$$\left| \frac{ml^3}{48EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0.$$

Prin efectuarea operațiilor matriceale corespunzătoare și introducînd pentru simplificarea calculului notația:

$$\alpha = \frac{48EI}{ml^3}\lambda,$$

ecuația caracteristică devine

$$\begin{vmatrix} (2-\alpha) & 5 \\ 5 & (16-\alpha) \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltînd acest determinant, se obține ecuația

$$\alpha^2 - 18\alpha + 7 = 0,$$

de unde rezultă

$$\alpha_1 = 17{,}6 = \frac{48EI}{ml^3}\lambda_1, \qquad \alpha_2 = 0{,}40 = \frac{48EI}{ml^3}\lambda_2,$$

și deci

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = 1{,}65\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = 10{,}95\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

Vectorii proprii de vibrație se obțin din ecuația (3.13) în care se vor înlocui succesiv valorile proprii obținute mai sus. Folosind în continuare valorile α, ecuațiile vectorilor proprii se reduc la sistemul:

$$\left.\begin{aligned} (2-\alpha_i)\Phi_{1,i} + 5\Phi_{2,i} = 0 \\ 5\Phi_{1,i} + (16-\alpha_i)\Phi_{2,i} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2)$$

Întrucît se va considera $\Phi_{1,1} = \Phi_{1,2} = +1{,}00$ (valori arbitrare), prin înlocuirea succesivă a valorilor proprii $\alpha_1 = 17{,}6$ și $\alpha_2 = 0{,}40$ se obțin următoarele ordonate ale celor două forme de vibrație:

$$\Phi_{2,1} = +3{,}12, \quad \Phi_{2,2} = -0{,}32.$$

Pentru verificare se va folosi condiția de ortogonalitate (3.34):

$$\sum_{k=1}^{3} m_k \Phi_{k,1} \Phi_{k,2} = m(+1{,}00)(+1{,}00) + m(+3{,}12)(-0{,}32) = 0.$$

Aplicația 3.4.2. Pentru cadrul cu trei niveluri din figura 3.7 se cere să se determine valorile și vectorii proprii prin metoda deplasărilor dinamice instantanee (matricei de rigiditate). Se consideră că riglele cadrului au o rigiditate mult mai mare decît cea a stîlpilor. Teoretic se presupune că riglele sînt perfect rigide astfel încît cadrul va efectua numai oscilații orizontale (laterale). Deoarece în cazul cadrelor etajate se admite ipoteza concentrării maselor la fiecare nivel, rezultă că din punct de vedere dinamic sistemul oscilant va avea trei grade de libertate.

Determinarea pulsațiilor proprii se face cu ajutorul ecuației caracteristice

$$|[R] - \omega^2 [M]| = 0.$$

Coeficienții de rigiditate, sau reacțiunile unitare, a căror semnificație a fost dată în cuprinsul § 1.5.3, s-au obținut în urma unor operații statice simple pe baza schemelor prezentate în figura 3.7. Acești coeficienți au rezultat:

$$r_{11} = 156\ EI/h^3, \quad r_{12} = -60\ EI/h^3, \quad r_{13} = 0,$$
$$r_{21} = -60\ EI/h^3, \quad r_{22} = 96\ EI/h^3, \quad r_{23} = -36EI/h^3,$$
$$r_{31} = 0, \quad r_{32} = -36EI/h^3, \quad r_{33} = 36EI/h^3.$$

Avînd în vedere aceste expresii, precum și mărimile maselor corespunzătoare fiecărui nivel $m_1 = 2m$, $m_2 = 2m$, $m_3 = m$, matricele de rigiditate și de inerție vor avea forma următoare:

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \frac{12EI}{h^3} \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

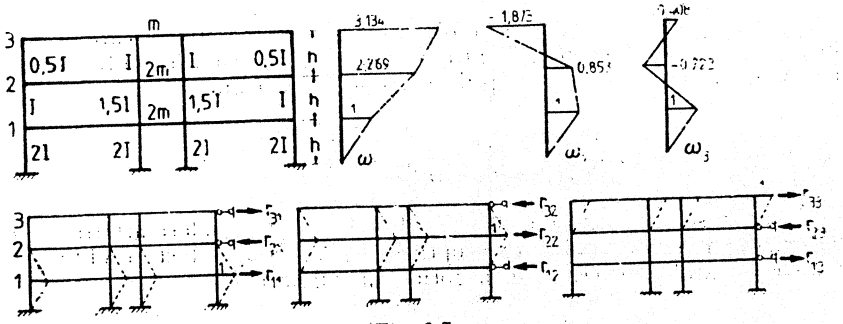


Fig. 3.7.

Dacă se introduce notația

$$\alpha = \frac{mh^3}{12EI}\omega^2,$$

ecuația caracteristică se reduce astfel

$$\left| \begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} (13-2\alpha) & 5 & 0 \\ -5 & (8-2\alpha) & -3 \\ 0 & -3 & (3-\alpha) \end{vmatrix} = 0.$$

Prin dezvoltarea determinantului rezultă ecuația

$$4\alpha^3 - 54\alpha^2 + 187\alpha - 120 = 0,$$

ale cărei soluții sînt:

$$\alpha_1 = 0{,}827 = \frac{mh^3}{12EI}\omega_1^2, \quad \alpha_2 = 4{,}366 = \frac{mh^3}{12EI}\omega_2^2, \quad \alpha_3 = 8{,}307 = \frac{mh^3}{12EI}\omega_3^2.$$

În baza acestor relații se deduc următoarele valori proprii (pulsații) ale sistemului oscilant:

$$\omega_1 = 3{,}151\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}, \quad \omega_2 = 7{,}238\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}, \quad \omega_3 = 9{,}986\sqrt{\frac{EI}{mh^3}}.$$

Vectorii proprii se deduc din ecuația generală (3.25) care aplicată cazului analizat se transformă într-un sistem algebric de trei ecuații și anume:

$$\left.\begin{aligned} &(13-2\alpha_i)\,\Phi_{1,i} - 5\Phi_{2,i} = 0 \\ &-5\Phi_{1,i} + (8-2\alpha_i)\,\Phi_{2,i} - 3\Phi_{3,i} = 0 \\ &-3\Phi_{2,i} + (3-\alpha_i)\,\Phi_{3,i} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Dacă se admite că $\Phi_{1,1} = \Phi_{1,2} = \Phi_{1,3} = +1{,}000$ prin înlocuirea succesivă în acest sistem de ecuații a soluțiilor determinate mai sus $\alpha_1 = 0{,}827$, $\alpha_2 = 4{,}366$ și $\alpha_3 = 8{,}307$, se obțin ordonatele formelor proprii de vibrație

$$\Phi_{2,1} = 2{,}269, \quad \Phi_{2,2} = 0{,}853, \quad \Phi_{2,3} = -0{,}723;$$
$$\Phi_{3,1} = 3{,}134, \quad \Phi_{3,2} = -1{,}873, \quad \Phi_{3,3} = 0{,}408.$$

Condițiile de ortogonalitate ale vectorilor proprii sînt verificate, adică

$$\sum_{k=1}^{3} m_k \Phi_{k,1} \Phi_{k,2} = 2m(+1)(+1) + 2m(+2{,}269)(+0{,}853) + m(+3{,}134)(-1{,}865) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} m_k \Phi_{k,2} \Phi_{k,3} = 2m(+1)(+1) + 2m(+0{,}853)(-0{,}723) + m(-1{,}865)(+0{,}408) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{3} m_k \Phi_{k,3} \Phi_{k,1} = 2m(+1)(+1) + 2m(-0{,}723)(+2{,}269) + m(+0{,}408)(+3{,}134) = 0.$$

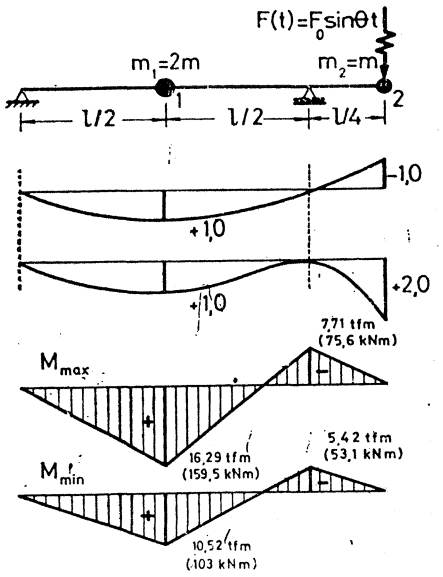


Fig. 3.8.

În figura 3.7 sînt reprezentate grafic cele trei forme proprii de vibrație ale cadrului.

Aplicația 3.4.3. Să se analizeze vibrațiile proprii și forțate ale grinzii din figura 3.8 prin metoda forțelor de inerție (matricea de flexibilitate).

Coeficienții de flexibilitate (deplasările unitare) rezultă:

$$EI\delta_{11} = l^3/48,\ EI\delta_{22} = 5l^3/192,$$
$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -l^3/64.$$

Fiind determinate prin calcul deplasările unitare și întrucît $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, matricele de flexibilitate și de inerție vor avea expresiile:

$$[D] = \frac{l^3}{192EI}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix},$$
$$[M] = m\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dacă se notează cu

$$\alpha = \frac{192EI}{l^3}\lambda,$$

ecuația caracteristică (3.8) devine:

$$\left|\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \alpha\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = \begin{vmatrix} (8-\alpha) & -3 \\ -6 & (5-\alpha) \end{vmatrix} = 0,$$

sau prin dezvoltarea determinantului

$$\alpha^2 - 13\alpha + 22 = 0.$$

Soluțiile acestei ecuații vor fi:

$$\alpha_1 = 11 = \frac{192EI}{ml^3}\lambda_1,\quad \alpha_2 = 2 = \frac{192EI}{ml^3}\lambda_2,$$

de unde se determină expresiile pulsațiilor proprii

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = 4{,}18\sqrt{\frac{EI}{ml^3}},\quad \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = 9{,}81\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}.$$

Ordonatele formelor proprii de vibrație se obțin prin rezolvarea următorului sistem de ecuații:

$$(8-\alpha_i)\,\Phi_{1,i} - 3\Phi_{2,i} = 0,$$
$$-6\Phi_{1,i} + (5-\alpha_i)\,\Phi_{2,i} = 0.$$

Prin înlocuirea valorilor α_1 și α_2 se vor obține ordonatele

$$\Phi_{1,1} = +1{,}0,\quad \Phi_{1,2} = +1{,}0,$$
$$\Phi_{2,1} = -1{,}0,\quad \Phi_{2,2} = +2{,}0,$$

care caracterizează formele proprii de vibrație reprezentate în figura 3.8.

Vibrațiile forțate se vor studia prin intermediul sistemului de ecuații (3.56) care permit să se determine forțele de inerție pe direcția maselor m_1 și m_2, produse de forța perturbatoare $F(t)$. În cazul concret reprezentat în figura 3.8, sistemul de ecuații va fi

$$\delta_{11}^* J_1 + \delta_{12} J_2 + \Delta_{1,0} = 0$$
$$\delta_{21} J_1 + \delta_{22}^* J_2 + \Delta_{2,0} = 0$$

unde

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - 1/m_1\theta^2,\quad \delta_{22}^* = \delta_{22} - 1/m_2\theta^2,$$
$$\Delta_{1,0} = -F_0 l^3/64EI,\quad \Delta_{2,0} = 5F_0 l^3/192EI.$$

În scriere matriceală, ecuațiile de mai sus au forma (3.56)

$$[D^*]\{J\} + \{\Delta_0\} = \{0\},$$

unde

$$[D^*] = [D] - \frac{1}{\theta^2}[M].$$

Ținînd seama de expresiile coeficienților de flexibilitate, matricele care intervin în ecuația de mai sus se pot scrie astfel:

$$[D^*] = \begin{bmatrix} \delta_{11}^* & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22}^* \end{bmatrix} = \frac{l^3}{192EI}\begin{bmatrix} (4 - 1/2m\theta^2) & -3 \\ -3 & (5 - 1/m\theta^2) \end{bmatrix} =$$
$$= \frac{l^3}{192EI}\begin{bmatrix} (4-\beta/2) & -3 \\ -3 & (5-\beta) \end{bmatrix}$$

unde s-a introdus notația:

$$\beta = \frac{192EI}{ml^3\theta^2}.$$

În această situație, ecuațiile mișcării forțate devin:

$$\frac{l^3}{192EI}\begin{bmatrix} (4-\beta/2) & -3 \\ -3 & (5-\beta) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{Bmatrix} + \frac{l^3}{192EI}\begin{Bmatrix} -3F_0 \\ 5F_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

iar prin rezolvarea lor se determină cele două forțe de inerție J_1 și J_2.

Pentru a exemplifica numeric analiza teoretică de mai sus se vor considera următoarele date $Q = mg = 4$ tf (39,24 kN), $F_0 = 1$ tf (9,81 kN), $EI = 5\,000$ tfm² (49 000 kNm²), $\theta = 35$ rad/s, $l = 8$ m.

Prin substituirea acestor valori în expresiile pulsațiilor se vor obține

$$\omega_1 = 20{,}45 \text{ rad/s},\quad \omega_2 = 47{,}95 \text{ rad/s}.$$

Întrucît rezultă $\beta = 3{,}75$, ecuațiile mișcării forțate vor avea forma

$$4{,}25J_1 - 6J_2 - 6 = 0$$

$$-3J_1 + 1{,}25J_2 + 5 = 0.$$

Rezolvînd acest sistem de ecuații se determină mărimile forțelor de inerție

$$J_1 = 1{,}775 \text{ tf } (17{,}4 \text{ kN}), \quad J_2 = 0{,}260 \text{ tf } (2{,}55 \text{ kN}).$$

Avînd în vedere caracterul alternant al forțelor F_0, J_1 și J_2, precum și prezența încărcărilor gravitaționale $Q_1 = 2Q$ și $Q_2 = Q$, au fost stabilite diagramele de momente încovoietoare, minime și maxime (fig. 3.8).

Aplicația 3.4.4. Să se studieze vibrațiile proprii și forțate ale cadrului de beton armat din figura 3.9 acționat de încărcările perturbatoare laterale, $F_1(t)$ și $F_2(t)$ aplicate fiecărui nivel. Caracteristicile geometrice ale structurii sînt date direct în figura 3.9.

Încărcările gravitaționale, concentrate la cele două niveluri sînt $Q_1 = Q = mg = 60$ tf (588,6 kN), și $Q_2 = 0{,}75\ Q = 0{,}75mg = 45$ tf(441 kN). Forțele perturbatoare au caracter armonic, adică $F_1(t) = F_{1,0} \sin \theta t$ și $F_2(t) = F_{2,0} \sin \theta t$, unde $F_{1,0} = 2$ tf (19,62 kN), $F_{2,0} = 1$ tf (9,81 kN), iar $\theta = 10$ rad/s. Caracteristicile elastice ale structurii s-au raportat la secțiunea de 30 × 40 cm căreia îi corespunde momentul de inerție $I = 16 \cdot 10^{-4}$ m^4. Considerînd un beton de marcă B 250, modulul de elasticitate longitudinală va fi $E = 290\,000$ kgf/cm^2 (284 000 daN/cm^2), încît rigiditatea secțională de referință rezultă $EI = 4\,640$ tf m^2 (45 500 kN m^2). De asemenea, lungimea de referință s-a considerat egală cu înălțimea etajelor, deci $l = 3{,}50$ m.

Rezolvarea acestei probleme se va face atît prin metoda matricei de flexibilitate, cît și prin metoda matricei de rigiditate.

a. **Metoda matricei de flexibilitate.** Pe baza datelor de mai sus, avînd în vedere proprietățile de simetrie geometrică, elastică și inerțială ale structurii, a rezultat pentru matricea de flexibilitate forma

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{l^3}{100EI} \begin{bmatrix} 2{,}569 & 3{,}100 \\ 3{,}100 & 8{,}194 \end{bmatrix}$$

Matricea de inerție este dată prin relația:

$$[M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 \end{bmatrix}$$

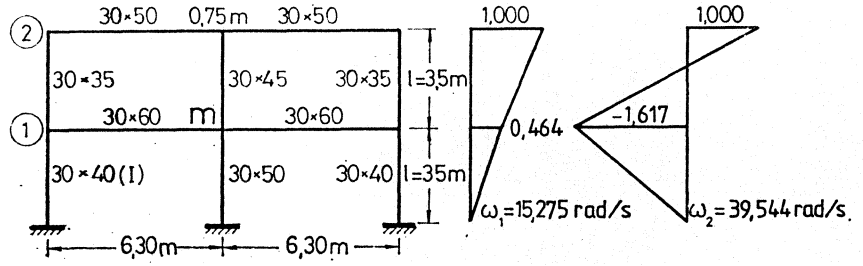


Fig. 3.9.

Prin introducerea acestor expresii în ecuația caracteristică a valorilor proprii,

$$|[D][M] - \lambda[I]| = 0,$$

se obține:

$$\left| \begin{bmatrix} 2{,}569 & 3{,}100 \\ 3{,}100 & 8{,}194 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}75 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} (2{,}569 - \alpha) & 2{,}325 \\ 3{,}100 & (6{,}1455 - \alpha) \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$\alpha^2 - 8{,}714\alpha + 8{,}580 = 0,$$

unde s-a notat prin α raportul

$$\alpha = \frac{100EI}{ml^3} \lambda.$$

Prin rezolvarea ecuației caracteristice rezultă următoarele soluții:

$$\alpha_1 = 7{,}581 = \frac{100EI}{ml^3} \lambda_1, \quad \alpha_2 = 1{,}131 = \frac{100EI}{ml^3} \lambda_2.$$

Dacă se introduc valorile numerice corespunzătoare, pulsațiile, frecvențele și perioadele proprii vor fi:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{100EI}{7{,}58ml^3}} = 15{,}275 \text{ rad/s}, \quad f_1 = 2{,}431 \text{ Hz}, \quad T_1 = 0{,}411 \text{ s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{100EI}{1{,}13ml^3}} = 39{,}544 \text{ rad/s}, \quad f_2 = 6{,}294 \text{ Hz}, \quad T_2 = 0{,}159 \text{ s}$$

Ecuațiile vectorilor proprii devin:

$$(2{,}569 - \alpha_i)\Phi_{1,i} + 2{,}325\ \Phi_{2,i} = 0$$

$$3{,}100\,\Phi_{1,i} + (6{,}145 - \alpha_i)\Phi_{2,i} = 0$$

prin rezolvarea cărora se deduc ordonatele celor două forme proprii de vibrație

$$\Phi_{1,1} = 0{,}464, \quad \Phi_{1,2} = -1{,}617$$

$$\Phi_{2,1} = 1{,}000, \quad \Phi_{2,2} = 1{,}000$$

Formele proprii, care verifică proprietatea de ortogonalitate:

$$\sum_{k=1}^{2} m_k\, \Phi_{k,1}\, \Phi_{k,2} = m(0{,}464)\ (-1{,}617) + 0{,}75m(1{,}000)\ (1{,}000) = 0$$

sînt reprezentate în figura 3.9.

Răspunsul forțat și staționar, exprimat în forțe de inerție maxime, se determină din sistemul de ecuații:

$$\delta^*_{11}J_1 + \delta_{12}J_2 + \Delta_{1,0} = 0$$

$$\delta_{21}J_1 + \delta^*_{22}J_2 + \Delta_{2,0} = 0$$

Ţinînd seama de rezultatele obţinute anterior, precum şi de datele numerice ale problemei, coeficienţii şi termenii liberi din acest sistem de ecuaţii au expresiile:

$$\delta_{11}^{*} = \delta_{11} - 1/m_1\theta^2 = 2{,}569l^3/100EI - 1/m\theta^2,$$
$$\delta_{22}^{*} = \delta_{22} - 1/m_2\theta^2 = 8{,}194l^3/100EI - 1/0{,}75m\theta^2,$$
$$\delta_{12} = \delta_{21} = 3{,}100l^3/100EI$$
$$\Delta_{1,0} = \delta_{11}F_{1,0} + \delta_{12}F_{2,0} = 8{,}238l^3/100EI$$
$$\Delta_{2,0} = \delta_{21}F_{1,0} + \delta_{22}F_{2,0} = 14{,}394l^3/100EI$$

Prin multiplicarea sistemului cu $100EI/l^3$ şi substituind mărimile

$$\frac{100EI}{ml^3\theta^2} = 17{,}694, \qquad \frac{100EI}{0{,}75ml^3\theta^2} = 23{,}592$$

(deoarece $\theta = 10$ rad/s), se vor obţine:

$$-15{,}125J_1 + 3{,}100J_2 + 8{,}238 = 0$$
$$3{,}100J_1 - 15{,}398J_2 + 14{,}394 = 0$$

de unde se determină mărimile forţelor de inerţie maxime

$$J_1 = 0{,}768 \text{ tf } (7{,}534 \text{ kN})$$
$$J_2 = 1{,}089 \text{ tf } (10{,}687 \text{ kN})$$

Se obţin astfel valorile maxime ale forţelor dinamice:

$$F_{d,1} = F_{1,0} + J_1 = 2{,}768 \text{ tf } (27{,}15 \text{ kN})$$
$$F_{d,2} = F_{2,0} + J_2 = 2{,}089 \text{ tf } (20{,}49 \text{ kN})$$

precum şi ale deplasărilor laterale:

$$x_1 = \delta_{11}F_{d,1} + \delta_{12}F_{d,2} = 0{,}125 \text{ cm},$$
$$x_2 = \delta_{21}F_{d,1} + \delta_{22}F_{d,2} = 0{,}237 \text{ cm}.$$

Diagrama momentelor încovoietoare, precum şi variaţia deplasărilor maxime, rezultate prin aplicarea dinamică a forţelor $F_1(t)$ şi $F_2(t)$, caracterizate de pulsaţia $\theta = 10$ rad/s, sînt date în figurile 3.10 şi 3.11.

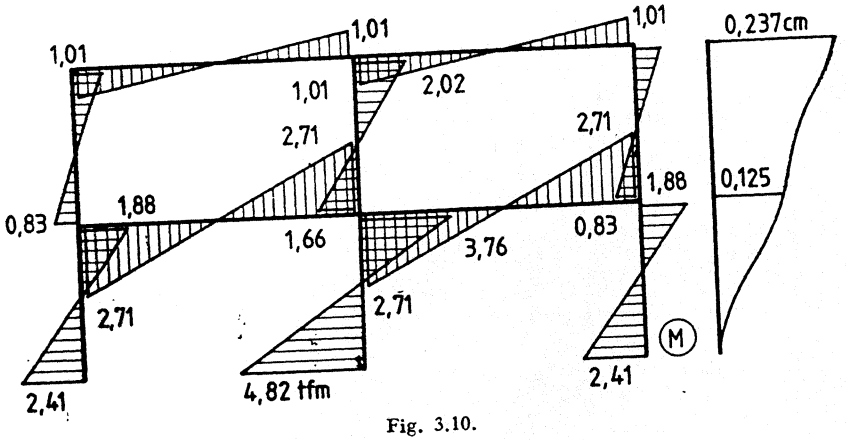


Fig. 3.10.

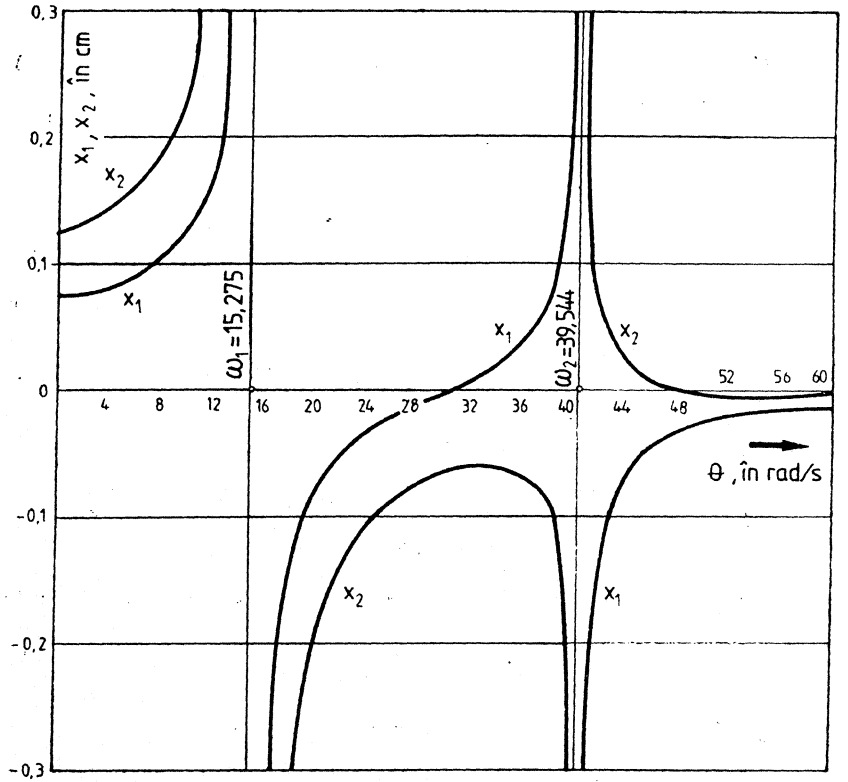


Fig. 3.11.

Se observă că pentru $\theta = \omega_1$ şi $\theta = \omega_2$ apare fenomenul de rezonanţă.

b. **Metoda matricei de rigiditate.** Matricea de rigiditate care se poate obţine şi prin inversarea matricei de flexibilitate s-a calculat independent urmînd ca această proprietate matriceală să fie utilizată pentru verificarea operaţiilor de calcul.

În urma efectuării operaţiilor numerice s-a obţinut pentru matricea de rigiditate următoarea formă:

$$[R] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 71{,}638 & -27{,}111 \\ -27{,}111 & 22{,}465 \end{bmatrix}$$

Dacă în ecuaţia caracteristică a valorilor proprii

$$[R] - \omega^2[M] = 0,$$

se înlocuiesc matricea de rigiditate şi matricea de inerţie, ţinînd seama de notaţia

$$\beta = \frac{ml^3}{EI}\omega^2,$$

se obține în final următoarea ecuație algebrică:

$$\begin{vmatrix} (71{,}638-\beta) & -27{,}111 \\ -27{,}111 & (22{,}465-0{,}75\beta) \end{vmatrix} = \beta^2 - 101{,}591 + 1165{,}788 = 0$$

Rezolvînd această ecuație rezultă:

$$\beta_1 = 13{,}187 = \frac{ml^3}{EI}\omega_1^2, \quad \beta_2 = 88{,}404 = \frac{ml^3}{EI}\omega_2^2$$

iar prin substituirea datelor numerice se determină mărimile celor două pulsații:

$$\omega_1 = 15{,}275 \text{ rad/s} \quad \text{și} \quad \omega_2 = 39{,}544 \text{ rad/s}$$

rezultate care coincid cu cele precedente.

În ecuațiile formelor proprii

$$(71{,}638 - \beta_i)\,\Phi_{1,i} - 27{,}111\Phi_{2,i} = 0$$

$$-27{,}111\Phi_{1,i} + (22{,}465 - 0{,}75\beta_i)\,\Phi_{2,i} = 0$$

introducînd succesiv mărimile β_1 și β_2, se obțin ordonatele formelor proprii de vibrație care sînt identice cu cele determinate anterior.

Deplasările laterale maxime, datorită acțiunilor perturbatoare $F_1(t)$ și $F_2(t)$, se obțin prin rezolvarea sistemului de ecuații:

$$(r_{11} - m_1\theta^2)\,x_1 + r_{12}x_2 + R_{1,0} = 0$$

$$r_{21}x_1 + (r_{22} - m_2\theta^2)\,x_2 + R_{2,0} = 0$$

Coeficienții și termenii liberi ai sistemului de mai sus se determină astfel:

$$r_{11}^* = r_{11} - m_1\theta^2 = 71{,}638EI/l^3 - m\theta^2,$$

$$r_{22}^* = r_{22} - m_2\theta^2 = 22{,}465EI/l^3 - 0{,}75m\theta^2,$$

$$r_{12} = r_{21} = -27{,}111\ EI/l^3,$$

$$R_{1,0} = -F_{1,0}, \quad R_{2,0} = -F_{2,0}$$

Prin înlocuirea datelor numerice efective și rezolvarea sistemului de ecuații rezultă deplasările dinamice maxime,

$$x_1 = 0{,}125 \text{ cm} \quad \text{și} \quad x_2 = 0{,}237 \text{ cm},$$

deci aceleași rezultate determinate prin metoda matricei de flexibilitate.

Forțele dinamice maxime se obțin cu relația

$$\{F\} = [R]\{x\} \text{ și anume}$$

$$F_{d,1} = 2{,}761 \text{ tf } (27{,}09 \text{ kN})$$

$$F_{d,2} = 2{,}091 \text{ tf } (20{,}522 \text{ kN})$$

regăsindu-se valorile forțelor dinamice stabilite în cazul analizat mai înainte.

4

DINAMICA SISTEMELOR DISCRETE PRIN UTILIZAREA METODEI SUPERPOZIȚIEI MODALE

ANALIZA MODALĂ A RĂSPUNSULUI DINAMIC

În capitolul 3 a fost expusă analiza vibrațiilor sistemelor liniare, discrete (nGLD) și în absența amortizării, care a permis evaluarea răspunsului liber și a răspunsului forțat la acțiuni cu caracter armonic sau periodic. Condițiile de mișcare s-au caracterizat prin sisteme de ecuații, cu necunoscute cuplate, în care intervenea *răspunsul total* al sistemului, exprimat în raport cu *coordonatele dinamice*.

Analiza modală a răspunsului dinamic (liber sau forțat) constă în exprimarea ecuațiilor de condiție prin intermediul unui sistem de n ecuații independente în care intervin în exclusivitate caracteristicile dinamice proprii ale fiecărui mod de vibrație $i = 1, 2, \ldots n$. În felul acesta, ecuațiile generale de forma celor stabilite în capitolul 3 se decuplează, exprimîndu-se prin coordonate independente, specifice fiecărui mod propriu de vibrație, numite și *coordonate modale* (decuplate).

Avantajele analizei modale sînt numeroase. Dintre acestea se menționează posibilitatea punerii în evidență a participării și contribuției fiecărei componente modale în estimarea răspunsului dinamic total, precum și trierea acestora în funcție de importanța lor calitativă și cantitativă.

În acest sens, *răspunsul total instantaneu* $x_k(t)$ se va determina prin superpoziția liniară a *răspunsurilor modale instantanee* $x_{k,i}(t)$ astfel:

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{k,i}(t), \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{4.1}$$

în care k precizează GLD, iar $i = 1, 2, \ldots n$ modurile proprii de vibrație ale sistemului studiat.

Din relația (4.1), fundamentală în analiza modală a răspunsului, rezultă denumirea de metoda *superpoziției modale*.

Se vor trata în continuare două situații distincte cu privire la caracteristicile acțiunilor, la care sînt supuse structurile plane de tipul celei reprezentate în figura 4.1, modelate dinamic printr-un sistem discret cu nGLD, definit inerțial, disipativ și elastic. Prima categorie de acțiuni, de *tip direct* (fig. 4.1, *a*), se definește prin forțe oarecare $F_k(t)$ care se aplică pe direcția GLD, iar a doua categorie, de *tip indirect* (fig. 4.1, *b*), se caracterizează printr-o deplasare oarecare $u_0(t)$ care se manifestă asupra bazei de rezemare a sistemului.

Datele de intrare în analiza modală a răspunsului liber sau forțat, sistematizate în figura 4.2, sînt următoarele:

— caracteristicile primare de definire ale sistemului dinamic (matricele de inerție, de amortizare și de rigiditate):

$$[M]_{n,n},\ [C]_{n,n},\ [R]_{n,n}; \tag{4.2}$$

— caracteristicile dinamice proprii (matricele spectrală și modală):

$$[\Omega]_{n,n},\ [\Phi]_{n,n} = [\{\Phi\}_1\,\{\Phi\}_2 \ldots \{\Phi\}_i \ldots \{\Phi\}_n]; \tag{4.3}$$

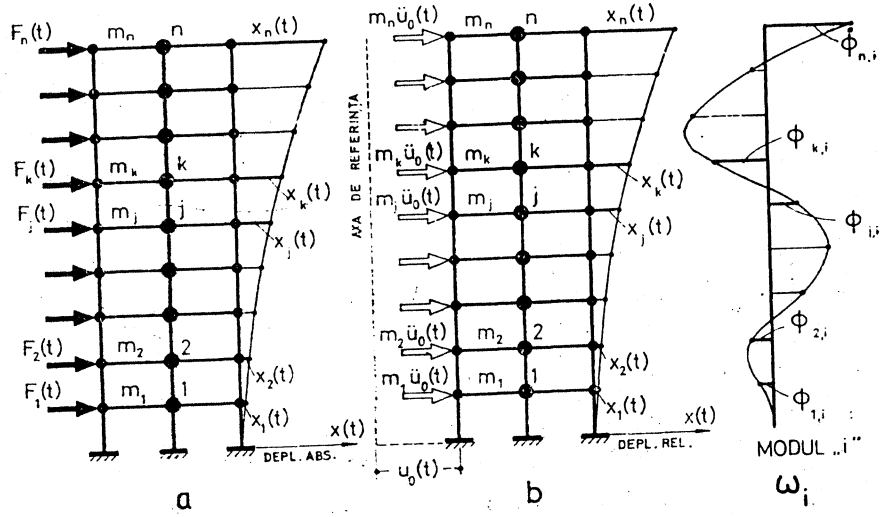


Fig. 4.1

— acțiunile exterioare (directe sau indirecte oarecare):

$$\{F(t)\}_{n,1}, \quad u_0(t); \tag{4.4}$$

— condițiile inițiale ale mișcării:

$$t = 0, \quad \{x(0)\}_{n,1} = \{x_0\}_{n,1}, \quad \{\dot{x}(0)\}_{n,1} = \{v_0\}_{n,1}. \tag{4.5}$$

Cu excepția matricei de amortizare, celelalte au fost definite în capitolele 1 și 3. Analiza se va face în raport cu matricea de rigiditate, cuplată elastic, ai cărei coeficienți au semnificația de reacțiuni în blocajele SBD. Datorită particularităților sistemului dinamic (model discret simplificat), matricea de inerție rezultă diagonală $[M]$ (decuplată inerțial). Matricea de amortizare (v. § 1.5.2) a cărei exprimare generală este de forma

$$[C] = \alpha[M] + \beta[R],$$

se poate considera diagonală, în cazul sistemelor cu amortizare vîscoasă liniară slabă, deoarece $\beta \simeq 0$.

Prin analogie cu expresia (2.23) se va obține:

$$[C]_{n,n} = \alpha[M] = 2\nu\omega[M]_{n,n}, \tag{4.6}$$

unde ν este fracțiunea din amortizarea critică (v. § 2.1.2).

Acestor date fundamentale de intrare în analiza modală li se mai asociază condițiile de ortogonalitate ale vectorilor proprii (3.34), (3.37) și (3.38), cu precizările care se expun în continuare:

$$\{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ M_i^* & i = j \end{cases}, \quad [M^*] = \begin{bmatrix} M_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & M_n^* \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

$$\{\Phi\}_i^T [C] \{\Phi\}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ C_i^* & i = j \end{cases}, \quad [C^*] = \begin{bmatrix} C_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & C_n^* \end{bmatrix}, \tag{4.8}$$

$$\{\Phi\}_i^T [R] \{\Phi\}_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ R_i^* & i = j \end{cases}, \quad [R^*] = \begin{bmatrix} R_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & R_n^* \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

În aceste relații s-au introdus următoarele notații și noțiuni:

M_i^* — *masa generalizată*, corespunzătoare modului i de vibrație *(masă modală)*;

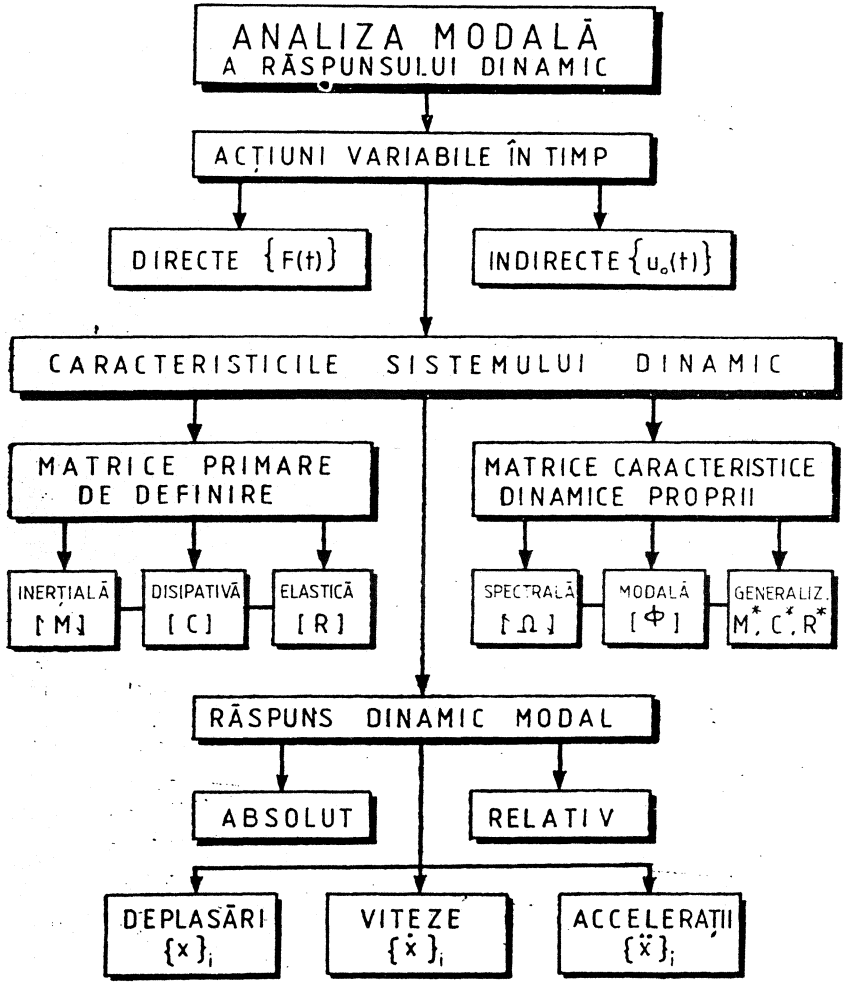


Fig. 4.2

R_i^* — *rigiditatea generalizată*, corespunzătoare modului i de vibrație *(rigiditate modală)*;

C_i^* — *amortizarea generalizată*, corespunzătoare modului i de vibrație *(amortizare modală)*;

Totalitatea acestor noi caracteristici modale definesc *matricele generalizate de inerție* $[M^*]$, *de amortizare* $[C^*]$ și *de rigiditate* $[R^*]$. Pe baza relațiilor (4.7), (4.8) și (4.9) rezultă următoarele proprietăți:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [M^*], \quad [\Phi]^T [C] [\Phi] = [C^*], \quad [\Phi]^T [R] [\Phi] = [R^*] \tag{4.10}$$

Se observă că toate matricele generalizate rezultă diagonale ca urmare a proprietăților de ortogonalitate.

Se face precizarea că inițial va fi analizat răspunsul forțat iar apoi, prin particularizare, răspunsul liber.

4.1. VIBRAȚII FORȚATE PRODUSE DE ACȚIUNI DIRECTE. RĂSPUNS MODAL TRANZITORIU SAU PERMANENT

4.1.1. Cazul acțiunilor oarecare

Se va considera situația din figura 4.1, *a* în care forțele perturbatoare $F_k(t)$ se aplică direct pe direcția GLD ($k = 1, 2, \ldots n$).

Întrucît se operează cu matricea de rigiditate, ecuațiile de mișcare rezultă din condiția de echilibru dinamic instantaneu a tuturor forțelor efective (inerțiale, disipative, elastice și exterioare) asociate fiecărui GLD. Deci *ecuațiile de condiție, exprimate în coordonate dinamice* $k = 1, 2, \ldots n$, vor avea următoarea formă generală:

$$\{F(t)\}_a + \{F(t)\}_c = \{F(t)\}_i + \{F(t)\}, \tag{4.11}$$

în care, forțele de inerție (i), de amortizare (a) și elastice (c) au expresiile cunoscute:

$$\{F(t)\}_i = -[M]\{\ddot{x}(t)\}, \quad \{F(t)\}_a = [C]\{\dot{x}(t)\}, \quad \{F(t)\}_e = [R]\{x(t)\}.$$

Prin înlocuirea acestor expresii în ecuația (4.11) rezultă:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [R]\{x(t)\} = \{F(t)\}, \tag{4.12}$$

deci o exprimare identică cu (1.72) și (3.62).

Se menționează faptul că variațiile deplasărilor $x_k(t)$, vitezelor $\dot{x}_k(t)$ și accelerațiilor $\ddot{x}_k(t)$ caracterizează răspunsul forțat total ($k = 1, 2, \ldots n$), pe timpul istoric al aplicării acțiunilor $F_k(t)$, evaluat *în mărimi absolute*.

În vederea *exprimării răspunsului decuplat în coordonate modale* $i = 1, 2, \ldots n$, conform relației generale (4.1), se admite următoarea transformare liniară

$$x_{k,i}(t) = \Phi_{k,i}\eta_i(t), \tag{4.13}$$

unde $x_{k,i}(t)$ este *deplasarea modală instantanee*, $\Phi_{k,i}$ — ordonata vectorului propriu i, iar $\eta_i(t)$ se numește *coordonată generalizată, coordonată normală, coordonată principală* sau *coordonată modală* și este specifică fiecărui mod propriu de vibrație.

Deplasarea totală instantanee (4.1) devine:

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{k,i}\eta_i(t), \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{4.14}$$

iar vectorul deplasărilor totale (absolute) pe direcția GLD

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{\eta_i(t)\}. \tag{4.15}$$

Prin derivări succesive se obțin vectorii vitezelor și accelerațiilor totale (absolute)

$$\{\dot{x}(t)\} = [\Phi]\{\dot{\eta}_i(t)\}, \quad \{\ddot{x}(t)\} = [\Phi]\{\ddot{\eta}_i(t)\}. \tag{4.16}$$

Substituind transformările (4.15) și (4.16) în ecuația (4.12) se obține *ecuația generală de condiție exprimată în coordonatele modale* ale sistemului

$$[M][\Phi]\{\ddot{\eta}_i\} + [C][\Phi]\{\dot{\eta}_i\} + [R][\Phi]\{\eta_i\} = \{F(t)\} \tag{4.17}$$

În vederea decuplării acestui sistem de ecuații diferențiale ordinare, se va premultiplica cu $[\Phi]^T$ astfel:

$$[\Phi]^T [M][\Phi]\{\ddot{\eta}\} + [\Phi]^T [C][\Phi]\{\dot{\eta}_i\} + [\Phi]^T [R][\Phi]\{\eta_i\} = [\Phi]^T \{F(t)\}. \tag{4.18}$$

Dacă se ține seama de relațiile (4.10), ecuația (4.18) devine:

$$[M^*]\{\ddot{\eta}_i(t)\} + [C^*]\{\dot{\eta}_i(t)\} + [R^*]\{\eta_i(t)\} = \{F^*(t)\}, \tag{4.19}$$

în care $\{F^*(t)\}$ reprezintă *vectorul forțelor generalizate*

$$\{F^*(t)\} = [\Phi]^T\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1^*(t) \\ \vdots \\ F_i^*(t) \\ \vdots \\ F_n^*(t) \end{Bmatrix}, \tag{4.20}$$

iar

$$F_i^*(t) = \{\Phi\}_i^T \{F(t)\}, \tag{4.21}$$

forța generalizată corespunzătoare modului i de vibrație.

Forma (4.19), în care toate matricele care intervin sînt diagonalizate, pune în evidență *decuplarea* (separarea) sistemului de ecuații inițial (4.12), exprimat în funcție de coordonatele dinamice totale. Prin operația de decuplare s-a obținut un sistem de n ecuații independente, în funcție de noile coordonate modale, care depind numai de caracteristicile modurilor proprii de vibrații, așa cum rezultă din relațiile (4.7), (4.8) și (4.9). Din punct de vedere formal, ecuația generală (4.19), precum și oricare ecuație din sistem, este identică cu ecuația (2.3) care caracterizează mișcarea sistemelor cu 1GLD. Într-adevăr, ecuația independentă corespunzătoare modului i de vibrație rezultă din (4.19) sub forma

$$M_i^*\ddot{\eta}_i(t) + C_i^*\dot{\eta}_i(t) + R_i^*\eta_i(t) = F_i^*(t), \tag{4.22}$$

iar dacă se consideră $i = 1, 2, \ldots n$ se obține întregul sistem de ecuații. Întrucît toate ecuațiile din sistemul decuplat sînt identice ca exprimare, în urma integrării se va determina o soluție cu caracter general, prin particularizarea căreia se obține expresia coordonatei generalizate pentru fiecare mod propriu de vibrație.

Forma integrabilă a ecuației modale (4.19) se obține prin premultiplicarea acesteia cu inversa matricei de inerție generalizată $[M^*]^{-1}$, deci

$$[M^*]^{-1}[M^*]\{\ddot{\eta}_i(t)\} + [M^*]^{-1}[C^*]\{\dot{\eta}_i(t)\} + [M^*]^{-1}[R^*]\{\eta_i(t)\} = [M^*]^{-1}\{F^*(t)\} \tag{4.23}$$

Pentru simplificarea exprimării acestei ecuații se vor efectua unele transformări. Avînd în vedere relațiile (4.3), (4.6), (4.10), precum și forma generală a ecuațiilor proprii (3.26) rezultă:

$$[M^*]^{-1}[M^*] = [I] \quad \text{(matricea unitate)},$$

și

$$[M^*]^{-1}[C^*] = [M^*]^{-1}[\Phi]^T[C][\Phi] = 2\nu\omega[M^*]^{-1}[\Phi]^T[M][\Phi],$$

sau

$$[M^*]^{-1}[C^*] = 2\nu\omega[M^*]^{-1}[M^*] = 2\nu\omega[I] = [2\nu\omega].$$

De asemenea, se obține:

$$[M^*]^{-1}[R^*] = [M^*]^{-1}[\Phi]^T[R][\Phi] = [M^*]^{-1}[\Phi]^T[M][\Phi][\Omega],$$

sau

$$[M^*]^{-1}[R^*] = [M^*]^{-1}[M^*][\Omega] = [\Omega],$$

deoarece ecuația (3.26) mai poate fi scrisă și sub forma compactă

$$[R][\Phi] = [M][\Phi][\Omega]$$

iar prin premultiplicare cu $[\Phi]^T$ astfel

$$[R^*] = [M^*][\Omega]. \tag{4.24}$$

Cu aceste transformări ecuația modală devine:

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [2\nu\omega]\{\dot{\eta}(t)\} + [\Omega]\{\eta(t)\} = [M^*]^{-1}\{F^*(t)\}, \tag{4.25}$$

adică un sistem cu n ecuații independente (decuplate) de forma:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\nu_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = \frac{F_i^*(t)}{M_i^*}, \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{4.26}$$

Se atrage atenția asupra faptului că pentru a introduce influența amortizării s-a apelat la relația simplificată (4.6). Se poate obține însă decuplarea modală a sistemului de ecuații (4.23) dacă se consideră exprimarea generală a matricei de amortizare sub forma $[C] = \alpha[M] + \beta[R]$ dată anterior. Prin premultiplicare cu $[\Phi]^T$ și postmultiplicare cu $[\Phi]$ rezultă:

$$[\Phi]^T[C][\Phi] = [\Phi]^T(\alpha[M] + \beta[R])[\Phi],$$

iar dacă se ține seama de (4.10) și (4.24)

$$[C^*] = \alpha[\Phi]^T[M][\Phi] + \beta[\Phi]^T[R][\Phi] = \alpha[M^*] + \beta[R^*],$$

sau

$$[C^*] = \alpha[M^*] + \beta[M^*][\Omega].$$

Premultiplicînd ultima relație cu $[M^*]^{-1}$ se obține:

$$[M^*]^{-1}[C^*] = \alpha[M^*]^{-1}[M^*] + \beta[M^*]^{-1}[M^*][\Omega]$$

și deci

$$[M^*]^{-1}[C^*] = \alpha[I] + \beta[\Omega] \tag{4.27}$$

Întrucît toate matricele care intervin în relația (4.27) sînt diagonale, decuplarea sistemului de ecuații (4.23) este asigurată. Pentru a obține însă o formă identică cu sistemul (4.25) se poate admite următoarea relație de echivalență:

$$[2\nu\omega] = \alpha[I] + \beta[\Omega], \tag{4.28}$$

din care rezultă expresia fracțiunii din amortizarea critică

$$\nu_i = \frac{\alpha + \beta\omega_i^2}{2\omega_i} \tag{4.29}$$

Se constată că atunci cînd $\alpha = 0$ matricea de amortizare este proporțională cu matricea de rigiditate, în care caz modelarea disipării sistemului rezultă prin amortizare relativă între etajele structurii de tipul celei din figura 4.1. Dacă $\beta = 0$, matricea de amortizare devine proporțională cu matricea de inerție, astfel încît modelarea disipării se obține prin amortizarea absolută în raport cu baza fixă a sistemului.

Revenind la ecuația modală (4.26), răspunsul modal se poate obține direct prin analogia existentă cu aspectele tratate în § 2.8.

Astfel, *răspunsul modal liber*, cu caracter tranzitoriu, va fi descris de soluția omogenă a ecuației (4.26), adică:

$$\eta_{i.\,L}(t) = e^{-\nu_i\omega_i t}\left[\frac{\dot{\eta}_i(0) + \nu_i\omega_i\eta_i(0)}{\omega_i^*}\sin\omega_i^* t + \eta_i(0)\cos\omega_i^* t\right], \tag{4.30}$$

în care $\eta_i(0)$ și $\dot{\eta}_i(0)$ reprezintă deplasările și vitezele inițiale modale, care se obțin din condițiile inițiale în deplasări și viteze, exprimate în coordonatele dinamice ale sistemului, așa cum se arată în continuare. Dacă se premultiplică, relația (4.15) cu $\{\Phi\}_i^T[M]$ și se ține seama de (4.10) se obține:

$$\{\Phi\}_i^T[M]\{x(t)\} = \{\Phi\}_i^T[M][\Phi]\{\eta_i(t)\} = M_i^*\eta_i(t),$$

de unde

$$\eta_i(t) = \frac{\{\Phi\}_i^T[M]\{x(t)\}}{M_i^*}, \quad \dot{\eta}_i(t) = \frac{\{\Phi\}_i^T[M]\{\dot{x}(t)\}}{M_i^*}.$$

Cunoscînd condițiile inițiale în coordonatele dinamice la timpul $t = 0$ adică $x_k(0) = x_{k.0}$ și $\dot{x}_k(0) = v_{k.0}$, $k = 1, 2, \ldots n$, se obțin condițiile inițiale în coordonate modale astfel:

$$\eta_i(0) = \frac{\{\Phi\}_i^T[M]\{x_0\}}{M_i^*}, \quad \dot{\eta}_i(0) = \frac{\{\Phi\}_i^T[M]\{v_0\}}{M_i^*}.$$

$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

Răspunsul modal forțat, soluția particulară a ecuației (4.26), va fi definit de funcția modală (cu caracter permanent) în care intervine integrala de superpoziție sau de convoluție (Duhamel):

$$\eta_{i.\,F}(t) = \frac{1}{M_i^*\omega_i^*}\int_0^t F^*(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_i^*(t-\tau)\,d\tau, \tag{4.31}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

unde $\omega_i^* = \omega_i\sqrt{1-\nu_i^2}$.

Răspunsul modal instantaneu rezultant se obține prin intermediul coordonatei generalizate obținută prin coroborarea soluțiilor (4.30) și (4.31)

$$\eta_i(t) = \eta_{i,L}(t) + \eta_{i,F}(t), \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{4.32}$$

Deplasările instantanee modale se determină în final prin superpoziția componentelor modale, pe baza relației (4.15), astfel:

$$\{x(t)\} = [\{\Phi\}_1 \{\Phi\}_2 \ldots \{\Phi\}_i \ldots \{\Phi\}_n] \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \\ \vdots \\ \eta_i(t) \\ \vdots \\ \eta_n(t) \end{Bmatrix},$$

sau

$$\{x(t)\} = \{\Phi\}_1 \eta_1(t) + \{\Phi\}_2 \eta_2(t) + \ldots \{\Phi\}_i \eta_i(t) + \ldots \{\Phi\}_n \eta_n(t). \tag{4.33}$$

Întrucît

$$\{x(t)\} = \{x(t)\}_1 + \{x(t)\}_2 + \ldots \{x(t)\}_i + \ldots \{x(t)\}_n \tag{4.34}$$

rezultă că variația deplasărilor instantanee modale are aceeași configurație geometrică cu vectorii proprii de vibrație. Această observație se menține și pentru variația vitezelor și accelerațiilor modale instantanee (4.16). Deplasările, vitezele și accelerațiile instantanee totale pe direcția GLD, pot fi evaluate deci prin următoarele relații de superpoziție:

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{k,i}\eta_i(t), \quad \dot{x}_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{k,i}\dot{\eta}_i(t), \quad \ddot{x}_k(t) = \sum_{k=1}^{n} \Phi_{k,i}\ddot{\eta}_i(t). \tag{4.35}$$

Răspunsul instantaneu exprimat în forțe elastice se obține ținînd seama de relațiile (4.15) și (4.24) astfel:

$$\{F(t)\}_{el} = [R]\{x(t)\} = [R][\Phi]\{\eta(t)\},$$

sau

$$\{F(t)\}_{el} = [M][\Phi][\Omega]\{\eta(t)\}.$$

4.1.2. Cazul acțiunilor armonice

Se va considera cazul particular în care pe direcția GLD acționează un sistem de forțe sincrone și de aceeași pulsație, avînd forma $F_k(t) = F_{k,0} \sin \theta t$ $(k = 1, 2, \ldots n)$, unde $F_{k,0}$ reprezintă valorile de amplitudine ale acestora.

În această situație, expresia forței generalizate (4.21) devine:

$$F_i^*(t) = \{\Phi\}_i^T \{F(t)\} = \{\Phi\}_i^T \{F_0\} \sin \theta t = F_{i,0}^* \sin \theta t, \tag{4.36}$$

astfel încît ecuația (4.26) va avea forma:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\nu_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = \frac{F_{i,0}^*}{M_i^*} \sin \theta t, \tag{4.37}$$

unde

$$F_{i,0}^* = \{\Phi\}_i^T \{F_0\} = \sum_{k=1}^{n} F_{k,0}\Phi_{k,i}, \tag{4.38}$$

$$M_i^* = \{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_i = \sum_{k=1}^{n} m_k\Phi_{k,i}^2. \tag{4.39}$$

Întrucît se vor considera următoarele condiții inițiale:

$$\{x(0)\} = \{0\} \quad \text{și} \quad \{\dot{x}(0)\} = \{0\},$$

se va determina *răspunsul permanent și staționar* utilizînd expresia (4.31). Se observă însă că este mai convenabil a se adopta direct soluția de forma (2.66), datorită analogiei matematice existente între ecuațiile (4.37) și (2.57):

$$\eta_i(t) = \frac{F_{i,0}^*}{\omega_i^2 M_i^*} \mu_i^* \sin \theta t = A_i\mu_i^* \sin \theta t, \tag{4.40}$$

unde A_i, avînd semnificația de amplitudine modală, are expresia:

$$A_i = \frac{F_{i,0}^*}{\omega_i^2 M_i^*} = \frac{F_{i,0}^*}{R_i^*} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_{k,0}\Phi_{k,i}}{\omega_i^2 \sum_{k=1}^{n} m_k\Phi_{k,i}^2}, \tag{4.41}$$

deoarece din relația (4.24) rezultă că $R_i^* = \omega_i^2 M_i^*$, iar

$$\mu_i^* = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega_i}\right)^2\right]^2 + 4\nu_i\left(\frac{\theta}{\omega_i}\right)^2}}. \tag{4.42}$$

Expresia (4.42), similară cu (2.62), reprezintă *coeficientul dinamic* sau *factorul de amplificare dinamică modală* (FADM), corespunzător deci fiecărui mod propriu de vibrație.

Deplasările modale instantanee se obțin pe baza relației (4.34). Astfel, pentru modul i de vibrație se va obține:

$$\{x(t)\}_i = \{\Phi\}_i A_i\mu_i^* \sin \theta t, \tag{4.43}$$

unde

$$x_{k,i}(t) = \Phi_{k,i}A_i\mu_i^* \sin \theta t,$$

iar pentru deplasările modale maxime:

$$\{x\}_i = \{\Phi\}_i A_i\mu_i^*, \tag{4.44}$$

în care

$$x_{k,i} = x_{k,i}(t)|_{max} = \Phi_{k,i}A_i\mu_i^*.$$

Se constată că atît deplasările modale instantanee, cît și cele maxime au o variație identică cu configurația vectorilor proprii (formelor proprii de vibrație).

Răspunsul total instantaneu rezultă prin superpoziție liniară

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^{n} x_{k,i}(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} \Phi_{k,i} A_i \mu_i^*\right] \sin \theta t, \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{4.45}$$

iar pentru *răspunsul total maxim* tot prin superpoziție liniară, datorită caracterului particular al acțiunilor

$$x_k = x_k(t)|_{max} = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{k,i} A_i \mu_i^*, \quad k = 1, 2, \ldots n. \tag{4.46}$$

În situația în care se studiază răspunsul tranzitoriu, este necesar ca expresiilor (4.45) și (4.46) să li se asocieze soluțiile vibrațiilor libere de forma celor analizate în capitolul 2.

Din expresiile (4.45), (4.46) și (4.42) se pune în evidență într-o formă mult mai explicită decît în capitolul 3, apariția *fenomenului de rezonanță multiplă*. Într-adevăr, cînd pulsația θ a forțelor perturbatoare coincide cu una din pulsațiile proprii ale sistemului, FADM atinge valoarea maximă. Astfel, cînd $\theta = \omega_i$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ rezultă:

$$\mu_{i,max}^* = \frac{1}{2\nu_i}, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{4.47}$$

În cazul neglijării amortizării ($\nu = 0$), expresiile de calcul corespunzătoare, se obțin direct prin particularizarea celor demonstrate anterior.

4.2. VIBRAȚII FORȚATE PRODUSE DE ACȚIUNI INDIRECTE. RĂSPUNS MODAL TRANZITORIU SAU PERMANENT

4.2.1. Cazul acțiunilor oarecare

Acțiunile cu caracter indirect se manifestă asupra structurilor prin intermediul unei mișcări, cu caracter forțat, la care este supusă baza de rezemare (fundația). Acest tip de excitație este specific evenimentelor dinamice transmise prin mediul de propagare de surse artificiale (provenite din procese industriale sau trafic) și de surse naturale (mișcările seismice puternice). În acest paragraf vor fi expuse numai aspectele teoretice ale problemei, urmînd ca în partea a II-a a lucrării, consacrată ingineriei seismice, să se facă referiri concrete cu privire la aplicarea practică a rezultatelor obținute.

În vederea evaluării răspunsului modal instantaneu a unei structuri plane de tipul celei din figura 4.1, *b*, se va considera că baza structurii (presupusă perfect rigidă) este supusă unei mișcări de translație în plan orizontal, caracterizată prin funcția $u_0(t)$. În această situație, variațiile deplasărilor $x_k(t)$, vitezelor $\dot{x}_k(t)$ și accelerațiilor $\ddot{x}_k(t)$ se vor exprima în *mărimi relative*, raportate la mișcarea de corp rigid (de transport) a întregii structuri, adică

$$\left.\begin{aligned} \{x(t)\}_{abs} &= \{1\}\, u_0(t) + \{x(t)\}_{rel}, \\ \{\dot{x}(t)\}_{abs} &= \{1\}\, \dot{u}_0(t) + \{\dot{x}(t)\}_{rel}, \\ \{\ddot{x}(t)\}_{abs} &= \{1\}\, \ddot{u}_0(t) + \{\ddot{x}(t)\}_{rel}. \end{aligned}\right\} \tag{4.48}$$

Ecuațiile de condiție, exprimate în coordonate dinamice $(k = 1, 2, \ldots n)$ vor avea o formă asemănătoare cu (4.12). Forțele perturbatoare „echivalente", de natura unor forțe de inerție generate de mișcarea $u_0(t)$ a bazei structurii, rezultă:

$$\{F(t)\} = -[M]\,\{1\}\,\ddot{u}_0(t), \tag{4.49}$$

unde s-a notat cu $\{1\}$ vectorul unitate sau identic, iar prin $\ddot{u}_0(t)$ — variația accelerațiilor imprimate bazei structurii. Deoarece mișcarea bazei are un caracter alternant, se poate face abstracție de semn în relația (4.49), astfel încît ecuația generală de echilibru dinamic instantaneu va fi:

$$[M]\,\{\ddot{x}(t)\} + [C]\,\{\dot{x}(t)\} + [R]\,\{x(t)\} = [M]\,\{1\}\,\ddot{u}_0(t). \tag{4.50}$$

Pe baza transformărilor (4.15) și (4.16), precum și a celorlalte operații prezentate în § 4.1.1, se obține următoarea formă pentru *ecuațiile de condiție exprimate în coordonate modale* (decuplate):

$$[M^*]\,\{\ddot{\eta}(t)\} + [C^*]\,\{\dot{\eta}(t)\} + [R^*]\,\{\eta(t)\} = \{P^*\}\,\ddot{u}_0(1), \tag{4.51}$$

în care intervine vectorul factorilor de participare modali

$$\{P^*\} = [\Phi]^T [M]\,\{1\}. \tag{4.52}$$

Factorul de participare modal corespunzător modului propriu i de vibrație

$$P_i^* = \{\Phi\}_i^T [M]\,\{1\}, \tag{4.53}$$

pune în evidență „participarea" cantitativă a accelerației, care se manifestă la baza structurii, în fiecare ecuație modală. Întrucît P_i^* dimensional reprezintă o „masă modală", produsul $P_i^*\ddot{u}_0(t)$ are semnificație de *forță de inerție modală*.

Operînd în mod asemănător cazului acțiunilor directe ecuația (4.51) devine:

$$[I]\,\{\ddot{\eta}(t)\} + [2\nu\omega]\,\{\dot{\eta}(t)\} + [\Omega]\,\{\eta(t)\} = [M^*]^{-1}\,\{P^*\}\,\ddot{u}_0(t). \tag{4.54}$$

Ecuațiile modale independente, aparținînd sistemului (4.54), au următoarea formă generală:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\nu_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = \frac{P_i^*}{M_i^*}\ddot{u}_0(t) = A_i\ddot{u}_0(t) \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{4.55}$$

Prin integrarea acestei ecuații se obține soluția specifică *răspunsului modal liber* (cu caracter tranzitoriu) de forma (4.30) și de asemenea expresia corespunzătoare *răspunsului modal forțat*, prin intermediul integralei de superpoziție sau de convoluție (Duhamel):

$$\eta_{i,F}(t) = \left(\frac{P_i^*}{M_i^*}\right)\cdot\frac{1}{\omega_i^*}\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \sin \omega_i^*(t-\tau)\, d\tau, \tag{4.56}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n)$$

sau

$$\eta_{i,F}(t) = A_i \frac{1}{\omega_i^*}\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \sin \omega_i^*(t-\tau)\, d\tau, \tag{4.57}$$

unde s-a introdus notația

$$A_i = \frac{P_i^*}{M_i^*} = \frac{\{\Phi\}_i^T [M] \{1\}}{\{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,i}}{\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,i}^2}. \quad (4.58)$$

Expresia (4.58) reprezintă o cantitate adimensională și definește, conform semnificației pe care o are ecuația (4.55), distribuția excitației, exprimată prin variația accelerațiilor $\ddot{u}_0(t)$, în raport cu coordonatele modale ale sistemului dinamic. Din acest motiv A_i s-a denumit *factor modal de distribuție a accelerației* care se manifestă la baza structurii, întrucît se poate scrie proprietatea fundamentală:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 1, \quad (4.59)$$

care rezultă în urma unor prelucrări adecuate a ecuațiilor (4.50) și (4.54).

Pe baza relațiilor (4.53) se poate evalua răspunsul relativ instantaneu total pe direcția GLD.

Astfel, *deplasarea relativă instantanee* pe direcția GLD k, corespunzătoare modului propriu i de vibrație rezultă:

$$x_{k,i}(t) = \Phi_{k,i}\eta_i(t) = A_i\Phi_{k,i}\frac{1}{\omega_i^*}\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \sin \omega_i^*(t-\tau)\, d\tau, \quad (4.60)$$

sau

$$x_{k,i}(t) = A_i \frac{1}{\omega_i^*}\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \sin \omega_i^*(t-\tau)\, d\tau, \quad (4.61)$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots n)$$

în care

$$A_{k,i} = A_i\Phi_{k,i}. \quad (4.62)$$

Deoarece factorul de distribuție A_i este o constantă modală, din expresia (4.62) se constată că $A_{k,i}$ variază direct proporțional cu ordonatele vectorului propriu de vibrație, astfel încît va fi numit *coeficient de formă* (variația acestuia definește o configurație geometrică identică cu forma proprie de vibrație).

Aspectele teoretice expuse prezintă o importanță particulară în analiza seismică a structurilor întrucît funcția de excitație $\ddot{u}_0(t)$, care intervine în ecuațiile de condiție, reprezintă variația accelerațiilor care se manifestă la baza construcțiilor pe timpul cutremurelor. Deoarece funcția $\ddot{u}_0(t)$ care caracterizează acțiunea seismică nu poate fi modelată prin funcții matematice continue, evaluarea integralei de superpoziție (Duhamel) se va realiza prin tehnici de calcul specifice analizei seismice.

4.2.2. Cazul acțiunilor armonice

Se va admite cazul particular al mișcării bazei structurii, conform unei legi armonice de variație, $u_0(t) = u_0 \sin \theta t$, unde u_0 reprezintă amplitudinea, iar θ — pulsația mișcării.

În aceste condiții ecuația (4.55) se va exprima astfel:

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\nu_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = \frac{P_i^*}{M_i^*}u_0\theta^2 \sin \theta t \quad (4.63)$$

(în care s-a introdus membrul drept al ecuației în valoare absolută).

Datorită identității, din punct de vedere matematic, între ecuațiile (4.63) și (2.57), pentru deplasările instantanee relative modale $x_{k,i}(t)$ se va obține următoarea formă simplificată:

$$x_{k,i}(t) \simeq u_0 A_{k,i}\left(\frac{\theta}{\omega_i}\right)^2 \mu_i^*(\sin \theta t - e^{-\nu_i\omega_i t}\frac{\theta}{\omega_i}\sin \omega_i^* t),$$

sau dacă se folosește notația (2.116)

$$x_{k,i}(t) \simeq u_0 A_{k,i}\bar{\mu}_i^*\left(\sin \theta t - e^{-\nu_i\omega_i t}\frac{\theta}{\omega_i}\sin \omega_i^* t\right), \quad (4.64)$$

unde

$$\bar{\mu}_i^* = \left(\frac{\theta}{\omega_i}\right)\mu_i^*,$$

iar μ_i^* care reprezintă FADM, are expresia (4.42).

Răspunsul permanent exprimat în deplasări instantanee relative modale rezultă:

$$x_{k,i}(t) = u_0 A_{k,i}\bar{\mu}_i^* \sin \theta t.$$

Valoarea maximă a răspunsului permanent va fi

$$x_{k,i} = x_{k,i}(t)|_{max} = u_0 A_{k,i}\bar{\mu}_i^*. \quad (4.65)$$

Răspunsul relativ total se obține prin superpoziție liniară, în conformitate cu relațiile (4.45) și (4.46).

În privința posibilității apariției fenomenului de rezonanță multiplă rămîn valabile observațiile expuse în § 4.1.2.

4.3. RĂSPUNS LIBER ÎN CONDIȚII INIȚIALE DATE

Analiza vibrațiilor libere a sistemelor cu nGLD a fost expusă în § 3.1.4, pe baza definirii clasice a răspunsului dinamic în condiții inițiale date. În cele ce urmează, rezolvarea se va efectua în sensul analizei modale a răspunsului, ceea ce permite generalizarea aspectelor teoretice care intervin.

Ecuația vibrațiilor libere (3.23), corespunzătoare componentei i a răspunsului liber, se poate exprima astfel

$$([R] - \omega_i^2[M])\{x(t)\}_i = \{0\}.$$

Dacă se ține seama de transformarea (3.12), soluția acestei ecuații de forma (3.4) definește variația în timp a răspunsului liber exprimat în deplasări

$$\{x(t)\}_i = \{A\}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) = A_{1,i}\{\Phi\}_i \sin(\omega_i t + \varphi_i). \quad (4.66)$$

Exprimarea răspunsului liber prin intermediul coordonatelor modale i se obține prin particularizarea ecuației generale (4.25)

$$[I]\{\ddot{\eta}(0)\} + [\Omega]\{\eta(t)\} = \{0\},$$

sau

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

rezultînd astfel vectorul deplasărilor modale:

$$\{x(t)\}_i = \{\Phi\}_i\,\eta_i(t). \tag{4.67}$$

Prin identificarea relațiilor (4.66) și (4.67) se obține:

$$\eta_i(t) = A_{1,i}\sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{4.68}$$

rezultat care reconfirmă concluzia că fiecare componentă modală a răspunsului liber este o funcție armonică și staționară.

În condițiile inițiale cunoscute

$$t = 0, \quad \{x(0)\} = \{x_0\}, \quad \{\dot{x}_0(0)\} = \{v_0\},$$

și exprimate pe direcția GLD $k = 1, 2, \ldots n$, rezultă condițiile inițiale modale de forma celor care au intervenit în relația (4.30), adică $\eta_i(0)$ și $\dot{\eta}_i(0)$.

În această situație, din expresia (4.68) se obțin următoarele condiții:

$$\eta_i(0) = A_{1,i}\sin\varphi_i, \quad \dot{\eta}_i(0) = \omega_i A_{1,i}\cos\varphi_i$$

și deci cele $2n$ constante modale

$$A_{1,i} = \sqrt{\eta_i(0) + \left(\frac{\dot{\eta}_i(0)}{\omega_i}\right)^2} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\varphi_i = \frac{\omega_i\eta_i(0)}{\dot{\eta}_i(0)}, \tag{4.69}$$

$$(i = 1, 2, \ldots n).$$

Cum era de așteptat, condițiile modale $\eta_i(0)$ și $\dot{\eta}_i(0)$ sînt identice cu relațiile (3.44) și (3.45).

4.4. RĂSPUNSUL SISTEMELOR CU COMPORTARE NELINIARĂ

Evaluarea răspunsului forțat în ipoteza comportării neliniare a sistemelor dinamice cu nGLD este asemănătoare situației expuse în § 2.10.

Ecuațiile de condiție, care exprimă echilibrul dinamic incremental, analoage cu ecuația (2.145), rezultă:

$$-\{\Delta F_i(t)\} + \{\Delta F_a(t)\} + \{\Delta F_e(t)\} = \{\Delta F(t)\}. \tag{4.70}$$

Forțele incrementale, de inerție (i), de amortizare (a) și elastice (e), care intervin în ecuația (4.70) au următoarea exprimare:

$$\left.\begin{aligned}
\{\Delta F_i(t)\} &= \{F_i(t+\Delta t)\} - \{F_i(t)\} = -[M]\{\Delta\ddot{x}(t)\},\\
\{\Delta F_a(t)\} &= \{F_a(t+\Delta t)\} - \{F_a(t)\} = [C(t)]\{\Delta\dot{x}(t)\},\\
\{\Delta F_e(t)\} &= \{F_e(t+\Delta t)\} - \{F_e(t)\} = [R(t)]\{\Delta x(t)\},\\
\{\Delta F(t)\} &= \{F(t+\Delta t)\} - \{F(t)\}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.71}$$

Se va considera că matricea de inerție nu se modifică pe durata aplicării acțiunii. Coeficienții care definesc matricele de amortizare și de rigiditate variază în intervalul incremental de timp Δt în aceeași manieră cu reprezentările din figura 2.30.

Ținînd seama de relațiile (4.71), ecuația incrementală a mișcării va avea forma generală

$$[M]\{\Delta\ddot{x}(t)\} + [C(t)]\{\Delta\dot{x}(t)\} + [R(t)]\{\Delta x(t)\} = \{F(t)\}. \tag{4.72}$$

Integrarea sistemului de ecuații (4.72) se va face prin metoda „pas cu pas" (step-by-step), în conceptul expus în § 2.10. Se va utiliza și în această situație metoda variației liniare a vectorului accelerațiilor, rezultînd pentru vectorul vitezelor o variație parabolică pătratică, iar pentru vectorul deplasărilor o variație parabolică cubică.

Analog relației (2.157) se obține în final

$$[\tilde{R}(t)]\{\Delta x(t)\} = \{\Delta\tilde{F}(t)\}, \tag{4.73}$$

unde

$$[\tilde{R}(t)] = [R(t)] + \frac{6}{\Delta t^2}[M] + \frac{3}{\Delta t}[C(t)], \tag{4.74}$$

$$[\Delta\tilde{F}(t)] = [\Delta F(t)] + \left(\frac{6}{\Delta t}\{\dot{x}(t)\} + 3\{\ddot{x}(t)\}\right)[M] + \left(3\{\dot{x}(t)\} + \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{x}(t)\}\right)[C(t)]. \tag{4.75}$$

Ecuația (4.73) este specifică rezolvărilor statice ale structurilor în raport cu matricea de rigiditate. Efectele dinamice intervin în *matricea de rigiditate incrementală* (4.74) prin introducerea influenței inerției și disipării.

Rezolvarea ecuației (4.73) se face prin premultiplicare cu $[\tilde{R}(t)]^{-1}$, obținîndu-se vectorul deplasărilor incrementale

$$\{\Delta x(t)\} = [\tilde{R}(t)]^{-1}\{\Delta F(t)\}. \tag{4.76}$$

Dacă se are în vedere relația (2.153), rezultă direct expresia vectorului vitezelor incrementale

$$\{\Delta\dot{x}(t)\} = \frac{3}{\Delta t}\{\Delta x(t)\} - 3\{\dot{x}(t)\} - \frac{\Delta t}{2}\{\ddot{x}(t)\}. \tag{4.77}$$

La sfîrșitul intervalului incremental de timp Δt, vectorii deplasărilor și vitezelor incrementale

$$\left.\begin{aligned}
\{x(t+\Delta t)\} &= \{x(t)\} + \{\Delta x(t)\},\\
\{\dot{x}(t+\Delta t)\} &= \{\dot{x}(t)\} + \{\Delta\dot{x}(t)\},
\end{aligned}\right\} \tag{4.78}$$

devin condiții inițiale pentru următoarea etapă (sau pas) de operare.

Vectorul accelerațiilor, la sfîrșitul incrementului de timp Δt, se obține prin extinderea relației din capitolul 2, adică:

$$\{\ddot{x}(t+\Delta t)\} = [M]^{-1}(\{F(t+\Delta t)\} - \{F_a(t+\Delta t)\} - \{F_e(t+\Delta t)\}). \tag{4.79}$$

Relația (4.79), în care intervin vectorii forțelor de la sfîrșitul intervalului incremental Δt, poate constitui o condiție de verificare a rezultatelor obținute în fiecare pas al procesului iterativ.

4.5. CONDENSAREA MATRICEI DE RIGIDITATE

În analiza sistemelor discrete s-au utilizat modele dinamice simplificate (care corespund majorității structurilor reale) în care s-au neglijat inerția de rotație (mase punctuale) și inerția axială a elementelor (bare inextensibile). Datorită caracterului particular al modelului dinamic admis, totdeauna matricea de inerție va fi diagonală și alcătuită din masele asociate fiecărui GLD. Rezultă deci că ecuațiile de mișcare se exprimă numai în raport cu coordonatele dinamice de translație ale sistemului, ceea ce permite reducerea substanțială a numărului de GLD. În aceste condiții, este necesar ca matricea de rigiditate a sistemului să fie exprimată tot în coordonate de translație. De aceea influența rotirilor elastice θ ale tuturor nodurilor structurii (reale sau artificiale) se va include în translațiile elastice x, care coincid cu direcțiile în raport cu care se definesc ecuațiile de condiție. Această operație, care se bazează pe un proces de eliminare a componentelor de rotație (din matricea de rigiditate), poartă denumirea de *condensare elastică* sau de *condensare a coordonatelor* (deoarece scade numărul acestora).

În consecință, forțele elastice pot fi exprimate prin intermediul matricei de rigiditate $[R]$ a sistemului, partiționată în funcție de natura coordonatelor, astfel:

$$\left[\begin{array}{c|c} [R_{xx}] & [R_{x\theta}] \\ \hline [R_{\theta x}] & [R_{\theta\theta}] \end{array}\right] \left\{\begin{array}{c} \{x\} \\ \hline \{\theta\} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \{F_x\} \\ \hline \{0\} \end{array}\right\}, \tag{4.80}$$

deoarece, în vectorul forțelor elastice generalizate, s-au considerat nule componentele corespunzătoare rotirilor de nod, adică $\{F_\theta\} = \{0\}$.

Operînd asupra relației (4.80) rezultă:

$$[R_{xx}]\{x\} + [R_{x\theta}]\{\theta\} = \{F_x\}, \tag{4.81}$$

$$[R_{\theta x}]\{x\} + [R_{\theta\theta}]\{\theta\} = \{0\}. \tag{4.82}$$

Prin premultiplicarea ecuației (4.82) cu $[R_{\theta\theta}]^{-1}$ și eliminînd vectorul rotirilor $\{\theta\}$ din ecuația (4.81), se obține *matricea de rigiditate condensată* sub forma

$$[R_x] = [R_{xx}] - [R_{x\theta}][R_{\theta\theta}]^{-1}[R_{\theta x}], \tag{4.83}$$

întrucît forțele elastice, corespunzătoare coordonatelor de translație, pot fi exprimate astfel:

$$\{F_x\} = [R_x]\{x\}. \tag{4.84}$$

Este evident că în ecuațiile de mișcare va interveni matricea de rigiditate condensată (4.83), definită printr-un număr mai redus de coordonate, corespunzătoare numai translațiilor, deoarece rotirile au fost eliminate. Prin urmare, condensarea matricei de rigiditate conduce implicit și la condensarea coordonatelor sistemului, ceea ce reprezintă un avantaj substanțial în analiza numerică.

Matricea de rigiditate (4.83) obținută prin metoda condensării se mai numește de „translație" sau „laterală", în cazul structurilor etajate (v. fig.4.1).

Reducerea matricei de rigiditate a sistemului $[R]$, cînd ordinul acesteia este ridicat, la matricea de rigiditate condensată $[R_x]$, se poate realiza prin operații matematice elementare. Aceste operații se efectuează asupra liniilor matricei $[R]$ pînă cînd în locul submatricei $[R_{x\theta}]$ se obține o submatrice nulă.

4.6. APLICAȚII

Aplicația 4.6.1. Să se determine răspunsul dinamic permanent și neamortizat exprimat în deplasări, al cadrului de beton armat din figura 4.3, *a*, acționat de încărcarea perturbatoare directă $F(t)$, prin analiză modală, utilizînd metoda matricei de rigiditate. Caracteristicile geometrice ale structurii sînt date direct în figura 4.3, *a*. Încărcările gravitaționale, concentrate la cele trei niveluri sînt $Q_1 = 150$ tf (1471,5 kN), $Q_2 = 150$ tf (1471,5 kN) și $Q_3 = 100$ tf (981 kN). Forța perturbatoare are caracter armonic și este $F(t) = F_0 \sin \theta t$, unde $F_0 = 4$ tf (39,24 kN), iar $\theta = 16$ rad/s. Considerînd momentul de inerție de referință I, corespunzător unei secțiuni de 40 × 40 cm, rezultă $EI = 6400$ tfm² (62 784 kN · m²).

Structura acoperișului poate fi considerată rigidă în raport cu celelalte elemente. Deoarece cadrul este simetric din punct de vedere dinamic, iar GLD au un caracter antisimetric, operațiile numerice pot fi conduse pe semistructura antisimetrică.

Sistemul de bază dinamic (SBD) al acestei semistructuri, obținut prin blocarea GLD, este reprezentat în figura 4.3, *b*.

Matricea de rigiditate a semistructurii, exprimată prin reacțiuni, se obține pe coloane, acționînd succesiv SBD cu cîte o deplasare laterală egala cu unitatea.

Avînd în vedere faptul că riglele peste parter și etajul 1 sînt deformabile, deplasarea unitate s-a impus sistemului cu nodurile blocate la rotire într-o fază inițială și deblocate ulterior prin iterație.

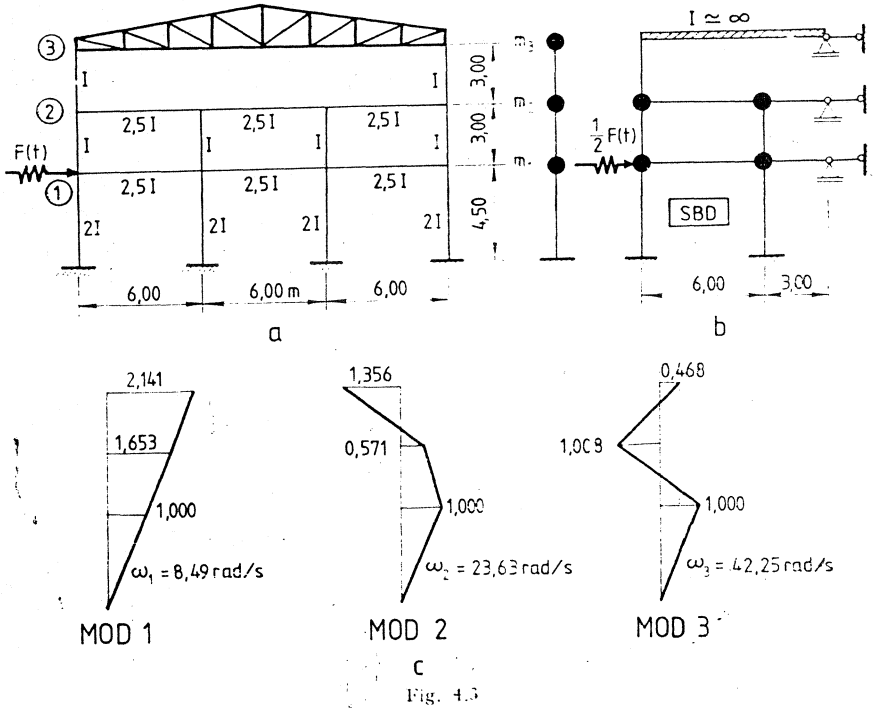


Fig. 4.3

Reacțiunile unitare (rigiditățile) se obțin din forțele tăietoare de la extremitățile stîlpilor, exprimînd echilibrul celor trei rigle.

A rezultat următoarea matrice de rigiditate:

$$[R] = 10\begin{bmatrix} 805{,}6 & -527{,}6 & 57{,}7 \\ -527{,}6 & 718{,}3 & -265{,}8 \\ 57{,}7 & -265{,}8 & 215{,}2 \end{bmatrix} \text{ (tf/m)}$$

Întrucît masele sînt concentrate la nodurile celor trei rigle, matricea de inerție a semistructurii rezultă ca matrice diagonală

$$[M] = 10\begin{bmatrix} 0{,}7645 & & \\ & 0{,}7645 & \\ & & 0{,}5097 \end{bmatrix} \text{ (tf s}^2\text{/m)}$$

În figura 4.3, *c* sînt prezentate cele trei moduri proprii de vibrație. Matricele spectrală și modală sînt:

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \omega_1 & & \\ & \omega_2 & \\ & & \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8{,}49 & & \\ & 23{,}63 & \\ & & 42{,}25 \end{bmatrix} \text{ (rad/s)}$$

$$[\Phi] = [\{\Phi\}_1\ \{\Phi\}_2\ \{\Phi\}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1{,}653 & 0{,}571 & -1{,}008 \\ 2{,}141 & -1{,}356 & -0{,}468 \end{bmatrix}$$

Vectorul forțelor exterioare ce acționează asupra semistructurii este:

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin 16t \quad \text{(tf)}$$

Deoarece pulsațiile proprii sînt distincte, vectorii proprii sînt ortogonali în raport cu $[M]$ și $[R]$ și matricele de inerție și de rigiditate generalizate rezultă diagonale:

$$[M^*] = [\Phi]^T [M] [\Phi] = 10\begin{bmatrix} 5{,}189 & & \\ & 1{,}951 & \\ & & 1{,}652 \end{bmatrix}$$

$$[R^*] = [\Phi]^T [R] [\Phi] = 10\begin{bmatrix} 375{,}7 & & \\ & 1088{,}5 & \\ & & 2950{,}2 \end{bmatrix}$$

Vectorul forțelor generalizate rezultă:

$$\{F^*(t)\} = [\Phi]^T \{F(t)\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \sin 16t.$$

Din sistemul decuplat de ecuații diferențiale

$$[M^*]\{\ddot{\eta}\} + [R^*]\{\eta\} = \{F^*(t)\}$$

prima ecuație modală va fi

$$M_1^*\ddot{\eta}_1 + R_1^*\eta_1 = F_{1,0}^* \sin \theta t,$$

adică

$$5{,}189\ddot{\eta}_1 + 375{,}7\eta_1 = 2 \sin 16t.$$

În regim permanent răspunsul modal are forma:

$$\eta_1(t) = \mu_1 \Delta_{1,ST} \sin \theta t$$

unde:

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)^2} = \frac{1}{1 - \left(\frac{16}{8{,}49}\right)^2} = -0{,}394;$$

$$\Delta_{1,ST} = \frac{F_{0,1}^*}{R_1^*} = \frac{2}{375{,}7} = 5{,}324 \cdot 10^{-3}$$

și deci

$$\eta_1(t) = -2{,}099 \cdot 10^{-3} \sin 16\,t.$$

În mod analog se obțin celelalte două răspunsuri modale:

$$\eta_2(t) = 3{,}395 \cdot 10^{-3} \sin 16t;$$

$$\eta_3(t) = 7{,}914 \cdot 10^{-4} \sin 16t.$$

Răspunsul dinamic permanent în deplasări se obține revenind la coordonatele inițiale:

$$\{x(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} = \begin{Bmatrix} 2{,}087 \\ -2{,}328 \\ -8{,}728 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-4} \sin 16t \quad \text{(m)}$$

Aceleași rezultate s-au obținut prin analiza directă a răspunsului dinamic permanent.

Aplicația 4.6.2. Să se determine variația deplasărilor laterale relative a cadrului din figura 4.4, raportate la deplasarea $u_0(t) = u_0 \sin 2\pi t$ (acțiune de tip indirect) la care este supusă baza fixă (terenul). Mișcarea care este imprimată bazei cadrului se consideră numai în intervalul de timp $0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$ s.

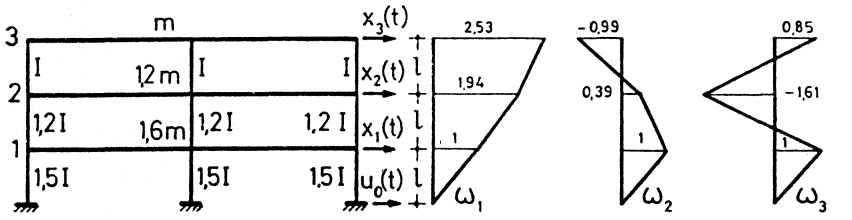


Fig. 4.4

Pentru $t > 0{,}5$ s, $u_0(t) = 0$. Riglele cadrului se presupun perfect rigide, astfel încît deplasările laterale se datorează numai deformabilității stîlpilor. Datele numerice ale problemei sînt următoarele: $Q = mg = 25$ tf (245 kN), $EI = 4\,500$ tfm^2 (44 100 kN m^2), $l = 2{,}8$ m, $u_0 = 1$ cm și $\theta = 2\pi$ (pulsația corespunzătoare excitației exterioare). Pentru rezolvarea acestei probleme se va folosi analiza modală (se va face abstracție de prezența amortizării, $\nu = 0$).

Întrucît la aplicarea analizei modale se consideră cunoscute caracteristicile proprii de vibrație, este necesar să se calculeze în prealabil valorile și vectorii proprii care corespund structurii din figura 4.4.

Efectuînd operațiile de calcul necesare, rezultă pentru matricele de rigiditate și de inerție expresiile:

$$[R] = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 97{,}2 & -43{,}2 & 0 \\ -43{,}2 & 79{,}2 & -36 \\ 0 & -36 & 36 \end{bmatrix}, \quad [M] = m\begin{bmatrix} 1{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cu datele numerice precizate în enunț, se obțin următoarele pulsații și vectori proprii:

$$\omega_1 = 18{,}636 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 = 45{,}642 \text{ rad/s}, \quad \omega_3 = 65{,}775 \text{ rad/s};$$

$$\{\Phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}00 \\ 1{,}94 \\ 2{,}53 \end{Bmatrix}, \quad \{\Phi\}_2 = \begin{Bmatrix} 1{,}00 \\ 0{,}39 \\ -0{,}99 \end{Bmatrix}, \quad \{\Phi\}_3 = \begin{Bmatrix} 1{,}00 \\ -1{,}61 \\ 0{,}85 \end{Bmatrix}.$$

Formele proprii de vibrație sînt reprezentate grafic în figura 4.4 și verifică condiția de ortogonalitate.

Pentru obținerea variației deplasărilor relative laterale produse de mișcarea armonică imprimată bazei $u_0(t) = u_0 \sin \theta t$ ($u_0 = 1$ cm, $\theta = 2\pi$), se va utiliza relația:

$$x_{k,i} = u_0 A_{k,i}\left(\frac{\theta}{\omega_i}\right)^2 \mu_i\left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega_i} \sin \omega_i t\right) = \Phi_{k,i}\eta_i(t).$$

Se vor aplica relațiile:

$$A_{k,i} = A_i \Phi_{k,i} \quad \text{și} \quad \mu_i = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega_i}\right)^2}.$$

Coeficienții din expresia deplasărilor relative modale au următoarele valori:

$$A_1 = 0{,}517, \qquad A_2 = 0{,}388, \qquad A_3 = 0{,}095,$$
$$\theta/\omega_1 = 0{,}3372, \qquad \theta/\omega_2 = 0{,}1377, \qquad \theta/\omega_3 = 0{,}0955,$$
$$(\theta/\omega_1)^2 = 0{,}1137, \qquad (\theta/\omega_2)^2 = 0{,}0190, \qquad (\theta/\omega_3)^2 = 0{,}0091,$$
$$\mu_1 = 1{,}1293, \qquad \mu_2 = 1{,}0194, \qquad \mu_3 = 1{,}0092.$$

Ținînd seama de aceste valori, coordonatele principale

$$\eta_i(t) = u_0 A_i\left(\frac{\theta}{\omega_i}\right)^2 \mu_i$$

au expresiile

$$\eta_1(t) = 0{,}0662\,(\sin 2\pi t - 0{,}3372 \sin 18{,}636\, t),$$
$$\eta_2(t) = 0{,}0076\,(\sin 2\pi t - 0{,}1372 \sin 45{,}642\, t),$$
$$\eta_3(t) = 0{,}0009\,(\sin 2\pi t - 0{,}0955 \sin 65{,}775\, t).$$

Deplasările laterale relative au expresiile:

$$x_1(t) = \Phi_{1,1}\eta_1(t) + \Phi_{1,2}\eta_2(t) + \Phi_{1,3}\eta_3(t),$$
$$x_2(t) = \Phi_{2,1}\eta_1(t) + \Phi_{2,2}\eta_2(t) + \Phi_{2,3}\eta_3(t),$$
$$x_3(t) = \Phi_{3,1}\eta_1(t) + \Phi_{3,2}\eta_2(t) + \Phi_{3,3}\eta_3(t),$$

sau

$$x_1(t) = 0{,}0747 \sin \theta t - 0{,}0233 \sin \omega_1 t - 0{,}00104 \sin \omega_2 t - 0{,}0001 \sin \omega_3 t$$
$$x_2(t) = 0{,}1299 \sin \theta t - 0{,}0433 \sin \omega_1 t - 0{,}0004 \sin \omega_2 t - 0{,}0001 \sin \omega_3 t$$
$$x_3(t) = 0{,}1607 \sin \theta t - 0{,}0564 \sin \omega_1 t - 0{,}0010 \sin \omega_2 t - 0{,}0001 \sin \omega_3 t,$$

în care θ, ω_1, ω_2 și ω_3 au valorile numerice cunoscute, iar timpul variază în intervalul $0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$ s.

În figura 4.5 sînt reprezentate grafic variațiile deplasărilor laterale relative $x_1(t)$, $x_2(t)$ și $x_3(t)$ în funcție de timp.

Aplicația 4.6.3. Se va aplica procedeul condensării matricei de rigiditate pentru structura analizată în capitolul 1, aplicația 1.15.1, unde sînt evaluate numeric cele patru submatrice care intervin în relația (4.80). Inversa submatricei $[R_{\theta\theta}]$ rezultă

$$[R_{\theta\theta}]^{-1}_{2,2} = \begin{bmatrix} 0{,}2962 & -0{,}0846 \\ -0{,}0846 & 0{,}3253 \end{bmatrix}\frac{1}{EI}.$$

Matricea de rigiditate condensată în raport cu translațiile (4.83) se va exprima astfel

$$[R_x]_{2,2} = [R_{xx}]_{2,2} - [R_{x\theta}]_{2,2}\,[R_{\theta\theta}]^{-1}_{2,2}\,[R_{\theta x}]_{2,2}.$$

În urma efectuării operațiilor de calcul s-a obținut

$$[R_x]_{2,2} = EI\begin{bmatrix} 0{,}1458 & -0{,}0452 \\ -0{,}0452 & 0{,}1317 \end{bmatrix}.$$

Se constată că prin eliberarea rotirilor de nod (coordonatele *3* și *4* din figura 1.36), translațiile (coordonatele *1* și *2*) devin cuplate elastic, concomitent cu reducerea rigidităților principale. Matricea de rigiditate $[R]_{4,4}$ s-a condensat la $[R_x]_{2,2}$, simultan cu condensarea corespunzătoare a coordonatelor.

Verificarea s-a efectuat în baza următoarei proprietăți

$$[R_x]^{-1}_{2,2} = [D_{xx}]_{2,2}.$$

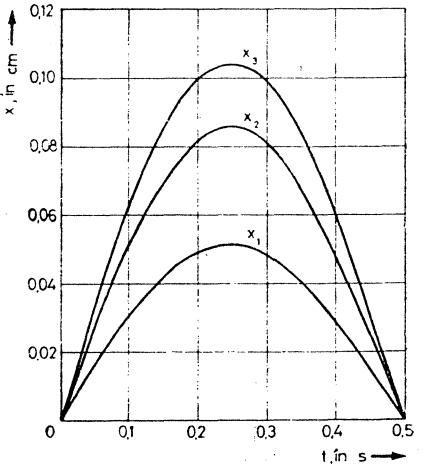


Fig. 4.5

5

DINAMICA SISTEMELOR CONTINUE. SISTEME CU UN NUMĂR INFINIT DE GLD

Sistemele dinamice analizate pînă acum au fost considerate cu mase discrete, avînd deci un număr limitat de grade de libertate. Există totuşi cazuri cînd transformarea unei structuri într-un sistem cu mase concentrate nu reflectă în suficientă măsură comportarea sa reală. Analiza vibraţiilor libere sau forţate în aceste condiţii poate conduce la rezultate mult prea aproximative sau chiar eronate. Este evident că prin mărirea numărului de grade de libertate, aproximarea poate fi îmbunătăţită substanţial, iar rezultatele ce se obţin să se apropie mai mult de cele exacte. Cu toate acestea, în anumite situaţii apare necesar să se ţină seama de distribuţia reală a maselor de-a lungul barelor unei structuri, încît sistemul oscilant rezultat va fi un sistem cu o infinitate de grade de libertate. Soluţiile unui asemenea sistem vor fi funcţii continue care vor depinde direct de modul de distribuţie al maselor, precum şi de variaţia rigidităţilor sistemului. Coordonatele mişcării, care definesc poziţia sistemului oscilant la orice moment t, se raportează totdeauna la poziţia de echilibru static.

În acest capitol vor li examinate cîteva tipuri de sisteme cu masă continuă (bare drepte şi plăci), acordîndu-se o atenţie deosebită determinării caracteristicilor proprii de vibraţie (valori şi vectori proprii), care prezintă cea mai mare importanţă practică.

5.1. VIBRAŢII LIBERE TRANSVERSALE (DE ÎNCOVOIERE) ALE BARELOR DREPTE CU SECŢIUNE CONSTANTĂ. IDENTIFICAREA CARACTERISTICILOR DINAMICE PROPRII

În analiza vibraţiilor libere ale barelor drepte se va considera că oscilaţiile se produc în planul principal de încovoiere. În acest sens, se vor studia vibraţiile barei drepte din figura 5.1, omogenă, izotropă şi perfect elastică, avînd secţiunea constantă şi masa uniform distribuită.

Se vor introduce următoarele notaţii:

p — greutatea proprie a barei pe unitate de lungime;
ϱ — densitatea specifică a materialului ($\varrho = \gamma/g$);
A — aria secţiunii transversale;
$\mu = p/g = \varrho A$ — masa proprie a barei pe unitate de lungime;
I — momentul de inerţie al secţiunii transversale în raport cu axa neutră;
E — modulul de elasticitate longitudinală (modulul lui Young);
g — acceleraţia gravitaţiei.

La un anumit moment t al mişcării se produce încovoierea barei, iar deformata dinamică va fi caracterizată de două variabile independente şi anume, abscisa x şi timpul t, adică $v(x,t)$. De asemenea, eforturile secţionale din bară vor fi funcţii de aceleaşi variabile x şi t.

Pentru a stabili ecuaţia generală a mişcării libere, se va izola un element infinit mic (fig. 5.1) care va fi acţionat de forţele de legătură corespunzătoare (M şi Q), precum şi de forţa de inerţie proporţională cu acceleraţia mişcării.

Făcînd abstracţie de prezenţa forţelor rezistente (de amortizare), asupra elementului de bară dx vor acţiona *forţele elastice* (care se manifestă prin eforturile secţionale M şi Q) şi forţa de inerţie

$$dJ(x, t) = -\mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} dx. \quad (5.1)$$

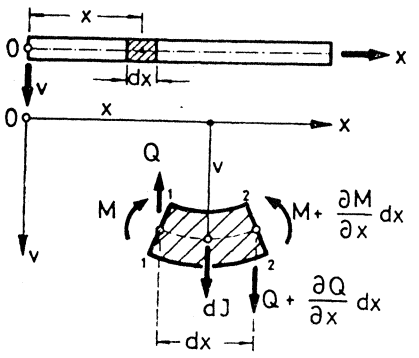


Fig. 5.1

Echilibrul dinamic instantaneu se va exprima prin următoarele două ecuaţii în care s-au neglijat infiniţii mici de ordin superior:

— ecuaţia de proiecţie pe direcţia normalei la axa barei,

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} dx + dJ(x, t) = 0, \quad (5.2)$$

— ecuaţia de momente în raport cu centrul de greutate al secţiunii 2-2,

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} dx - Q(x, t)\, dx = 0. \quad (5.3)$$

Prin derivarea ecuaţiei (5.3) în raport cu x şi avînd în vedere ecuaţia (5.2) se obţine:

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} dx + dJ(x, t) = 0. \quad (5.4)$$

Din rezistenţa materialelor se cunoaşte ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}, \quad (5.5)$$

care este valabilă şi în acest caz deoarece studiul se face în domeniul micilor oscilaţii.

Prin înlocuirea relaţiilor (5.1) şi (5.5) în ecuaţia (5. 4) rezultă ecuaţia diferenţială cu derivate parţiale a mişcării libere a barelor drepte cu comportare liniară

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (5.6)$$

Ecuaţia (5.6) fiind o ecuaţie diferenţială liniară, soluţia generală poate fi exprimată printr-o suprapunere liniară de soluţii particulare independente avînd variabilele în x şi t separate.

5.1.1. Valori și vectori proprii de vibrație. Utilizarea matricei de transfer

O soluție particulară a ecuației (5.6) se va putea exprima prin produsul a două funcții, una depinzînd numai de abscisa x, iar alta numai de timpul t. Deoarece, formele proprii de oscilație ale unui sistem elastic sînt unde staționare independente de timp, este convenabil ca funcția în x să reprezinte chiar forma proprie principală a sistemului, $\Phi(x)$. Rezultă deci că funcția în t va avea caracterul unei coordonate generalizate (principale) $\eta_i(t)$, așa cum a fost definită în capitolul 4. Așadar soluția particulară va fi:

$$v(x, t) = \Phi(x)\,\eta_i(t), \tag{5.7}$$

iar soluția generală se va obține ca o sumă infinită de soluții de tip (5.7), întrucît sistemul dinamic are o infinitate de grade de libertate. Soluția particulară (5.7) va caracteriza o formă oarecare de oscilație ($i = 1, 2 \ldots \infty$).

Înlocuind soluția (5.7) în ecuația (5.6) se obține o ecuație cu variabilele în x și t separate, adică

$$\frac{EI}{\mu}\,\frac{\Phi^{IV}(x)}{\Phi(x)} = -\frac{\ddot{\eta}_i(t)}{\eta_i(t)} = \omega^2 \quad (constant). \tag{5.8}$$

Pentru a exista egalitate între cei doi termeni, care depind de cele două variabile independente, este necesar ca fiecare să fie egal cu aceeași constantă care s-a notat prin ω^2. Această constantă reprezintă *pulsația proprie* a sistemului oscilant.

În concluzie, se observă că ecuația diferențială (5.6), care depinde atît de x, cît și de t, s-a transformat în două ecuații diferențiale omogene cu variabilele separate (5.8), deci:

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega^2\eta_i(t) = 0, \tag{5.9}$$

și

$$\Phi^{IV}(x) - \frac{\mu}{EI}\,\omega^2\Phi(x) = 0. \tag{5.10}$$

Ecuația (5.9) este identică din punct de vedere matematic, cu ecuația vibrațiilor proprii (2.10), încît soluția ei va avea forma clasică

$$\eta_i(t) = M \sin \omega t + N \cos \omega t, \tag{5.11}$$

unde M și N sînt constante de integrare corespunzătoare unei forme oarecare i de vibrație, care se determină din *condițiile inițiale*, iar ω este *pulsația proprie* corespunzătoare formei respective. Nu s-a mai introdus indicele i care marchează modul propriu de vibrație, cu scopul de a nu complica relațiile ce se obțin. S-a precizat deja că soluția (5.7) are caracter de soluție particulară a ecuației, deci corespunde unui mod propriu i de vibrație.

Dacă se introduce notația

$$\alpha^4 = \frac{\mu}{EI}\,\omega^2, \tag{5.12}$$

ecuația (5.10), care este funcție numai de abscisa x, devine

$$\Phi^{IV}(x) - \alpha^4\Phi(x) = 0. \tag{5.13}$$

Integrînd ecuația (5.13) se obține soluția generală ca o combinație liniară de funcții trigonometrice sin αx, cos αx, sh αx și ch αx, adică

$$\Phi(x) = A \operatorname{ch} \alpha x + B \operatorname{sh} \alpha x + C \cos \alpha x + D \sin \alpha x \tag{5.14}$$

Cele patru constante de integrare din soluția (5.14) se determină din *condiții la limită*, adică din condițiile de rezemare ale barei la cele două extremități. Pentru fiecare extremitate există cîte două mărimi elastice cunoscute, caracteristice rezemării efective a barei.

În vederea simplificării operațiilor de calcul, în locul funcțiilor circulare și hiperbolice din relația (5.14) se utilizează combinații ale acestor funcții. Astfel, dacă se consideră un nou grup de constante C_1, C_2, C_3 și C_4 legate de constantele A, B, C și D prin relațiile

$$A = \frac{1}{2}(C_1 + C_3), \qquad C = \frac{1}{2}(C_1 - C_3),$$

$$B = \frac{1}{2}(C_2 + C_4), \qquad D = \frac{1}{2}(C_2 - C_4),$$

soluția (5.14) se transformă astfel:

$$\Phi(x) = C_1F_1(\alpha x) + C_2F_2(\alpha x) + C_3F_3(\alpha x) + C_4F_4(\alpha x). \tag{5.15}$$

Funcțiile care intervin în relația (5.15) au fost introduse de A.N. Krîlov și prezintă avantajul că aduc simplificări importante la determinarea constantelor de integrare. Expresiile acestor funcții rezultă:

$$\left.\begin{aligned} F_1(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha x + \cos \alpha x); & F_2(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \alpha x + \sin \alpha x);\\ F_3(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} \alpha x - \cos \alpha x); & F_4(\alpha x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} \alpha x - \sin \alpha x). \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

Valorile funcțiilor (5.16) pentru diverse mărimi ale argumentului αx sînt în general tabelate.

Efectuînd derivarea succesivă a funcțiilor (5.16) în raport cu x se obține:

$$\left.\begin{aligned} F_1'(\alpha x) &= \alpha F_4(\alpha x); & F_1''(\alpha x) &= \alpha^2 F_3(\alpha x); & F_1'''(\alpha x) &= \alpha^3 F_2(\alpha x);\\ F_2'(\alpha x) &= \alpha F_1(\alpha x); & F_2''(\alpha x) &= \alpha^2 F_4(\alpha x); & F_2'''(\alpha x) &= \alpha^3 F_3(\alpha x);\\ F_3'(\alpha x) &= \alpha F_2(\alpha x); & F_3''(\alpha x) &= \alpha^2 F_1(\alpha x); & F_3'''(\alpha x) &= \alpha^3 F_4(\alpha x);\\ F_4'(\alpha x) &= \alpha F_3(\alpha x); & F_4''(\alpha x) &= \alpha^2 F_2(\alpha x); & F_4'''(\alpha x) &= \alpha^3 F_1(\alpha x). \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

Derivatele (5.17), care pun în evidență periodicitatea funcțiilor (5.16), servesc la exprimarea variației rotirilor $\theta(x)$, momentelor încovoietoare $M(x)$ și forțelor tăietoare $Q(x)$. Pornind de la relația (5.15) rezultă:

$$\Phi'(x) = \theta(x) = \alpha[C_1F_4(\alpha x) + C_2F_1(\alpha x) + C_3F_2(\alpha x) + C_4F_3(\alpha x)], \tag{5.18}$$

$$\Phi''(x) = -\frac{M(x)}{EI} = \alpha^2[C_1F_3(\alpha x) + C_2F_4(\alpha x) + C_3F_1(\alpha x) + C_4F_2(\alpha x)], \tag{5.19}$$

$$\Phi'''(x) = -\frac{Q(x)}{EI} = \alpha^3[C_1F_2(\alpha x) + C_2F_3(\alpha x) + C_3F_4(\alpha x) + C_4F_1(\alpha x)] \tag{5.20}$$

Dacă se introduc acești vectori în relația (5.22), după efectuarea unor operații matematice elementare, se obține următorul sistem de ecuații:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2 EI}F_3(\alpha l) & -\frac{1}{\alpha^3 EI}F_4(\alpha l) \\ 0 & -1 & -\frac{1}{\alpha EI}F_2(\alpha l) & -\frac{1}{\alpha^2 EI}F_3(\alpha l) \\ 0 & 0 & F_1(\alpha l) & \frac{1}{\alpha}F_2(\alpha l) \\ 0 & 0 & \alpha F_4(\alpha l) & F_1(\alpha l) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi(l) \\ \theta(l) \\ M_0 \\ Q_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{5.25}$$

S-a obținut astfel un sistem de ecuații algebrice și omogene avînd ca necunoscute $\Phi(l)$, $\theta(l)$, M_0 și Q_0. Ca să admită soluții diferite de zero, deci ca bara să oscileze, este necesar și suficient ca determinantul matricei de transfer să fie egal cu zero. Se obține astfel o ecuație în funcție de parametrul α care reprezintă o valoare proprie a sistemului, datorită relației de legătură (5.12).

Dezvoltînd acest determinant se obține *ecuația caracteristică* a sistemului oscilant sub forma:

$$\Delta(\alpha) = F_1^2(\alpha l) - F_2(\alpha l)\, F_4(\alpha l) = 0.$$

Prin înlocuirea funcțiilor F_1, F_2 și F_4 cu expresiile (5.16) ecuația caracteristică devine:

$$\cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l = -1. \tag{5.26}$$

Rădăcinile acestei ecuații sînt următoarele:

$$\alpha_1 l = 1{,}875; \quad \alpha_2 l = 4{,}694; \quad \alpha_3 l = 7{,}855,$$

și în general, pentru $i \geqslant 3$

$$\alpha_i l \simeq \left(i - \frac{1}{2}\right)\pi$$

Utilizînd relația (5.12), pentru pulsația *vibrațiilor proprii* rezultă formula:

$$\omega_i = \alpha_i^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = (\alpha_i l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}; \tag{5.27}$$

care, aplicată cazului concret analizat conduce la

$$(i = 1) \qquad \omega_1 = 3{,}52 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}};$$

$$(i = 2) \qquad \omega_2 = 22{,}0 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}};$$

$$(i \geqslant 3) \qquad \omega_i = \frac{(2i-1)^2}{4}\pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}.$$

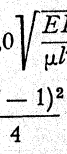
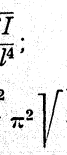
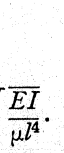
Forma proprie i se obține din relațiile (5.21)

$$\Phi_i(x) = -\frac{1}{\alpha_i^2 EI}F_3(\alpha_i x)\, M_0 - \frac{1}{\alpha_i^3 EI}F_4(\alpha_i x)\, Q_0,$$

TABELUL 5.1

CARACTERISTICA PULSATIEI PROPRII $(\alpha_i l)$ ȘI CONFIGURAȚIA GEOMETRICĂ A FORMELOR PRINCIPALE

$\omega_i = (\alpha_i l)^2 \sqrt{EI/\mu l^4}$ $\left(\frac{rad}{s}\right)$

NR. CRT.	TIPUL DE BARA	MODUL DE VIBRAȚIE „i” 1	2	3	4	5	EXPRESIA GENERALA $(\alpha_i l)$
1		3,142	6,283	9,425	12,566	15,708	$i\,\pi$ $\quad i \geqslant 1$
2		1,875	4,694	7,855	10,996	14,137	$(2i-1)\frac{\pi}{2}$ $\quad i \geqslant 3$
3		3,927	7,069	10,210	13,352	16,493	$(4i+1)\frac{\pi}{2}$ $\quad i \geqslant 1$
4		4,730	7,853	10,996	14,137	17,279	$(2i+1)\frac{\pi}{2}$ $\quad i \geqslant 2$
5		4,730	7,853	10,996	14,137	17,279	$(2i+1)\frac{\pi}{2}$ $\quad i \geqslant 2$

sau

$$\Phi_i(x) = -\frac{M_0}{\alpha_i^2 EI}\left[F_3(\alpha_i x) - \frac{1}{\alpha_i}\frac{Q_0}{M_0}F_4(\alpha_i x)\right].$$

Din a treia sau a patra ecuație din sistemul (5.25) rezultă identitatea:

$$\frac{Q_0}{M_0} = \alpha_i \frac{F_1(\alpha_i l)}{F_2(\alpha_i l)},$$

care înlocuită mai sus conduce la ecuația *formei proprii i*, de vibrație:

$$\Phi_i(x) = A_i\left[F_3(\alpha_i x) - \frac{F_1(\alpha_i l)}{F_2(\alpha_i l)}F_4(\alpha_i x)\right], \qquad (5.28)$$

unde A_i este o constantă arbitrară. Configurațiile geometrice ale formelor proprii de oscilație sînt date în figura 5.2.

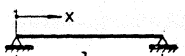
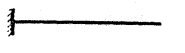
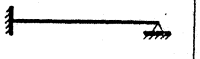
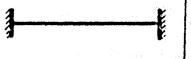
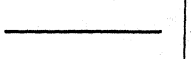
Substituind în expresia (5.28) relațiile (5.16) și considerînd $A_i = 1$ se obține variația vectorului propriu i de forma

$$\Phi_i(x) = \operatorname{ch}(\alpha_i x) - \cos(\alpha_i x) - \frac{\cos(\alpha_i l) + \operatorname{ch}(\alpha_i l)}{\sin(\alpha_i l) + \operatorname{sh}(\alpha_i l)}[\operatorname{sh}(\alpha_i x) - \sin(\alpha_i x)]. \qquad (5.29)$$

În tabelul 5.1 sînt prezentate caracteristicile de vibrație (pulsații și forme proprii) ale barelor cu o singură deschidere și diverse tipuri de rezemare, avînd deci condiții la limită (de legătură) diferite. Barele fiind de secțiune constantă, adică $EI = const.$ și $\mu = const.$ tabelul va conține numai caracteristica proprie $\alpha_i l$ care definește pulsația proprie în conformitate cu formulele (5.12) sau (5.27).

Pentru cazurile sintetizate în tabelul 5.1, ecuațiile caracteristice și variațiile formelor proprii ce se obțin sînt redate în forma finală în tabelul 5.2.

TABELUL 5.2

NR. CRT.	TIPUL DE BARĂ	ECUAȚIA CARACTERISTICĂ EXPRESIA FORMEI PROPRII DE VIBRAȚIE $\Phi_i(x)$
1		$F_2^2(\alpha_i l) - F_4^2(\alpha_i l) = 0 \longrightarrow \operatorname{sh}\alpha_i l \sin\alpha_i l = 0$ $\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)$
2		$F_1^2(\alpha_i l) - F_2(\alpha_i l)F_4(\alpha_i l) = 0 \longrightarrow \cos\alpha_i l = -\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_i l}$ $\operatorname{ch}(\alpha_i x) - \cos(\alpha_i x) - \frac{\cos(\alpha_i l) + \operatorname{ch}(\alpha_i l)}{\sin(\alpha_i l) + \operatorname{sh}(\alpha_i l)}[\operatorname{sh}(\alpha_i x) - \sin(\alpha_i x)]$
3		$F_2(\alpha_i l)F_3(\alpha_i l) - F_1(\alpha_i l)F_4(\alpha_i l) = 0 \longrightarrow \operatorname{tg}\alpha_i l = \operatorname{th}\alpha_i l$ $\operatorname{ch}(\alpha_i x) - \cos(\alpha_i x) - \frac{\operatorname{ch}(\alpha_i l) - \cos(\alpha_i l)}{\operatorname{sh}(\alpha_i l) - \sin(\alpha_i l)}[\operatorname{sh}(\alpha_i x) - \sin(\alpha_i x)]$
4		$F_3^2(\alpha_i l) - F_2(\alpha_i l)F_4(\alpha_i l) = 0 \longrightarrow \cos\alpha_i l = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_i l}$ $\operatorname{ch}(\alpha_i x) - \cos(\alpha_i x) - \frac{\cos(\alpha_i l) - \operatorname{ch}(\alpha_i l)}{\sin(\alpha_i l) - \operatorname{sh}(\alpha_i l)}[\operatorname{sh}(\alpha_i x) - \sin(\alpha_i x)]$
5		$F_3^2(\alpha_i l) - F_2(\alpha_i l)F_4(\alpha_i l) = 0 \longrightarrow \cos\alpha_i l = \frac{1}{\operatorname{ch}\alpha_i l}$ $\operatorname{ch}(\alpha_i x) + \cos(\alpha_i x) - \frac{\operatorname{ch}(\alpha_i l) - \cos(\alpha_i l)}{\operatorname{sh}(\alpha_i l) - \sin(\alpha_i l)}[\operatorname{sh}(\alpha_i x) - \sin(\alpha_i x)]$

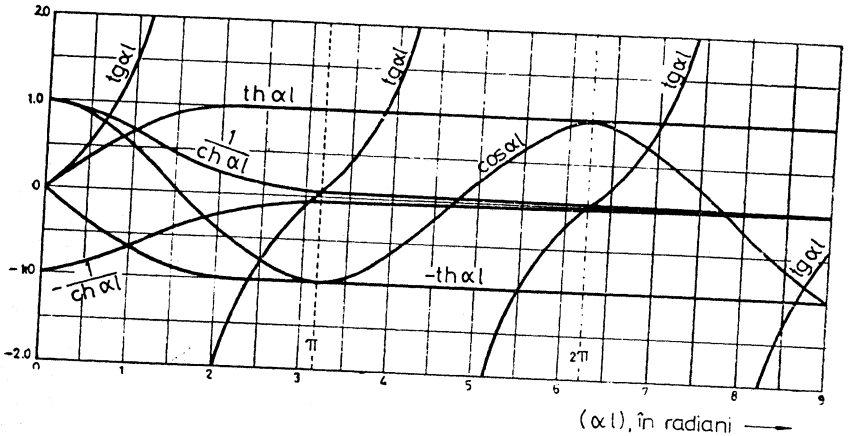


Fig. 5.3

Rezolvarea ecuațiilor caracteristice în forma dată în tabelul 5.2 se poate face pe cale grafică utilizînd curbele din figura 5.3.

5.1.2. Soluția generală a vibrațiilor libere. Răspuns liber în condiții inițiale date

Vibrațiile libere ale oricărui tip de bară se obțin prin suprapunerea soluțiilor particulare corespunzătoare fiecărui mod i de vibrație (5.7), adică:

$$v(x, t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} v_i(x, t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \Phi_i(x)\,\eta_i(t). \qquad (5.30)$$

Dacă se ține seama de soluția (5.11), relația (5.30) devine

$$v(x, t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \Phi_i(x)\,[M_i \sin\omega_i t + N_i \cos\omega_i t], \qquad (5.31)$$

în care funcțiile proprii $\Phi_i(x)$, caracteristice tipului de bară considerat, au expresiile din tabelul 5.2.

Din relația (5.31) se observă că teoretic există o dublă infinitate de constante care se determină dintr-o dublă infinitate de condiții inițiale, exprimate în deplasări și viteze. Rezultă deci că problema este rezolvabilă.

Astfel, dacă se folosesc datele din tabelul 5.2, pentru *bara articulată la ambele capete*, soluția vibrațiilor libere va avea forma

$$v(x, t) = \sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)[M_i \sin\omega_i t + N_i \cos\omega_i t]. \qquad (5.32)$$

Se vor considera următoarele condiții inițiale ($t = 0$):

$$v(x, 0) = f(x); \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = g(x),$$

Dacă funcțiile $f(x)$ și $g(x)$ satisfac condițiile lui Dirichlet, adică dacă în intervalul $0 \leqslant x \leqslant l$ aceste funcții au o variație monotonă pe porțiuni, iar la

limitele acestora nu există discontinuităţi, constantele M_i şi N_i se obţin cu ajutorul formulelor Fourier. Astfel, introducînd cele două condiţii iniţiale în expresia (5.32) şi folosind apoi proprietatea de ortogonalitate a funcţiilor trigonometrice se va obţine

$$\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} N_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) = f(x),$$

$$\sum_{i=1,2,\ldots}^{\infty} M_i\omega_i \sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right) = g(x),$$

şi deci

$$\left.\begin{aligned} M_i &= \frac{2}{l\omega_i}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x \\ N_i &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{i\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x \end{aligned}\right\} \qquad (5.33)$$

Se constată că răspunsul liber exprimat prin ecuaţia (5.32) este o *mişcare periodică* avînd perioada egală cu perioada fundamentală a barei

$$T = T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2l^2}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{EI}}, \qquad (5.34)$$

deoarece, conform datelor din tabelul 5.1

$$\omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}.$$

5.1.3. Proprietatea de ortogonalitate a vectorilor proprii de vibraţie

Proprietatea de ortogonalitate a vectorilor proprii se poate stabili extinzînd rezultatele obţinute în § 3.1.3 pentru cazul sistemelor oscilante cu masă distribuită. Condiţia de ortogonalitate se poate deduce însă direct prin aplicarea teoremei reciprocităţii lucrului mecanic virtual (teorema lui Maxwell-Betti) pentru caracteristicile dinamice ale celor două moduri de vibraţie i şi j independente ($i \neq j$). Deoarece, fiecare formă de vibraţie reprezintă o stare de echilibru dinamic instantaneu sub acţiunea forţelor de inerţie respective, teorema lui Maxwell-Betti va avea în acest caz următoarea formulare: lucrul mecanic virtual produs de forţele de inerţie din modul i de vibraţie, parcurgînd deplasările corespunzătoare din forma j, este egal cu lucrul mecanic virtual produs de forţele de inerţie din modul i, parcurgînd deplasările corespunzătoare din forma i. Deci:

$$\int_0^l [\omega_i^2\mu(x)\,\Phi_i(x)]\,\Phi_j(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^l [\omega_j^2\mu(x)\,\Phi_j(x)]\,\Phi_i(x)\,\mathrm{d}x,$$

sau

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2)\int_0^l \Phi_i(x)\,\Phi_j(x)\,\mu(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Întrucît

$$\omega_i \neq \omega_j \qquad (i \neq j),$$

rezultă *condiţia generală de ortogonalitate* pentru două forme proprii diferite

$$\int_0^l \Phi_i(x)\,\Phi_j(x)\,\mu(x)\,\mathrm{d}x = 0, \quad (i \neq j). \qquad (5.35)$$

În cazul particular al sistemelor cu *masă uniform distribuită* cînd $\mu\ (x)$ este constant, se obţine:

$$\int_0^l \Phi_i(x)\,\Phi_j(x)\,\mathrm{d}x = 0. \quad (i \neq j). \qquad (5.36)$$

5.1.4. Sisteme formate din bare drepte cu masă continuă

Analiza vibraţiilor libere ale structurilor complexe (grinzi continue, cadre etc.), ţinînd seama de distribuţia efectivă a maselor pe toate elementele de rezistenţă componente, teoretic nu comportă dificultăţi de formulare a ecuaţiilor de condiţie. Se pot utiliza rezultatele obţinute anterior, valabile pentru orice bară dreaptă avînd condiţiile la limită (de capete) determinate. Pentru fiecare bară a unei structuri complexe se poate scrie o relaţie de forma (5.22) şi anume:

$$\{V\}_{DR} = [T]\,\{V\}_{ST}, \qquad (5.37)$$

unde

$\{V\}_{ST}$ este vectorul de stare al capătului sting al barei, conţinînd funcţiile încovoierii din secţiunea respectivă;

$\{V\}_{DR}$ — vectorul de stare al capătului din dreapta, conţinînd de asemenea funcţiile încovoierii din secţiunea respectivă.

Matricea de transfer va avea semnificaţia expusă anterior, iar forma va fi identică cu expresia (5.24).

Se scriu astfel relaţii de forma (5.37) pentru toate barele structurii, iar condiţiile la limită (cîte patru pentru fiecare bară) rezultă din condiţiile de continuitate ale deformaţiilor şi de echilibru dinamic, exprimate în secţiunile în care barele structurii se consideră asamblate.

Spre exemplu, pentru porţiunea de grindă continuă din figura 5.4, condiţiile la limită din secţiunea k (în număr de patru), care exprimă legătura

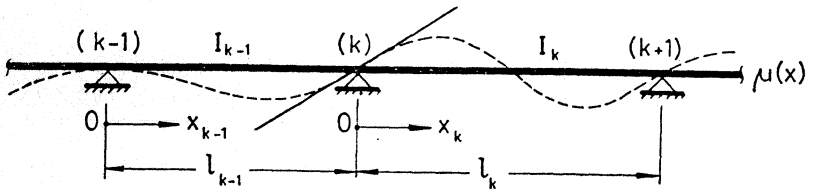


Fig. 5.4

dintre vectorii de stare ai barelor $(k-1,\ k)$ și $(k,\ k+1)$ vor fi următoarele:

$$\Phi(x_{k-1})\big|_{x_{k-1}=l_{k-1}} = 0,$$

$$\Phi(x_k)\big|_{x_k=0} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\Phi(x_{k-1})}{\mathrm{d}x_{k-1}}\bigg|_{x_{k-1}=l_{k-1}} = \frac{\mathrm{d}\Phi(x_k)}{\mathrm{d}x_k}\bigg|_{x_k=0},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi(x_{k-1})}{\mathrm{d}x_{k-1}^2}\bigg|_{x_{k-1}=l_{k-1}} = \frac{\mathrm{d}^2\Phi(x_k)}{\mathrm{d}x_k^2}\bigg|_{x_k=0}.$$

5.1.5. **Sisteme cu masă continuă și mase concentrate**

Există situații în care, pe lîngă masa uniform distribuită, sistemul oscilant posedă și mase concentrate. Din punct de vedere teoretic problema se tratează în mod similar cazului sistemelor continue cu observația că în dreptul maselor concentrate, cele patru condiții la limită, dintre elementele de bară, vor avea următoarele semnificații:

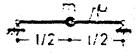
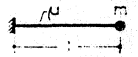
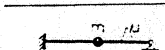
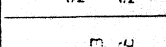
— deplasarea relativă este nulă;
— rotirea relativă este nulă;
— momentele încovoietoare sînt egale;
— forța tăietoare va avea un salt egal cu forța de inerție corespunzătoare masei respective.

În tabelul 5.3 sînt date expresiile de calcul ale pulsației fundamentale pentru barele cu masă uniform distribuită μ și secțiune constantă avînd atașată o masă concentrată m. Pulsația fundamentală se va determina cu formula

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_{ech}}}, \tag{5.38}$$

unde s-a notat m_{ech}, masa concentrată echivalentă a sistemului oscilant cu un singur grad de libertate. Se observă, că în această situație, expresia pulsației fundamentale este identică cu formula (2.7).

TABELUL 5.3

NR. CRT.	TIPUL SISTEMULUI	PULSAȚIA FUNDAMENTALĂ $\omega_1 \approx \sqrt{\frac{k}{m_{ech}}}$	
		m_{ech}	k
1		$m + 0{,}49\mu l$	$48\frac{EI}{l^3}$
2		$m + 0{,}24\mu l$	$3\frac{EI}{l^3}$
3		$m + 0{,}46\mu l$	$110\frac{EI}{l^3}$
4		$m + 0{,}38\mu l$	$192\frac{EI}{l^3}$

5.2. INFLUENȚA FORȚEI AXIALE ASUPRA PULSAȚIEI PROPRII ÎN CAZUL VIBRAȚIILOR TRANSVERSALE ALE BARELOR

Dacă asupra unei bare drepte acționează o forță axială (de întindere sau compresiune), pulsația proprie a vibrațiilor transversale va depinde, în afară de caracteristicile proprii ale barei, și de mărimea și sensul acestei forțe. Este evident că prezența unei forțe de întindere va contribui la majorarea rigidității transversale a barei în timp ce o forță de compresiune va micșora această rigiditate. De aceea, valoarea pulsației proprii, care se exprimă direct prin intermediul rigidității, va crește sau se va diminua în raport cu pulsația proprie din situația în care nu există forță axială. Totdeauna, tensiunile care rezultă în bară, ca urmare a solicitării axiale, trebuie să se afle în limita de elasticitate a materialului.

Se vor analiza în continuare vibrațiile libere ale barei simplu rezemată din figura 5.5, cu secțiune constantă și masă uniform distribuită, acționată de o forță de întindere constantă N.

Pentru a obține ecuația de mișcare, ținînd seama și de forța axială de întindere N, se va proceda ca în paragraful precedent, exprimînd echilibrul dinamic instantaneu al elementului de bară infinit mic $\mathrm{d}x$.

În acest sens se vor utiliza relațiile anterioare (5.1) ... (5.4) cu mențiunea că ecuația diferențială a fibrei medii (5.5) în cazul de față devine:

$$-EI\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = M(x,t) - Nv(x,t),$$

de unde

$$M(x,t) = -EI\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + Nv(x,t). \tag{5.39}$$

Înlocuind relațiile (5.39) și (5.1) în ecuația (5.4) și efectuînd unele transformări, se obține

$$\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - \frac{N}{EI}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\mu}{EI}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{5.40}$$

Alegînd o soluție particulară de forma (5.7) cu variabilele separate, ecuația (5.40) se va reduce la o ecuație diferențială de ordinul II depinzînd numai de timp (5.9), precum și la o ecuație diferențială de ordinul IV, funcție numai de x, care în acest caz va avea forma

$$\Phi^{IV}(x) - \frac{N}{EI}\Phi''(x) - \omega^2\frac{\mu}{EI}\Phi(x) = 0. \tag{5.41}$$

Se observă că pentru $N = 0$ se obține ecuația (5.10).

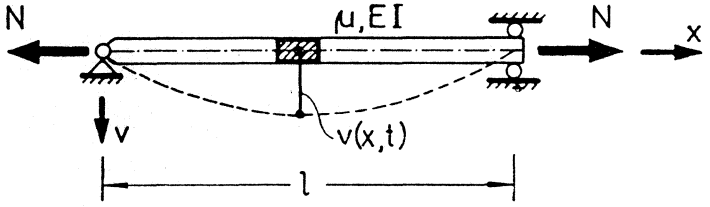


Fig. 5.5

Funcțiile particulare $\Phi(x)$ care satisfac ecuația (5.41) vor fi chiar funcțiile proprii (formele principale) Φ_i $(i = 1, 2, \ldots \infty)$ ale barei dublu articulată (tabelul 5.2). Așadar, se va putea considera următoarea soluție:

$$\Phi_i(x) = \sin\frac{i\pi x}{l}, \quad (i = 1, 2, \ldots \infty). \tag{5.42}$$

Prin substituirea funcției (5.42) în ecuația mișcării (5.41) se obține *ecuația caracteristică* a sistemului

$$\frac{i^4\pi^4}{l^4} + \frac{N}{EI}\frac{i^2\pi^2}{l^2} - \bar{\omega}_i^2\frac{\mu}{EI} = 0, \tag{5.43}$$

unde s-a notat prin $\bar{\omega}_i$ pulsația barei cînd se ține seama de prezența forței axiale.

Din ecuația (5.43) se deduce *pulsația proprie* de ordinul i, cînd se ia în considerație efectul unei forțe axiale de întindere

$$\omega_i^2 = \frac{i^4\pi^4}{l^2}\frac{EI}{\mu}\left[1 + \frac{Nl^2}{i^2\pi^2 EI}\right].$$

Se constată însă că

$$N_{cr,\,i} = \frac{i^2\pi^2 EI}{l^2}$$

reprezintă forța critică de flambaj pentru bara din figura 5.5, cunoscută din rezistența materialelor (formula lui Euler), iar

$$\omega_i = \frac{(i\pi)^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}},$$

este pulsația proprie a barei dublu articulată în absența forței axiale N (tabelul 5.1).

Pe baza acestor observații, expresia pulsației proprii în cazul unei *forțe de întindere*, devine

$$\bar{\omega}_i = \omega_i\sqrt{1 + \frac{N}{N_{cr,\,i}}}. \tag{5.44}$$

Dacă bara este solicitată de o *forță de compresiune*, pulsația proprie va avea expresia

$$\bar{\omega}_i = \omega_i\sqrt{1 - \frac{N}{N_{cr,\,i}}}. \tag{5.45}$$

Din compararea formulelor (5.44) și (5.45) rezultă că acțiunea unei forțe axiale de întindere mărește rigiditatea transversală a barei $(\bar{\omega}_i > \omega_i)$, iar acțiunea unei forțe axiale de compresiune mărește flexibilitatea transversală a barei $(\bar{\omega}_i < \omega_i)$.

În cazul *modului fundamental* $(i = 1)$, de fapt singurul care prezintă interes practic direct, prin particularizarea formulelor (5.44) și (5.45), rezultă:

— cînd forța axială este de întindere

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1\sqrt{1 + \frac{N}{N_{cr}}}; \tag{5.46}$$

— cînd forța axială este de compresiune

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1\sqrt{1 - \frac{N}{N_{cr}}}; \tag{5.47}$$

unde

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

este forța critică minimă de flambaj $(i = 1)$.

Formula (5.47) arată că în situația în care forța de compresiune N se apropie de forța critică minimă, pulsația tinde către zero, iar mișcarea barei pierde caracterul oscilatoriu. Această concluzie poate sta la baza determinării pe cale experimentală a forțelor axiale efective din elementele unei structuri, formate din bare drepte, supuse la forțe axiale de compresiune importante (grinzi cu zăbrele, stîlpii inferiori la construcțiile în cadre multietajate etc.).

Cînd $N \to N_{cr}$, iar $\bar{\omega} \to 0$, ecuația (5.9) devine

$$\ddot{\eta}_i(t) = 0$$

a cărei soluție este

$$\eta_i(t) = M + Nt.$$

Acest rezultat arată că mișcarea este nelimitată în timp. Situația de față caracterizează un caz elementar de *instabilitate dinamică*, iar sistemul dinamic are o comportare neliniară.

5.3. VIBRAȚII FORȚATE ALE BARELOR DREPTE CU MASĂ CONTINUĂ. RĂSPUNS FORȚAT

Studiul răspunsului dinamic al barelor drepte cu masă continuă, la vibrații forțate, se va face utilizînd *analiza modală* în maniera în care a fost expusă în capitolul 4. Se va putea determina astfel deplasarea dinamică în raport cu formele proprii (principale, normale) ale barei, deplasarea totală obținîndu-se prin aplicarea principiului superpoziției.

Se va considera că asupra barei din figura 5.6, *a*, cu secțiune constantă și masă distribuită acționează forțele perturbatoare distribuite $p(x,t)$ în intervalul $0 \leqslant x \leqslant l$. Neglijînd prezența amortizării, ecuația de mișcare se va obține prin exprimarea echilibrului dinamic instantaneu al elementului de bară infinit mic dx (fig. 5.1), asupra căruia, pe lîngă forțele considerate în § 5.1 va mai acționa forța $p(x, t)\,dx$ (fig. 5.6, *a*). În consecință, ecuația vibrațiilor forțate va rezulta sub forma:

$$EI\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \mu(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = p(x,t). \tag{5.48}$$

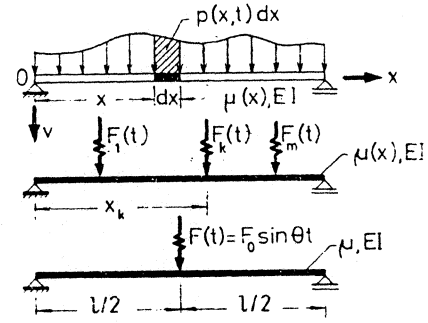


Fig. 5.6

Dacă se consideră o soluție generală de tipul (4.6), adică

$$v(x, t) = \sum_{i=1, 2, \ldots}^{\infty} \Phi_i(x)\, \eta_i(t), \tag{5.49}$$

prin substituire în ecuația (5.48) se obține

$$EI \sum_{i=1, 2, \ldots}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^4\Phi_i(x)}{\mathrm{d}x^4}\, \eta_i(t) + \mu(x) \sum_{i=1, 2, \ldots}^{\infty} \Phi_i(x)\, \frac{\mathrm{d}^2\eta_i(t)}{\mathrm{d}t^2} = p(x, t). \tag{5.50}$$

Din ecuația vibrațiilor libere (5.10) rezultă însă

$$\frac{\mathrm{d}^4\Phi_i(x)}{\mathrm{d}x^4} = \frac{\mu(x)}{EI}\, \omega_i^2 \Phi_i(x). \tag{5.51}$$

Prin înlocuirea relației (5.51) în ecuația (5.50) se va ajunge la următoarea exprimare

$$\mu(x) \sum_{i=1, 2, \ldots}^{\infty} \Phi_i(x)\, \frac{\mathrm{d}^2\eta_i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \mu(x) \sum_{i=1, 2, \ldots}^{\infty} \omega_i^2 \Phi_i(x)\, \eta_i(t) = p(x, t). \tag{5.52}$$

Toți termenii ecuației (5.52) se vor înmulți cu $\Phi_j(x)$, $j \neq i$, și se vor integra de la 0 la l. Ținînd seama de condiția de ortogonalitate (5.35), ecuația vibrațiilor forțate devine

$$\left[\int_0^l \mu(x)\, \Phi_i^2(x)\, \mathrm{d}x\right] \frac{\mathrm{d}^2\eta_i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_i^2 \left[\int_0^l \mu(x)\, \Phi_i^2(x)\, \mathrm{d}x\right] \eta_i(t) = \int_0^l p(x, t)\, \Phi_i(x)\, \mathrm{d}x.$$

Se constată însă că s-au obținut, analog analizei făcute în capitolul 4, următoarele caracteristici ale sistemului oscilant:

— *masa generalizată* corespunzătoare modului i

$$M_i^* = \int_0^l \mu(x)\, \Phi_i^2(x)\, \mathrm{d}x; \tag{5.53}$$

— *forța generalizată* corespunzătoare modului i

$$F_i^*(t) = \int_0^l p(x, t)\, \Phi_i(x)\, \mathrm{d}x. \tag{5.54}$$

Folosind aceste notații, ecuația vibrațiilor forțate va avea o formă analoagă cu ecuația (4.26), cu mențiunea că s-a neglijat termenul corespunzător forțelor rezistente,

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = \frac{F_i^*(t)}{M_i^*}. \tag{5.55}$$

În cazul unor forțe perturbatoare concentrate $F_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots m$ (fig. 5.5, *b*), *forța generalizată* va avea expresia

$$F_i^*(t) = \sum_{k=1}^{m} F_k(t)\, \Phi_i(x_k), \tag{5.56}$$

unde $\Phi_i(x_k)$ reprezintă ordonata formei principale i din dreptul punctelor de aplicație k ale forțelor perturbatoare.

Soluția ecuației (5.55), care reprezintă răspunsul permanent al sistemului (vibrația liberă considerîndu-se atenuată), va avea deci expresia

$$\eta_i(t) = \frac{1}{M_i^* \omega_i} \int_0^t F_i^*(\tau) \sin \omega_i (t - \tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Se va analiza în continuare cazul particular al *acțiunii unei forțe perturbatoare armonice* $F_0 \sin \theta t$, aplicată în mijlocul deschiderii unei bare simplu rezemată cu masă uniform distribuită (fig. 5.6, *c*). Conform tabelului 5.2, ecuația formei proprii rezultă

$$\Phi_i(x) = \sin \frac{i\pi x}{l}, \tag{5.57}$$

și deci

$$\Phi_i\left(\frac{l}{2}\right) = \sin \frac{i\pi}{2}.$$

În consecință, masa generalizată și forța generalizată vor fi

$$M_i^* = \mu \int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} = \frac{\mu l}{2}, \tag{5.58}$$

$$F_i^* = F_0 \sin \frac{i\pi}{2} \sin \theta t, \tag{5.59}$$

iar ecuația (5.55) se transformă astfel

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta_i(t) = \frac{2F_0}{\mu l} \sin \frac{i\pi}{2} \sin \theta t. \tag{5.60}$$

Soluția ecuațiilor (5.60) se determină direct bazați pe analogia dintre această ecuație și ecuația (2.41)

$$\eta_i(t) = \frac{2F_0}{\mu l} \frac{\sin \frac{i\pi}{2}}{\omega_i^2 - \theta^2} \sin \theta t. \tag{5.61}$$

Soluția generală se obține prin aplicarea principiului superpoziției (5.30), avînd în vedere relațiile (5.57) și (5.61)

$$v(x, t) = \frac{2F_0}{\mu l} \sin \theta t \sum_{i=1, 3, \ldots}^{\infty} \frac{\sin \frac{i\pi}{2}}{\omega_i^2 - \theta^2} \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Dacă se ia în considerație expresia pulsației proprii (tabelul 5.1)

$$\omega_i = \frac{(i\pi)^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}},$$

soluția generală mai poate fi scrisă sub forma

$$v(x,t)=\frac{2F_0l^3}{\pi^4EI}\sin\theta t\sum_{i=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{1}{i^4}\sin\frac{i\pi}{2}\sin\frac{i\pi x}{l}\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\omega_i}\right)^2},\qquad(5.62)$$

în care este pus în evidență coeficientul dinamic (2.48). Se observă de asemenea, că în relația (5.62) apar numai termenii pentru i impar, care corespund deci formelor proprii simetrice, datorită caracterului particular al aplicării forței perturbatoare (pe direcția axei de simetrie a sistemului).

O formulă aproximativă a deplasării dinamice se obține considerînd numai primul termen al seriei (pentru $i=1$)

$$v_1(x,t)=\frac{2F_0l^3}{\pi^4EI}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)^2}\cdot\sin\frac{\pi x}{l}\sin\theta t.\qquad(5.63)$$

Valoarea maximă a deplasării dinamice se va obține în mijlocul grinzii, pentru $x=l/2$

$$v_1\left(\frac{l}{2},t\right)\Big|_{max}=\frac{2F_0l^3}{\pi^4EI}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)^2}\simeq\Delta_{ST}\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)^2},\qquad(5.64)$$

deoarece

$$\Delta_{ST}=\frac{F_0l^3}{48EI}\simeq\frac{2F_0l^3}{\pi^4EI}$$

reprezintă săgeata statică produsă de acțiunea forței F_0. Se constată astfel că s-a ajuns la o exprimare a deplasării dinamice maxime (5.64) identică cu formula (2.53).

Dacă se ține seama și de influența vibrațiilor libere, expresia (5.63) va avea o formă analoagă cu relația (2.50), adică

$$v_1(x,t)=\Delta_{ST}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)^2}\sin\frac{\pi x}{l}\left(\sin\theta t-\frac{\theta}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right),\qquad(5.65)$$

iar în mijlocul deschiderii

$$v_1\left(\frac{l}{2},t\right)=\Delta_{ST}\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\omega_1}\right)^2}\left(\sin\theta t-\frac{\theta}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right).\qquad(5.66)$$

Relația (5.62) pune în evidență posibilitatea apariției fenomenului de rezonanță multiplă în cazul în care $\theta=\omega_i$ ($i=1,3,5,\dots\infty$).

5.4. VIBRAȚII LIBERE ALE PLĂCILOR PLANE DE GROSIME CONSTANTĂ

Pentru stabilirea ecuației de mișcare a unei plăci plane rectangulare, acționată dinamic normal pe planul median, se admit aceleași ipoteze simplificatoare din teoria statică elementară. Se pornește de la

ecuația diferențială a plăcilor plane de grosime constantă stabilită în teoria elasticității

$$\nabla^4w(x,y)=\frac{p(x,y)}{D},\qquad(5.67)$$

unde

$w(x,y)$, reprezintă deplasarea suprafeței mediane a plăcii pe direcția normalei (fig. 5.7);

$D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ — rigiditatea cilindrică a plăcii;

$p(x,y)$ — încărcarea normală pe planul median al plăcii;

h — grosimea plăcii, considerată constantă;

ν — coeficientul de contracție transversală (Poisson);

∇^4 — operatorul biarmonic (dublu Laplace-ian), care în coordonate rectangulare este de forma

$$\nabla^4=\nabla^2\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^4}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

În regim dinamic de solicitare a plăcii, în ecuația diferențială (5.67) intervin:

— forțele de inerție, $-\rho h\frac{\partial^2w(x,y,t)}{\partial t^2}$;

— forțele perturbatoare, $p(x,y,t)$;

unde s-a notat prin ρ densitatea specifică a materialului.

Ecuația diferențială a *vibrațiilor forțate* va rezulta

$$\nabla^4w(x,y,t)+\frac{\rho h}{D}\frac{\partial^2w(x,y,t)}{\partial t^2}=\frac{p(x,y,t)}{D}.\qquad(5.68)$$

În cazul *vibrațiilor libere*, cînd $p(x,y,t)=0$ ecuația mișcării se reduce astfel

$$\nabla^4w(x,y,t)+\frac{\rho h}{D}\cdot\frac{\partial^2w(x,y,t)}{\partial t^2}=0.\qquad(5.69)$$

Se admite pentru ecuația (5.69) o soluție particulară de forma

$$w(x,y,t)=w(x,y)\sin(\omega t+\varphi),\qquad(5.70)$$

în care ω reprezintă *pulsația proprie* a plăcii.

Prin înlocuirea soluției (5.70) în ecuația (5.69) se obține:

$$\nabla^4w(x,y)-\omega^2\frac{\rho h}{D}w(x,y)=0.$$

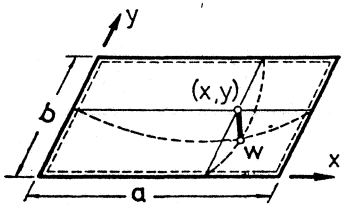


Fig. 5.7

Dacă se introduce notația:

$$\beta^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D}, \tag{5.71}$$

ecuația de mișcare devine

$$\nabla^4 w(x, y) - \beta^4 w(x, y) = 0, \tag{5.72}$$

sau, scrisă în formă de operatori

$$(\nabla^4 - \beta^4)\, w(x, y) = (\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 - \beta^2)\, w(x, y) = 0. \tag{5.73}$$

Pentru rezolvarea ecuațiilor (5.72) sau (5.73) se vor alege soluții care satisfac *condițiile la limită* ale plăcii (în funcție de condițiile de rezemare pe contur), ca în cazul încovoierii statice a plăcilor.

Astfel, dacă se analizează *vibrațiile libere ale unei plăci dreptunghiulare*, avînd laturile a și b (fig. 5.7), se poate admite pentru amplitudinile mișcării o soluție de tipul

$$w_{mn}(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{5.74}$$

care satisface condițiile la limită (pe contur) și unde m și n sînt numere întregi.

Înlocuind soluția (5.74) în ecuația (5.72) rezultă:

$$\left[\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 - \beta^4\right] A_{mn} = 0.$$

Condiția ca sistemul să oscileze este ca amplitudinea să fie diferită de zero. Punînd această condiție se obține *ecuația caracteristică*, prin intermediul căreia se determină spectrul pulsațiilor plăcii

$$\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) - \beta^4 = 0. \tag{5.75}$$

Avînd în vedere relația (5.71) și expresia rigidității cilindrice, ecuația (5.75) permite să se determine *pulsația proprie* de ordinul (m, n):

$$\omega_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1 - \nu^2)}}, \quad (m, n = 1, 2, \ldots). \tag{5.76}$$

Ecuația *formei proprii* de ordinul (m, n) va avea aceeași configurație geometrică cu soluția (5.74), care va fi raportată la amplitudinea arbitrară $A_{mn} = 1$

$$\Phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, \ldots) \tag{5.77}$$

În figura 5.8 sînt reprezentate cîteva moduri de vibrație ale plăcii dreptunghiulare plane din figura 5.7.

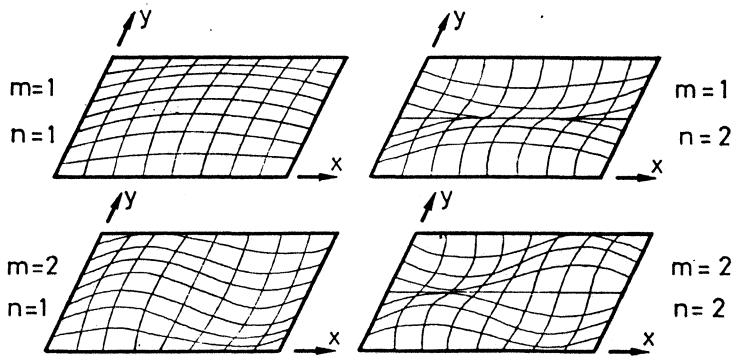


Fig. 5.8

În *modul fundamental*, rezultă $m = n = 1$, astfel încît pulsația și forma proprie, obținute prin particularizarea relațiilor (5.76) și (5.77) vor fi

$$\omega_{1,1} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \sqrt{\frac{Eh^2}{12\rho(1 - \nu^2)}},$$

și

$$\Phi_{1,1} = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \quad (0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b).$$

În cazul unei *plăci pătrate*, avînd latura a, dacă se consideră în relațiile (5.76) și (5.77) $b = a$, se obțin expresiile pulsației și formei proprii

$$\omega_{mn} = \pi^2 (m^2 + n^2) \sqrt{\frac{Eh^2}{12a^4\rho(1 - \nu^2)}}, \tag{5.78}$$

$$\Phi_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{a}, \tag{5.79}$$

iar în modul fundamental

$$\omega_{1,1} = 2\pi^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{12a^4\rho(1 - \nu^2)}} = \pi^2 \sqrt{\frac{Eh^2}{3a^4\rho(1 - \nu^2)}}, \tag{5.80}$$

$$\Phi_{1,1}(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}. \tag{5.81}$$

Soluția *vibrațiilor libere* pentru placa cu contur rectangular se determină prin superpoziția soluțiilor particulare (5.70) și ținînd seama de variația amplitudinilor (5.74)

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(x, y) \sin(\omega_{mn} t + \varphi_{mn}),$$

sau

$$w(x, y, t) = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin(\omega_{mn} t + \varphi_{mn}) \tag{5.82}$$

Cele două constante A_{mn} și φ_{mn} se obțin în baza *condițiilor inițiale* ($t = 0$). În vederea introducerii acestor condiții este mai convenabil să se scrie expresia (5.82) în următoarea formă echivalentă

$$w(x, y, t) = \sum_m \sum_n \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} [M_{mn} \sin \omega_{mn} t + N_{mn} \cos \omega_{mn} t]. \quad (5.83)$$

Determinarea noilor constante M_{mn} și N_{mn} se face considerînd următoarele condiții inițiale

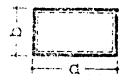
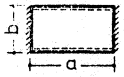
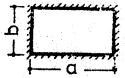
$$w(x, y, 0) = f(x, y); \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y).$$

Procedînd în mod analog cazului studiat în § 5.1.2 (vezi expresia 5.32), rezultă expresiile celor două constante

$$M_{mn} = \frac{4}{ab\omega_{mn}} \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy$$
$$N_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \, dx \, dy \quad (5.84)$$

În tabelul 5.4 sînt date expresiile pulsației fundamentale de vibrație pentru plăcile dreptunghiulare avînd diverse rapoarte între laturi și tipuri de rezemare.

TABELUL 5.4

MODUL DE REZEMARE A PLĂCII DREPTUNGHIULARE	CARACTERISTICA PULSAȚIEI FUNDAMENTALE ζ_1 $\omega_1 = \zeta_1 \sqrt{Eh^3/12\rho a^4(1-\nu^2)} \frac{rad}{s}$ RAPORTUL LATURILOR b/a					
	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	∞
	19,74	14,26	12,34	11,45	10,97	9,87
	23,65	18,90	17,33	16,63	16,26	15,43
	28,95	25,05	23,82	23,27	22,99	22,37
	35,98	27,00	24,57	23,77	23,19	22,37

Tabelul 5.5 cuprinde expresiile pulsațiilor proprii pentru primele cinci moduri de vibrație, în cazul unor plăci circulare și pătrate. Liniile întrerupte marchează laturile simplu rezemate. Tabelul 5.6 conține expresiile de calcul ale pulsațiilor proprii de vibrație pentru plăcile plane în formă de triunghi echilateral, stabilite de M. Bârsan prin metoda fișiilor finite [14].

TABELUL 5.5

NR. CRT.	MODUL DE REZEMARE A PLĂCILOR CIRCULARE ȘI PĂTRATE	CARACTERISTICA PULSAȚIEI ÎN MODUL „i" DE VIBRAȚIE ζ_i $\omega_i = \zeta_i \sqrt{Eh^3/12\rho a^4(1-\nu^2)}$ rad/s MODUL DE VIBRAȚIE				
		1	2	3	4	5
1		20,44	—	—	—	—
2		41,01	85,26	139,98	159,83	357,22
3		19,74	49,40	79,05	98,80	124,45
4		23,65	51,75	58,72	86,22	100,42
5		28,95	54,80	69,39	94,71	102,33
6		3,49	8,55	21,44	27,46	31,17
7		6,96	24,08	26,80	48,05	63,14
8		35,98	73,41	108,27	131,64	135,22

TABELUL 5.6

NR. CRT.	MODUL DE REZEMARE A PLĂCII TRIUNGHIULARE	CARACTERISTICA PULSAȚIEI ÎN MODUL „i" DE VIBRAȚIE ζ_i $\omega_i = \zeta_i \sqrt{Eh^2/12\rho a^4(1-\nu^2)}\ \frac{rad}{s}$				
		MODUL DE VIBRAȚIE				
		1	2	3	4	5
1		51,02	117,30	122,53	207,87	221,18
2		92,33	176,89	181,23	284,88	297,70
3		73,75	152,37	156,41	254,46	265,95
4		66,37	138,36	144,73	234,68	250,42
5		37,13	91,42	93,51	167,64	182,26
6		21,61	64,57	68,20	129,64	145,55

6

METODE NUMERICE PENTRU EVALUAREA VALORILOR ȘI VECTORILOR PROPRII

Din capitolele anterioare a rezultat că determinarea *caracteristicilor proprii de vibrație* ale structurilor reprezintă o problemă fundamentală în dinamica construcțiilor. Prin caracteristici dinamice proprii se înțelege *totalitatea pulsațiilor și formelor proprii*, corespunzătoare modurilor de vibrație pe care le posedă o structură, transformată în sistem oscilant cu un număr limitat sau infinit de grade de libertate. Aceste caracteristici se mai numesc *valori* și *vectori proprii*, în sensul expus în capitolul 3. În cuprinsul acestui capitol se vor folosi ambele denumiri.

Calculul direct al valorilor și vectorilor proprii prin utilizarea ecuațiilor generale (3.15) și (3.26) prezintă în cele mai multe cazuri dificultăți de ordin matematic. Dacă *ecuația caracteristică* este dată sub formă de polinom, rădăcinile acesteia, adică valorile proprii, se pot obține prin utilizarea subrutinelor unui calculator electronic digital. În general, calculul exact al caracteristicilor proprii de vibrație ale unei structuri, prin metodele matematice tradiționale de rezolvare, este extrem de laborios, mai ales în situația în care numărul gradelor de libertate al sistemului este ridicat.

Metodele numerice prezentate în acest capitol permit determinarea pulsațiilor și formelor proprii de vibrație, fie pornind de la relațiile de identitate (3.17) sau (3.27), care depind de matricele $[D]$ și $[R]$, fie direct, fără a mai fi necesar calculul coeficienților și scrierea ecuațiilor de condiție.

Majoritatea metodelor numerice prezintă avantajul substanțial că pot fi programate la calculatoare electronice, ceea ce face ca operațiile complicate și uneori repetitive pe care le implică aceste metode să nu constituie un impediment de ordin matematic. Elaborarea unor asemenea programe de obicei comune, nu reprezintă o problemă dificilă în practica utilizării calculului automat.

Unele din metodele aproximative ce vor fi expuse au în general un domeniu de aplicabilitate limitat, referindu-se în special la determinarea caracteristicilor dinamice ale modului fundamental. Aceste metode au însă avantajul că sînt accesibile aplicațiilor concrete, iar rezultatele ce se obțin cu suficientă rapiditate, conțin erori ce pot fi controlate.

În general, toate metodele numerice se bazează pe aproximarea formelor proprii de vibrație și corectarea lor succesivă printr-o operație de triere. Alegerea unei anumite metode depinde în mare măsură de tehnica de calcul de care se dispune și în general de tipul și importanța structurii analizate, numărul gradelor de libertate, gradul de precizie impus, precum și de numărul modurilor de vibrație ce urmează a se determina.

6.1. METODA RAYLEIGH. METODA ENERGETICĂ

Metoda elaborată de Rayleigh are la bază legea conservării energiei, și se folosește în special la determinarea pulsației fundamentale a unui sistem oscilant cu un număr limitat sau infinit de grade de libertate.

În principiu această metodă se bazează pe aproximarea prealabilă a formelor de vibrație cărora urmează să li se determine pulsațiile corespunzătoare. Deoarece aproximarea deformatelor dinamice ale unei structuri pentru modurile superioare prezintă dificultăți însemnate, metoda lui Rayleigh se aplică cu succes la calculul pulsației fundamentale de vibrație.

Pentru elaborarea și justificarea acestei metode Rayleigh a formulat următorul principiu, numit și *principiul lui Rayleigh: pulsația proprie a unui sistem conservativ, care vibrează în jurul poziției de echilibru, are o valoare staționară în vecinătatea modului propriu corespunzător. Această valoare staționară este totdeauna minimă pentru modul fundamental.*

În vederea stabilirii expresiei pulsației fundamentale, se aplică legea conservării energiei și anume: energia totală a unui sistem conservativ (în care nu există disipare datorită absenței forțelor de amortizare) este constantă pe tot timpul mișcării, adică

$$E_t = E_c(t) + E_p(t) = constant, \tag{6.1}$$

unde

$E_c(t)$ reprezintă *energia cinetică;*

$E_p(t)$ — *energia potențială* a sistemului dinamic.

Dacă un sistem oscilează după un anumit mod de vibrație, toate masele sale efectuează mișcări simple armonice cu o frecvență ce corespunde modului respectiv.

La determinarea energiilor cinetice și potențiale este necesar ca deformata dinamică corespunzătoare modului fundamental să fie compatibilă cu legăturile reale ale sistemului, adică să respecte condițiile la limită (de margine). Dacă această deformată coincide cu forma reală de vibrație, valoarea pulsației ce se obține va fi identică cu valoarea exactă a pulsației fundamentale. Întrucît deformata dinamică fundamentală nu este cunoscută, în funcție de modul în care se aproximează această curbă va depinde exactitatea metodei lui Rayleigh. O aproximare satisfăcătoare a formei fundamentale o constituie de obicei deformata statică, produsă de acțiunea încărcărilor gravitaționale mg aplicate pe direcția GLD ale sistemului.

În cazul unui *sistem discret cu n grade de libertate* (fig. 6.1, *a*) ale cărui mase $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots m_n$ efectuează mișcările $x_1(t), x_2(t), \ldots x_k(t), \ldots x_n(t)$ pe direcția GLD expresiile energiilor cinetică și potențială rezultă:

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{x}_k^2(t), \tag{6.2}$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k(t), \tag{6.3}$$

unde $Q_k = m_k g (k = 1, 2, \ldots n)$ reprezintă încărcările gravitaționale corespunzătoare maselor sistemului.

Pentru forma fundamentală, funcția de timp avînd o formă armonică simplă, deplasările sistemului vor putea fi exprimate astfel:

$$x_k(t) = x_k \sin(\omega_1 t + \varphi_1), \quad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{6.4}$$

în care x_k este amplitudinea deplasării.

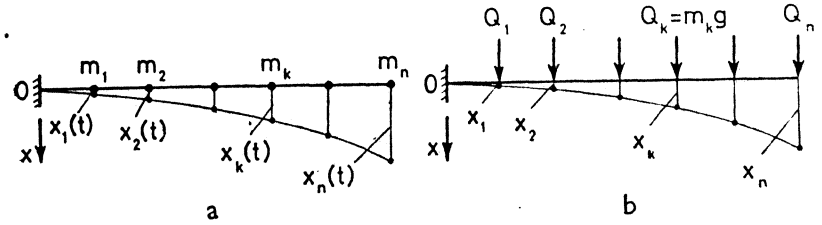


Fig. 6.1

Substituind soluția (6.4) în expresiile energiilor (6.2) și (6.3) se obțin

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\omega_1^2 \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1)\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2 = E_c^{max}\cos^2(\omega_1 t + \varphi_1), \tag{6.5}$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}\sin^2(\omega_1 t + \varphi_1)\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k = E_p^{max}\sin^2(\omega_1 t + \varphi_1). \tag{6.6}$$

În timpul oscilației, cînd sistemul trece prin poziția de echilibru (poziția inițială), energia potențială este nulă ($E_p = 0$), în timp ce energia cinetică atinge valoarea maximă egală cu energia totală ($E_c = E_c^{max} = E_t$). Cînd sistemul trece prin poziția extremă (cînd deplasările sînt maxime), energia cinetică este nulă ($E_c = 0$), iar energia potențială devine maximă și egală cu energia totală ($E_p = E_p^{max} = E_t$). În baza acestor observații, prin aplicarea relației (6.1) se ajunge la următoarea concluzie

$$E_t = 0 + E_c^{max} = E_p^{max} + 0,$$

iau

$$E_c^{max} = E_p^{max}. \tag{6.7}$$

Relația (6.7) care fundamentează teoretic metoda lui Rayleigh, justifică denumirea de *metoda energetică* ce se atribuie acestui procedeu de calcul al pulsației fundamentale.

Dacă se înlocuiesc valorile maxime ale energiilor (6.5) și (6.6) în relația (6.7) se obține:

$$\omega_1^2 \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} Q_k x_k,$$

și deci

$$\omega_{1,R}^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2} = g\frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k^2}, \tag{6.8}$$

(deoarece $Q_k = m_k g$)

Expresia pulsației fundamentale (6.8) poartă denumirea de *formula lui Rayleigh* sau *cîtul lui Rayleigh*. În general, cîtul lui Rayleigh se exprimă în funcție de cele două energii astfel:

$$\omega_{1,R}^2 = R(x) = \frac{E_p^{max}}{E_c^{*max}}, \tag{6.9}$$

notîndu-se prin E_c^{*max}, *energia cinetică de referință* (cînd $\omega_1 = 1$).

În cazul în care variația amplitudinilor x_k ale deformatei dinamice, care intervine în formula (6.8), are aceeași configurație geometrică cu forma proprie fundamentală, pulsația care se obține coincide cu pulsația fundamentală reală. Deoarece variația modului fundamental trebuie estimată (propusă) inițial, rezultatul va fi cu atît mai exact cu cît această curbă se apropie mai mult de forma reală.

Principiul lui Rayleigh enunțat anterior arată că valoarea cîtului $R(x)$ este staționară cînd deformata admisă pentru modul fundamental se află în vecinătatea formei proprii reale. Astfel, dacă vectorul propriu fundamental conține o eroare de ordinul I, cîtul lui Rayleigh (6.9), deci valoarea proprie corespunzătoare, rezultă cu o eroare de ordinul II. Această constatare permite să se asimileze forma fundamentală cu deformata statică a structurii, produsă de acțiunea încărcărilor gravitaționale corespunzătoare maselor sistemului ($Q_k = m_k g$), aplicate pe direcția GLD (fig. 6.1, *b*). Folosirea deformatei statice conduce la rezultate satisfăcătoare din punct de vedere practic deoarece pulsația obținută prin aplicarea formulei (6.9) este, în general, cu 0 . . . 5% mai mare decît pulsația exactă [90].

În concluzie

$$\omega_{1,\,RAYLEIGH} \geqslant \omega_{1,\,EXACT} \tag{6.10}$$

și de obicei rezultă

$$\omega_{1,R} \simeq (1 \ldots 1{,}05)\,\omega_{1,\,EX}, \tag{6.11}$$

ceea ce reprezintă o bună aproximare a pulsației fundamentale.

Prin introducerea unui vector propriu care nu coincide cu cel exact, înseamnă că sistemul oscilant a fost impus să vibreze în modul fundamental după o formă diferită de cea reală, ca și cum sistemului i s-au introdus legături (constrîngeri elastice) suplimentare. În acest fel sistemul s-a rigidizat și de aceea pulsația dedusă prin aplicarea formulei (6.8) este mai mare decît valoarea exactă (6.10). Cu alte cuvinte, deformata dinamică propusă conține într-o anumită măsură și contribuția modurilor superioare de vibrație.

Folosind notația

$$x_{ST}^* = \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k^2}{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_k}, \tag{6.12}$$

expresia pulsației fundamentale (6.8) poate fi adusă la forma simplă cunoscută din capitolul 2, care corespunde sistemului cu un singur grad de libertate,

$$\omega_{1,R} = \sqrt{\frac{g}{x_{ST}^*}}. \tag{6.13}$$

Notația (6.12) are semnificația unei săgeți statice echivalente a unui sistem cu un singur grad de libertate a cărui pulsație este egală cu pulsația fundamentală a sistemului cu n grade de libertate.

În cazul unui *sistem cu masă continuă* (fig. 6.2, *a*), stabilirea formulei lui Rayleigh se face în același mod. Considerînd pentru deplasările sistemului oscilant funcția $v(x,t)$, energia cinetică va avea expresia

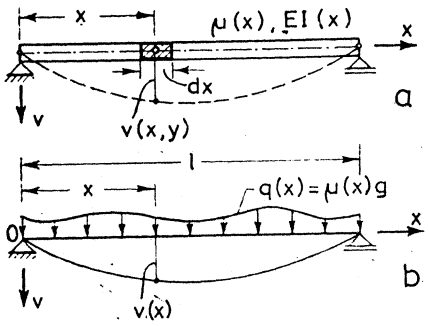


Fig. 6.2

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \mu(x)\left[\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right]^2 \mathrm{d}x, \tag{6.14}$$

iar energia potențială înmagazinată de sistem

$$E_p(t) = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)\left[\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right]^2 \mathrm{d}x, \tag{6.15}$$

unde $\mu(x)$ este masa distribuită, iar $I(x)$ — momentul de inerție al oricărei secțiuni transversale x.

Mișcarea sistemului în modul fundamental fiind armonică, rezultă

$$v(x,\,t) = v(x)\sin(\omega_1 t + \varphi_1), \tag{6.16}$$

obținîndu-se pentru cele două energii (6.14) și (6.15) expresiile

$$E_c(t) = \frac{1}{2}\omega_1^2\cos^2(\omega_1 t + \varphi_1)\int_0^l \mu(x)\,v^2(x)\,\mathrm{d}x, \tag{6.17}$$

$$E_p(t) = \frac{1}{2}\sin^2(\omega_1 t + \varphi_1)\int_0^l EI(x)\left[\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2}\right]^2 \mathrm{d}x. \tag{6.18}$$

Înlocuind valorile maxime ale acestor energii în relația generală (6.7) se obține următoarea formulă pentru pulsația fundamentală:

$$\omega_{1,R}^2 = \frac{\int_0^l EI(x)\left[\frac{\mathrm{d}^2 v(x)}{\mathrm{d}x^2}\right]^2 \mathrm{d}x}{\int_0^l \mu(x)v^2(x)\,\mathrm{d}x}. \tag{6.19}$$

Întrucît energia potențială a sistemului se poate exprima prin intermediul lucrului mecanic de deformație al forțelor exterioare $\mu(x)g$, adică:

$$E_p(t) = \frac{1}{2}g\int_0^l \mu(x)\,v(x,t)\,\mathrm{d}x, \tag{6.20}$$

sau

$$E_p(t) = \frac{1}{2}g\sin(\omega_1 t + \varphi_1)\int_0^l \mu(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x, \tag{6.21}$$

formula (6.19) devine

$$\omega_{1,R}^2 = g\frac{\int_0^l \mu(x)\, v(x)\, dx}{\int_0^l \mu(x) v^2(x)\, dx} = g\frac{\int_0^l q(x)\, v(x)\, dx}{\int_0^l q(x)\, v^2(x)\, dx}. \qquad (6.22)$$

S-a obținut astfel o formulă analoagă cu (6.8) care este mult mai ușor de aplicat și furnizează rezultate cu un grad de exactitate ridicat.

Ca și în cazul precedent, deformata dinamică corespunzătoare modului fundamental poate fi aproximată prin deformata statică produsă de încărcările $q(x) = \mu(x)\, g$ (fig. 6,2, *b*), în care caz rezultatele se găsesc în limitele stabilite prin relațiile (6.10) și (6.11).

Dacă sistemul cu *n* grade de libertate are masele egale, iar cel cu o infinitate de grade de libertate masa uniform distribuită, formulele (6.8), respectiv (6.22), se simplifică substanțial.

Cîtul lui Rayleigh (6.9) poate fi exprimat în *formă matriceală* explicitînd energia potențială maximă E_p^{max} și energia cinetică de referință E_c^{*max}.

Admițînd pentru mișcarea sistemului cu *n* grade de libertate soluția (6.4), cele două energii maxime rezultă:

$$E_p^{max} = \frac{1}{2}\{x\}^T [R] \{x\}, \qquad (6.23)$$

$$E_c^{*max} = \frac{1}{2}\{x\}^T [M] \{x\}, \qquad (6.24)$$

unde matricea de rigiditate $[R]$ și matricea maselor $[M]$ au fost deja definite; $\{x\}$ reprezintă matricea coloană a amplitudinilor, iar $\{x\}^T$ este transpusa acestei matrice (fiind deci matricea linie a amplitudinilor).

Înlocuind (6.23) și (6.24) în formula (6.9) se obține pentru cîtul lui Rayleigh următoarea formă generală

$$\omega^2 = R(x) = \frac{\{x\}^T [R] \{x\}}{\{x\}^T [M] \{x\}}. \qquad (6.25)$$

Întrucît vectorii deplasărilor dinamice maxime, în fiecare mod de vibrație, sînt proporționali cu ordonatele formelor proprii Φ, formula generală se transformă astfel

$$\omega^2 = R(\Phi) = \frac{\{\Phi\}^T [R] \{\Phi\}}{\{\Phi\}^T [M] \{\Phi\}}. \qquad (6.26)$$

Avantajul esențial al exprimării pe cale matriceală a cîtului lui Rayleigh constă în faptul că formula (6.26) oferă teoretic posibilitatea determinării tuturor modurilor proprii de vibrație (valori și vectori proprii) și nu numai obținerea modului fundamental, cum rezulta din formulele anterioare (6.8) și (6.22).

Forma proprie și pulsația corespunzătoare se obțin printr-o operație de triere a vectorilor proprii propuși, ținînd seama de caracteristicile configurației geometrice a formei căutate.

Cîtul lui Rayleigh permite determinarea pulsației fundamentale cu multă precizie chiar și în cazurile în care vectorul fundamental este definit cu destulă

aproximație. Pentru modurile superioare, soluția nu este totdeauna stabilă și de aceea se efectuează o operație de triere a vectorilor proprii combinînd metoda Rayleigh cu una din metodele ce vor fi expuse în continuare.

Relația (6.26) arată că pentru orice vector propriu real, se obține valoarea proprie exactă corespunzătoare acestuia. Astfel, introducînd vectorul modului *i* se va obține valoarea proprie asociată acestui vector

$$\omega_i^2 = \frac{\{\Phi\}_i^T [R] \{\Phi\}_i}{\{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_i}. \qquad (6.27)$$

În conformitate cu principiul lui Rayleigh, pulsația (6.27) are o valoare staționară în vecinătatea unui vector propriu. O eroare în aprecierea acestui vector va introduce o eroare de ordin inferior la determinarea valorii proprii. Dacă în expresia (6.26) se introduce un vector arbitrar (oarecare), valoarea proprie care se obține va fi cuprinsă între valorile proprii extreme ale sistemului, adică între ω_1 și ω_n.

Numitorul expresiei (6.27) reprezintă *masa generalizată* (v. relația 4.7), iar numărătorul *rigiditatea generalizată* (v. relația 4.9), corespunzătoare modului *i*, astfel încît se va putea scrie:

$$\omega_i^2 = \frac{R_i^*}{M_i^*}, \quad (i = 1, 2, \ldots n). \qquad (6.28)$$

Această formulă este identică cu expresia (4.24) care a fost stabilită pornind de la ecuația generală de condiție (3.26).

Formal, expresia (6.28) este identică cu pătratul pulsației unui sistem cu un singur grad de libertate (v. expresia 2.5) caracterizat inerțial prin M_i^* și elastic prin R_i^*.

Formulele (6.27) și (6.28) pot fi deduse direct din relația generală (4.24).

6.2. METODA DUNKERLEY-SOUTHWELL

Această metodă dă posibilitatea determinării directe a pulsației fundamentale de vibrație pentru sistemele cu un număr finit de grade de libertate (*n*GLD). Valoarea pulsației obținută prin aplicarea acestei metode are caracter aproximativ, apropiindu-se cu atît mai mult de valoarea exactă, cu cît pulsațiile de ordin superior sînt mai mari în raport cu pulsația fundamentală.

Pentru obținerea expresiei aproximative a pulsației fundamentale, se pornește de la ecuația caracteristică (3.8) care sub formă algebrică polinominală devine:

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

unde

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}.$$

Pulsația sistemului dinamic fiind reală și pozitivă, rezultă că și rădăcinile ecuației caracteristice vor fi reale și pozitive. În consecință, în baza relației

dintre rădăcinile și coeficienții unei ecuații algebrice, se poate scrie coeficientul lui λ^{n-1}, sub forma:

$$-a_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i + \ldots + \lambda_n,$$

sau

$$-a_1 = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_i^2} + \ldots \frac{1}{\omega_n^2}, \tag{6.29}$$

în care $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_i, \ldots \omega_n$, reprezintă pulsațiile reale ale sistemului cu n GLD (fig. 6.3, *a*).

Dacă se dezvoltă determinantul $\Delta(\lambda) = 0$, adică ecuația caracteristică (3.8), pentru coeficientul λ^{n-1} se obține:

$$-a_1 = m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22} + \ldots + m_k\delta_{kk} + \ldots + m_n\delta_{nn}. \tag{6.30}$$

Considerînd că pulsațiile de ordin superior sînt mult mai mari decît ω_1, expresia (6.29) se reduce la

$$-a_1 \simeq \frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{\omega_{1,D}^2}. \tag{6.31}$$

Deoarece această ipoteză stă la baza metodei Dunkerley-Southwell, valoarea aproximativă a pulsației fundamentale care rezultă din (6.31) se va nota cu $\omega_{1,D}$.

Prin identificarea relațiilor (6.30) și (6.31) se determină expresia pulsației $\omega_{1,D}$ adică

$$\frac{1}{\omega_{1,D}^2} = m_1\delta_{11} + m_2\delta_{22} + \ldots + m_k\delta_{kk} + \ldots + m_n\delta_{nn}. \tag{6.32}$$

Întrucît $m_k = Q_k/g$ $(k = 1, 2, \ldots n)$, relația (6.32) se mai scrie astfel:

$$\frac{1}{\omega_{1,D}^2} = \frac{Q_1\delta_{11}}{g} + \frac{Q_2\delta_{22}}{g} + \ldots + \frac{Q_k\delta_{kk}}{g} + \ldots + \frac{Q_n\delta_{nn}}{g}. \tag{6.33}$$

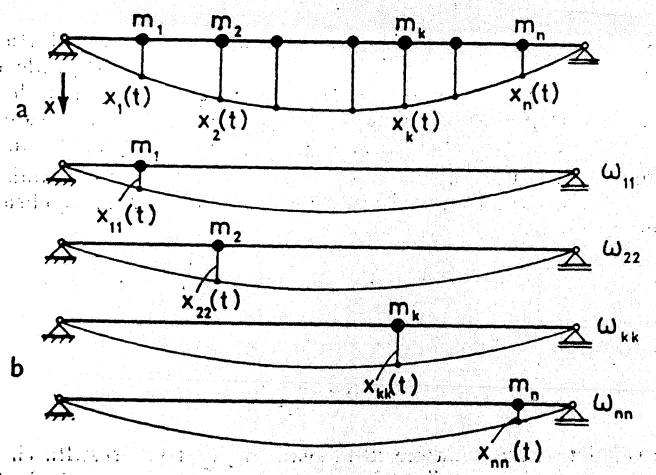


Fig. 6.3

Se observă însă că toți numărătorii termenilor din membrul drept al relației (6.33) sînt egali cu săgețile statice ale sistemului, produse de acțiunea separată a fiecărei sarcini gravitaționale Q_k aplicată pe direcția GLD. Prin urmare, relația (6.33) devine

$$\frac{1}{\omega_{1,D}^2} = \frac{x_{1,ST}}{g} + \frac{x_{2,ST}}{g} + \ldots + \frac{x_{k,ST}}{g} + \ldots + \frac{x_{n,ST}}{g}. \tag{6.34}$$

Din analiza vibrațiilor libere ale sistemelor cu un singur grad de libertate efectuată în capitolul 2 rezultă:

$$\omega_{11}^2 = \frac{g}{x_{1,ST}}, \quad \omega_{22}^2 = \frac{g}{x_{2,ST}}, \ldots \omega_{kk}^2 = \frac{g}{x_{k,ST}}, \ldots \omega_{nn}^2 = \frac{g}{x_{n,ST}}, \tag{6.35}$$

unde $\omega_{11}, \omega_{22}, \ldots \omega_{kk}, \ldots \omega_{nn}$ reprezintă pulsațiile proprii cînd pe același sistem ar fi fixată numai cîte o singură masă (fig. 6.3, *b*). Avînd în vedere notațiile (6.35), expresia (6.34) va avea forma

$$\frac{1}{\omega_{1,D}^2} = \frac{1}{\omega_{11}^2} + \frac{1}{\omega_{22}^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_{kk}^2} + \ldots + \frac{1}{\omega_{nn}^2},$$

sau

$$\frac{1}{\omega_{1,D}^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\omega_{kk}^2}, \tag{6.36}$$

de unde se determină pulsația fundamentală $\omega_{1,D}$. Formula (6.36) caracterizează metoda Dunkerley-Southwell și mai poate fi dedusă folosind metoda energetică.

Relațiile (6.29) și (6.31) permit să se tragă concluzia următoare:

$$\frac{1}{\omega_{1,D}^2} > \frac{1}{\omega_1^2},$$

și deci

$$\omega_{1;\,DUNKERLEY} < \omega_{1;\,EXACT}, \tag{6.37}$$

adică, *valoarea pulsației fundamentale calculată cu formula lui Dunkerley-Southwell este inferioară valorii exacte.* În general, prin aplicarea acestei formule se obțin rezultate care aproximează mai slab pulsația decît în cazul utilizării formulei lui Rayleigh. Gradul de precizie crește cînd ω_2 este mult mai mare decît ω_1, adică atunci cînd importanța modului fundamental este decisivă. În situațiile curente eroarea este cuprinsă între 8 și 25%, iar la structurile etajate se află în jur de 10%.

Folosirea concomitentă a metodei Dunkerley și a metodei Rayleigh permite să se delimiteze inferior și superior domeniul de existență al pulsației fundamentale exacte deoarece

$$\omega_{1,D} < \omega_{1;EX} < \omega_{1;R}. \tag{6.38}$$

După cum se poate constata, prin aplicarea metodei Dunkerley-Southwell se înlocuiește sistemul cu n grade de libertate cu n sisteme independente cu cîte un singur grad de libertate ale căror pulsații proprii se determină cu

relațiile (6.35). Singura problemă care prezintă anumite dificultăți o constituie calculul deplasărilor statice $x_{k,ST}$, mai ales pentru structurile static nedeterminate complexe.

Datorită artificiului prin care se calculează pulsația fundamentală, prin utilizarea relației (6.35), această metodă se mai numește *metoda pulsațiilor izolate* sau *independente*.

Ținînd seama de relația (6.34), se poate stabili pentru $\omega_{1,D}$ o expresie mai accesibilă aplicațiilor numerice, și anume:

$$\frac{1}{\omega_{1,D}^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_{k,ST}}{g} = \frac{\tilde{x}_{ST}}{g},$$

sau

$$\omega_{1,D} = \sqrt{\frac{g}{\tilde{x}_{ST}}}, \tag{6.39}$$

unde

$$\tilde{x}_{ST} = \sum_{k=1}^{n} x_{k,ST}.$$

Formula (6.39) se poate aplica cu ușurință datorită asemănării cu expresia pulsației proprii a sistemelor cu 1 GLD studiate în capitolul 2.

În cazul structurilor în consolă (turnuri, coșuri de fum, antene RTV, cadre multietajate, diafragme înalte), x_{ST} va reprezenta deplasarea maximă (săgeata în vîrf) produsă de acțiunea laterală a încărcărilor gravitaționale (fig. 6.4), dacă se neglijează influența rotirilor secțiunilor k asupra deplasărilor laterale, pe direcția GLD. Astfel, formula (6.39) care în această situație devine:

$$\omega_{1,D} \simeq \sqrt{\frac{g}{x_{ST,max}}} \tag{6.40}$$

este cunoscută în literatura de specialitate și sub denumirea de *formula lui Geiger*. Perioada fundamentală a structurii va rezulta sub o formă identică cu formula (2.18).

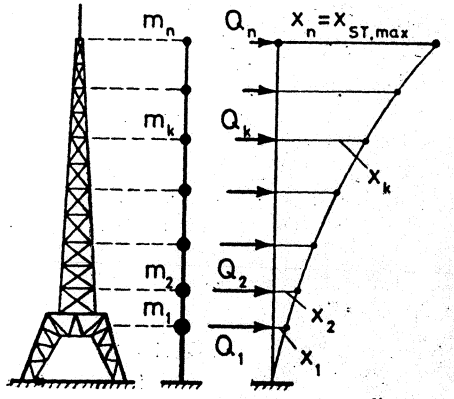


Fig. 6.4

$$T_{1,D} \cong T_{1,G} \cong$$
$$\cong 0{,}2\sqrt{x_{ST,max}} \quad (T_{1,D} > T_{1,EX}) \tag{6.41}$$

cu observația că deplasarea maximă se va determina în centimetri.

Această expresie de calcul a perioadei fundamentale, căreia i se aplică o anumită corecție, are o răspîndire destul de mare în analiza antiseismică a structurilor etajate [89], [90], [91], [99].

Relația generală (6.36), cu ajutorul căreia se aproximează pulsația fundamentală a unui sistem cu n grade de libertate, a fost dedusă de către Dunkerley pe cale experimentală. Mai tîrziu, Southwell a fundamentat teoretic această metodă stabilind și limitele de valabilitate ale pulsației obținute.

6.3. METODA STODOLA. METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE *

Metoda Stodola se utilizează pentru determinarea simultană a formelor și pulsațiilor proprii ale sistemelor oscilante indiferent de numărul gradelor de libertate. Obținerea caracteristicilor proprii ale sistemului are la bază un proces iterativ care permite trierea soluțiilor corespunzătoare unui anumit mod de vibrație. Totdeauna prin metoda Stodola se determină pulsația cea mai joasă, deci și forma proprie respectivă; de aceea procesul iterativ, care se caracterizează printr-o convergență satisfăcătoare, începe cu calculul modului fundamental de vibrație.

Se va presupune că sistemul cu n GLD din figura 6.5, *a* vibrează în jurul poziției de echilibru static după forma proprie fundamentală. Mișcarea fiind deci armonică, pentru deplasările $x_k(t)$ se admite o soluție de forma (6.4). Cînd se produc deplasările maxime, egale cu amplitudinile x_k, forțele de inerție maxime, interpretate ca forțe dinamice, vor fi

$$F_k = m_k\omega^2 x_k, \quad (k = 1, 2, \ldots n). \tag{6.42}$$

Dacă același sistem se încarcă static cu forțele (6.42), conform principiului lui d'Alembert, se vor obține deplasările statice x_k egale cu amplitudinile sistemului oscilant (fig. 6.5, *b*) care caracterizează forma proprie fundamentală.

Considerînd pentru pulsația proprie o valoare arbitrară, spre exemplu $\omega = 1$, vor rezulta forțele de inerție

$$F_k^* = m_k x_k, \quad (k = 1, 2, \ldots n), \tag{6.43}$$

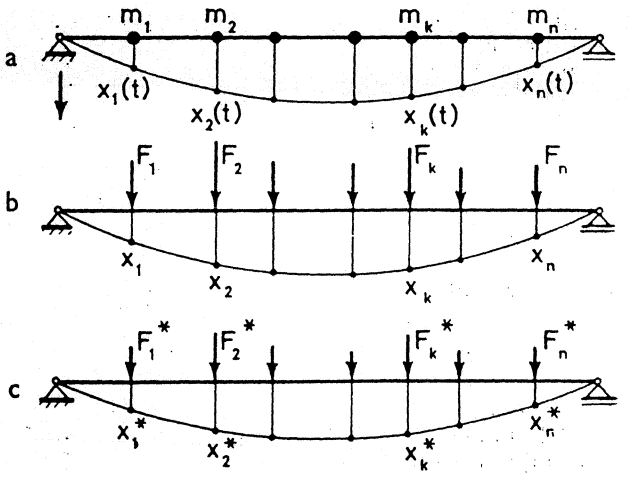


Fig. 6.5

* În unele tratate se mai numește metoda Stodola-Vianello.

care acționînd static asupra aceluiași sistem vor produce deplasările statice x_k^* (fig. 6.5, *c*). Este evident, că între deplasările x_k și x_k^* există relația

$$x_k = \omega^2 x_k^* \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$

de unde rezultă

$$\omega^2 = \frac{x_k}{x_k^*}. \quad (k = 1, 2, \ldots n). \tag{6.44}$$

În cazul în care deformata corespunzătoare modului fundamental ar fi apriori cunoscută, cu ajutorul relației (6.44), exprimată pe direcția oricărui grad de libertate, se obține valoarea exactă a pulsației fundamentale. În realitate însă, deformata x_k nu se cunoște și de aceea ea va fi aproximată succesiv pînă cînd, prin aplicarea relației (6.44) se obțin valori identice ale pulsației în două trepte consecutive de aproximare. În această operație, de aproximări succesive, constă de fapt procesul iterativ de selecționare (triere) a soluțiilor.

Cu scopul de a mări convergența iterației, calculul pulsației fundamentale (6.44) se face prin compararea săgeților statice maxime din două aproximații succesive sau folosind următoarea relație, care derivă din relația (6.44):

$$\omega^2 = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k^*}. \tag{6.45}$$

Cu cît deformata propusă este mai apropiată de cea reală, cu atît etapele procesului iterativ vor fi mai reduse. Din aceleași motive, se recomandă ca deformata inițială propusă să fie compatibilă cu legăturile sistemului. De obicei, deformata inițială se consideră identică cu cea produsă de forțele $F_k^{(0)} = m_k = Q_k/g$. Această deformată coincide cu deformata statică obținută prin încărcarea sistemului dat cu acțiunile statice Q_k aplicate pe direcția GLD, demultiplicate cu g, adică $x_k^{(0)}$. În următoarea aproximație, sistemul va fi încărcat cu forțele $F_k^{(1)} = m_k x_k^{(0)}$ obținîndu-se deplasările $x_k^{(1)}$. Deci în prima treaptă de aproximare rezultă

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{x_k^{(0)}}{x_k^{(1)}}, \tag{6.46}$$

sau

$$\omega_{(1)}^2 = \frac{x_{max}^{(0)}}{x_{max}^{(1)}}. \tag{6.47}$$

Procesul iterativ continuă, obținîndu-se în treapta j de iterație

$$\omega_{(j)}^2 = \frac{x_k^{(j-1)}}{x_k^{(j)}}. \tag{6.48}$$

Se consideră că s-au obținut valorile exacte, atît pentru pulsație, cît și pentru ordonatele formei fundamentale, cînd în două etape de aproximare consecutive se obțin aceleași valori pentru ω, adică

$$\omega_{(j)}^2 - \omega_{(j-1)}^2 = 0,$$

în care caz deformatele $x_k^{(j)}$ și $x_k^{(j+1)}$ coincid.

Valoarea pulsației (6.44) se obține prin raportarea oricăror mărimi statice din cele două situații de încărcare (rotire, forță tăietoare sau momente încovoietoare).

Pulsația proprie tinde către valoarea reală prin mărimi descrescătoare

$$\omega_1^{(0)} > \omega_1^{(1)} > \ldots > \omega_1^{(j)} > \ldots > \omega_{1.\,EX}$$

deoarece, formele de oscilație aproximative în treptele j nu corespund celei reale și deci sistemul se comportă ca și cînd ar avea legături suplimentare, avînd o rigiditate mai mare decît în realitate. Pe măsură ce procesul iterativ avansează, aceste legături se eliberează, ajungînd în final la rigiditatea reală a sistemului, întrucît deformata finală coincide cu forma proprie exactă.

Practic însă nu este necesar să se efectueze toate operațiile iterative deoarece această metodă are avantajul că pune în evidență eroarea existentă de la etapă la etapă. Dacă inițial s-a considerat deformata statică a sistemului sub acțiunea sarcinilor Q_k, este suficientă o singură iterație pentru a obține un rezultat satisfăcător necesităților de ordin practic (v. relația 6.45).

Întrucît determinarea deformatelor prezintă uneori dificultăți de calcul, se recomandă folosirea coeficienților de influență δ_{jk} pentru stabilirea deplasărilor x_k (adică matricea de flexibilitate $[D]$).

Metoda Stodola se aplică atît sistemelor cu un număr limitat, cît și celor cu un număr infinit de grade de libertate.

Pentru obținerea *modurilor superioare*, se aplică *metoda eliminării* modurilor inferioare deja determinate, folosind *proprietatea de ortogonalitate*, astfel ca totdeauna modul de vibrație ce urmează a fi determinat să fie cel mai jos din cele rămase după eliminare. Spre exemplu, pentru determinarea celui de-al doilea mod, se elimină modul fundamental determinat prin procedeul expus anterior, folosind condiția de ortogonalitate dintre cele două forme proprii. În acest fel modul al doilea devine cel mai jos din totalitatea modurilor ce rămîn după eliminarea celui fundamental. Operațiile de calcul privind determinarea pulsației și formei proprii pentru modul secund, sînt identice celor utilizate pentru obținerea modului fundamental. Trebuie subliniat faptul că la aplicarea metodei Stodola, pentru obținerea modurilor superioare, convergența iterației este mult mai lentă. Metoda aproximațiilor succesive poate fi asociată cu metoda Rayleigh deoarece ambele se bazează pe aprecierea prealabilă a formelor principale de vibrație.

Datorită caracterului iterativ al metodei Stodola, toate operațiile de triere a soluțiilor, precum și procedeul eliminării modurilor inferioare, pot fi programate la un calculator electronic digital. Pentru a fi posibilă utilizarea calculatoarelor este necesar ca această metodă de calcul să fie formulată matriceal. În această situație metoda are un caracter general și unitar fiind depășite dificultățile datorate calculului laborios pe care îl implică o rezolvare tradițională. Extinderea metodei lui Stodola, prin folosirea operațiilor matriceale este cunoscută sub denumirea de *metoda matriceală iterativă* și face obiectul § 6.5.

6.4. METODA HOLZER

Inițial elaborată pentru calculul pulsațiilor proprii de torsiune ale arborilor, metoda Holzer a fost extinsă și la sistemele în care se produc deformații de încovoiere. Această metodă, bazată pe o relație iterativă simplă, permite determinarea simultană atît a pulsațiilor, cît și a formelor proprii de vibrație ale sistemelor cu n grade de libertate.

Metoda Holzer poate fi demonstrată pornind de la metoda deplasărilor în studiul vibrațiilor libere în forma în care a fost expusă în § 3.1.2. În continuare, se va prezenta însă o demonstrație mai simplă și în același timp intuitivă. Întrucît relațiile de calcul ce se obțin depind de condițiile de margine ale sistemului elastic, se vor analiza numai *vibrațiile structurilor fixate la un singur capăt*. Din această categorie de structuri tip consolă fac parte numeroase construcții frecvent întîlnite în practica inginerească cum ar fi: turnuri, coșuri de fum, antene RTV, cadre multietajate, diafragme înalte etc.

Se va considera deci structura etajată din figura 6.6. În timpul oscilațiilor libere după o anumită componentă modală i, pe direcția gradelor de libertate se produc deplasările laterale armonice de formă cunoscută

$$x_{k,i}(t) = x_{k,i} \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (k = 1, 2, \ldots n),$$

în care $x_{k,i}$ sînt amplitudinile mișcării. Dacă același sistem se încarcă static pe direcția GLD cu forțele de inerție maxime $m_k \omega_i^2 x_{k,i}$, deplasările rezultate vor fi egale chiar cu amplitudinile $x_{k,i} (k = 1, 2, \ldots n)$ ale deplasărilor modale. Presupunînd că se cunosc rigiditățile relative dintre două etaje consecutive, numite în cazul de față și *rigidități relative de nivel*, deplasările laterale relative rezultă

$$\Delta = \frac{\mathcal{T}}{R}, \tag{6.49}$$

unde $\mathcal{T}$ este forța tăietoare corespunzătoare etajului respectiv, iar R — rigiditatea relativă a acestuia. Definiția rigidității relative de nivel se deduce direct din relația (6.49) adică, reprezintă forța care aplicată nivelului respectiv produce o deplasare relativă, între două niveluri consecutive, egală cu unitatea. Asupra noțiunii de rigiditate relativă de nivel, a cărei importanță este esențială în calculul antiseismic al structurilor, se va reveni cu detalii în partea a II-a a lucrării.

Pentru cazul concret prezentat în figura 6.6 se poate scrie următoarea relație între deplasările laterale maxime

$$x_k = x_{k+1} - \Delta_{k,k+1}. \tag{6.50}$$

Folosind expresia (6.49), deplasarea relativă $\Delta_{k,k+1}$ va fi

$$\Delta_{k,k+1} = \frac{\mathcal{T}_{k,k+1}}{R_{k+1,k}}, \tag{6.51}$$

unde

$\mathcal{T}_{k,k+1}$ este rezultanta forțelor de inerție $F_r = m_r \omega^2 x_r$ de la nivelul n pînă la nivelul $k+1$ sau forța tăietoare în panoul $(k, k+1)$, numită și „forță tăietoare de etaj";

$R_{k+1,k}$ — rigiditatea relativă dintre nivelurile consecutive $(k+1, k)$, reprezentînd forța care aplicată pe direcția orizontală la nivelul $k+1$ produce o deplasare relativă a acestuia egală cu unitatea $(\Delta_{k,k+1} = 1)$.

Explicitînd forța tăietoare

$$\mathcal{T}_{k,k+1} = \sum_{r=k+1}^{n} F_r = \sum_{r=k+1}^{n} m_r \omega^2 x_r = \omega^2 \sum_{r=k+1}^{n} m_r x_r,$$

și ținînd seama de (6.51), relația (6.50) devine

$$x_k = x_{k+1} - \frac{\omega^2}{R_{k+1,k}} \sum_{r=k+1}^{n} m_r x_r. \tag{6.52}$$

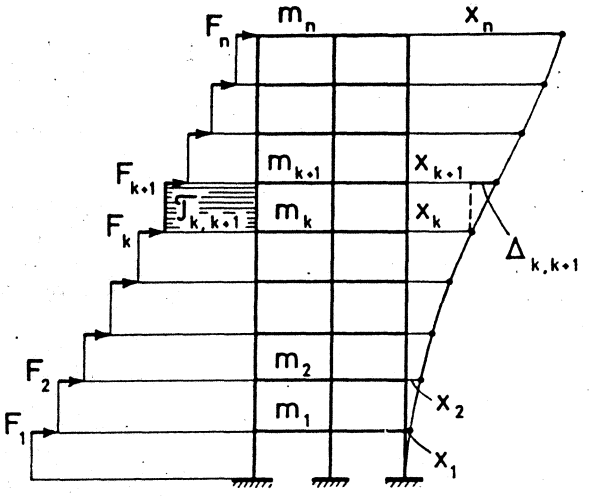


Fig. 6.6

Deoarece deformata dinamică corespunzătoare unui mod i de vibrație este proporțională cu vectorul propriu respectiv, amplitudinile x din relația (6.52) pot fi înlocuite cu ordonatele vectorului propriu Φ. Avînd în vedere această substituție, relația (6.52) va avea următoarea formă generală pentru modul i:

$$\Phi_{k,i} = \Phi_{k+1,i} - \frac{\omega_i^2}{R_{k+1,k}} \sum_{r=k+1}^{n} m_r \Phi_{r,i} \qquad i, k = 1, 2, \ldots n \tag{6.53}$$

Cu ajutorul relației de recurență (6.53) se pot determina prin încercări succesive pulsația și forma proprie pentru oricare mod de vibrație. Dacă se consideră una din ordonatele formei proprii (ce urmează a fi determinată) de valoare arbitrară, de obicei se ia $\Phi_{n,i} = +1$, și considerînd pentru ω diferite valori, se determină prin aplicarea relației (6.53) variația ordonatelor Φ care trebuie să coincidă cu configurația geometrică a modului căutat. Pentru toate modurile de vibrație, ordonata la baza structurii trebuie să fie egală cu zero, adică $\Phi_{0,i} = 0$, din motive de compatibilitate elastică.

În cazul structurii din figura 6.6, și în general la cele cu un singur capăt fix, configurația primei forme se caracterizează prin aceea că toate ordonatele sînt pozitive. În modul al doilea de vibrație ordonatele formei proprii vor avea o schimbare de semn, în modul trei, două schimbări de semn, iar în modul i variația formei va avea $(i-1)$ schimbări de semn sau puncte în care se anulează vectorul propriu (puncte nodale).

Astfel, dacă în cazul determinării modului fundamental (pornind cu $\Phi_{n,1} = +1$) rezultă o schimbare de semn, înseamnă că pulsația propusă ω' este mai mare decît cea exactă $(\omega' > \omega_1)$. În consecință, încercarea următoare va fi făcută cu o valoare ω'' mai mică decît cea inițială $(\omega'' < \omega')$. Dacă prin refacerea calculului se obțin toate ordonatele de același semn (pozitive în situația de față) dar $\Phi_{0,1} > 0$, reiese că pulsația propusă este mai mică decît $\omega_1 (\omega'' < \omega_1)$. Va fi deci necesar ca încercarea următoare să se facă cu o

pulsație cuprinsă între ω' și ω''. Această triere a soluțiilor se face pînă cînd este respectată configurația geometrică a formei de vibrație, în care caz calculul devine exact. În aceeași manieră se procedează la determinarea caracteristicilor proprii ale modurilor superioare. În general, valorile inițiale de la care se încep tatonările se stabilesc cu formule directe, de obicei empirice. Organizarea și sistematizarea calculului se fac în tabele așa cum se arată în aplicațiile de la sfîrșitul capitolului.

Cînd structurile au un număr ridicat de grade de libertate, operațiile de triere a soluțiilor pentru determinarea mai multor moduri de vibrație devin laborioase. Din aceste motive se pot utiliza calculatoarele electronice digitale.

În scopul de a simplifica aplicarea practică a relației generale (6.53) și a sistematizării calculului, se vor introduce următoarele notații [96], [97], [99]:

$$R_{k+1;k} = \eta_{k+1,k} R_0; \tag{6.54}$$

$$m_k = \alpha_k m_0, \tag{6.55}$$

în care R_0 și m_0 reprezintă valori arbitrare ale rigidității relative de nivel și a masei (valori de referință), față de care se raportează celelalte mărimi. Coeficienții numerici η și α vor fi denumiți *coeficient de rigiditate relativă* și respectiv *coeficient de masă*. Dacă și pulsația se exprimă în funcție de o *caracteristică de frecvență* notată prin φ_i și definită astfel:

$$\omega_i^2 = \varphi_i \frac{R_0}{m_0}, \tag{6.56}$$

relația (6.53) devine

$$\Phi_{k,i} = \Phi_{k+1,i} - \frac{\varphi_i}{\eta_{k+1,k}} \sum_{r=k+1}^{n} \alpha_r \Phi_{r,i}. \tag{6.57}$$

Efectuînd operația de triere expusă anterior, cu ajutorul relației (6.57) se obțin forma proprie și caracteristica de frecvență a modului de vibrație căutat. Cunoscînd caracteristica φ_i, pulsația proprie va rezulta

$$\omega_i = \sqrt{\varphi_i} \sqrt{\frac{R_0}{m_0}}, \quad \text{(rad/s)}, \tag{6.58}$$

iar perioada proprie

$$T_i = \frac{2\pi}{\sqrt{\varphi_i}} \sqrt{\frac{m_0}{R_0}} = \psi_i \sqrt{\frac{m_0}{R_0}}. \quad \text{(s)} \tag{6.59}$$

Metoda Holzer a fost extinsă și generalizată de Myklestad și Thomson, lărgindu-i domeniul de aplicabilitate la toate tipurile de structuri, indiferent de numărul gradelor de libertate. Datorită faptului că în procedeul Myklestad-Thomson se stabilesc relații de recurență între funcțiile încovoierii din două secțiuni caracteristice ale unui tronson de bară, pentru efectuarea operațiilor numerice se pot utiliza matricele de transfer, precum și calculatoarele electronice.

Pentru a evita operațiile de triere, se poate efectua un artificiu de calcul destul de simplu și sugestiv. Se vor aplica formulele de recurență (6.53) sau (6.57) introducînd valori succesive pentru ω sau φ, cu pasul destul de mic, începînd de la zero pînă la o anumită valoare care poate fi precizată cu ajutorul relațiilor (6.87). Reprezentînd grafic valorile reziduale Φ_0, în funcție de ω sau φ, intersecțiile curbei rezultate cu axa orizontală vor marca tocmai valorile proprii ale sistemului (fig. 6.7). Utilizînd aceste valori, prin aplicarea relațiilor de recurență, se obțin vectorii proprii corespunzători.

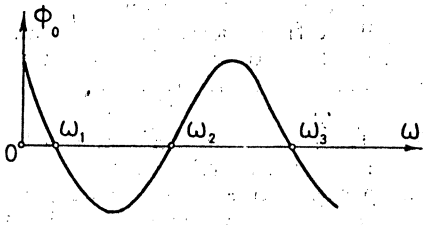


Fig. 6.7

Ordinul modurilor de vibrație astfel determinate, rezultă din configurația geometrică a formei proprii de vibrație.

În procesul de triere a formelor superioare, pentru construcțiile etajate (în cadre de beton armat sau diafragme monolite), se pot lua în considerare următoarele relații aproximative:

$$\omega_2 \simeq 2{,}5\omega_1; \quad \omega_3 \simeq 4\omega_1.$$

6.5. METODA MATRICEALĂ ITERATIVĂ

În această metodă se aplică direct tehnica iterației asupra ecuațiilor de mișcare, exprimate în formă matriceală (3.17) sau (3.27). Ea permite determinarea simultană a tuturor valorilor și vectorilor proprii ai sistemelor oscilante cu un număr finit de GLD. Pentru efectuarea rapidă a tuturor operațiilor de calcul, pe care le necesită aplicarea practică a metodei matriceale iterative, se pot utiliza calculatoarele electronice digitale.

6.5.1. Operarea în raport cu matricea de flexibilitate [D]

Metoda matriceală iterativă se bazează pe constatarea că toate valorile proprii ale sistemului dinamic, exprimate prin pulsații ω_i, sînt reale, pozitive și distincte, adică $\omega_1 < \omega_2 < \ldots \omega_i < \ldots < \omega_n$. Gradul de convergență al procesului iterativ este puternic afectat dacă două valori ale pulsațiilor sînt foarte apropiate între ele [99].

Demonstrarea acestei metode se bazează pe ecuația (3.15) care, prin transformările expuse în capitolul 3, devine o identitate (3.17) de forma:

$$[\mathcal{D}]\{\Phi\} = \lambda\{\Phi\}, \quad \lambda = 1/\omega^2, \tag{6.60}$$

unde *matricea dinamică* $[\mathcal{D}] = [D][M]$, precum și celelalte matrice care intervin, au fost definite în capitolul 3.

Este evident că identitatea (6.60) va fi satisfăcută de oricare vector propriu $\{\Phi\}_i$ căruia îi corespunde o valoare proprie asociată $\lambda_i = 1/\omega_i^2$ ($i = 1, 2, \ldots n$).

Prin premultiplicarea matricei dinamice $[\mathcal{D}]$ cu un vector oarecare $\{\Phi\}^{(1)}$ va rezulta o transformare liniară, care va caracteriza un alt vector $\{\Phi\}^{(2)}$ obținut printr-o operație matriceală elementară

$$[\mathcal{D}]\{\Phi\}^{(1)} = \{\Phi\}^{(2)}. \tag{6.61}$$

În cazul în care vectorul $\{\Phi\}^{(1)}$ ar coincide cu vectorul propriu $\{\Phi\}$, vectorul $\{\Phi\}^{(2)}$ va fi proporțional cu acesta, factorul de proporționalitate, conform relației (6.60) fiind λ_i. Deoarece atît vectorii proprii, cît și valorile proprii nu se cunosc, determinarea lor se face printr-o *operație de triere succesivă a soluțiilor.*

Dacă $\{\Phi\}^{(1)}$ este un vector arbitrar, deci care nu corespunde vectorului propriu căutat, noul vector $\{\Phi\}^{(2)}$ care rezultă din (6.61) va putea fi utilizat în operația următoare de triere, fiind deja un vector ameliorat față de cel inițial admis. Cu vectorul $\{\Phi\}^{(2)}$, efectuînd operația de premultiplicare cu matricea $[\mathcal{D}]$, se va obține vectorul $\{\Phi\}^{(3)}$ mult mai apropiat de vectorul propriu ce urmează a fi determinat. În general, în treapta j de aproximare (de triere) a vectorilor utilizați, rezultă următoarea transformare liniară:

$$[\mathcal{D}]\{\Phi\}^{(j-1)} = \{\Phi\}^{(j)}. \tag{6.62}$$

Astfel, dacă în urma operațiilor de triere utilizînd relația (6.62) rezultă un vector $\{\Phi\}^{(j)}$ *proporțional cu* $\{\Phi\}^{(j-1)}$, factorul de proporționalitate ce se va obține va fi egal totdeauna cu *valoarea proprie fundamentală*, iar vectorul $\{\Phi\}^{(j)}$ va reprezenta *vectorul propriu fundamental*, adică

$$[\mathcal{D}]\{\Phi\}_1^{(j-1)} = \{\Phi\}_1^{(j)} = \lambda_1^{(j)}\{\Phi\}_1^{(j-1)} = \lambda_1\{\Phi\}_1 \tag{6.63}$$

unde j reprezintă aici ultima treaptă de aproximare care coincide cu iterarea finală (exactă). Prin urmare relația de triere a soluțiilor (6.62) dă posibilitatea determinării simultane a pulsației și formei fundamentale de vibrație.

Pentru obținerea valorii proprii aproximative în treptele intermediare de iterație, se va admite un factor de proporționalitate $\lambda^{(j)}$ între două elemente situate pe același rînd al vectorilor $\{\Phi\}^{(j-1)}$ și $\{\Phi\}^{(j)}$. De obicei, se ia în considerație factorul de proporționalitate dintre elementele primului rînd al celor doi vectori. Dacă se admite pentru aceste elemente o *valoare pivot* $\Phi_1^{(j-1)} = \Phi_1^{(j)} = 1$, factorul de proporționalitate $\lambda^{(j)}$ va rezulta din condiția ca toate celelalte elemente ale vectorului $\{\Phi\}^{(j)}$ să fie raportate la această valoare pivot. Acest artificiu este pus în evidență în aplicația numerică ce se prezintă la sfîrșitul acestui capitol.

Se va demonstra în continuare că procesul iterativ bazat pe relația de triere (6.62) conduce totdeauna către modul de vibrație cel mai jos, căruia îi corespunde pulsația minimă, respectiv către modul fundamental.

Vectorul $\{\Phi\}^{(1)}$ se va putea exprima printr-o dezvoltare liniară în raport cu vectorii proprii ai sistemului astfel:

$$\{\Phi\}^{(1)} = c_1\{\Phi\}_1 + c_2\{\Phi\}_2 + \ldots + c_i\{\Phi\}_i + \ldots c_n\{\Phi\}_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i\{\Phi\}_i, \tag{6.64}$$

unde constantele c_i reprezintă necunoscutele celor n ecuații care rezultă din relația (6.64).

Introducînd acest vector în (6.61) se obține:

$$\{\Phi\}^{(2)} = [\mathcal{D}]\{\Phi\}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i[\mathcal{D}]\{\Phi\}_i,$$

iar dacă se ține seama de (6.60)

$$\{\Phi\}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i\{\Phi\}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{\omega_i^2}\{\Phi\}_i. \tag{6.65}$$

În treapta următoare de triere, prin premultiplicarea vectorului $\{\Phi\}^{(2)}$ cu matricea dinamică $[\mathcal{D}]$ se va obține vectorul $\{\Phi\}^{(3)}$

$$\{\Phi\}^{(3)} = [\mathcal{D}]\{\Phi\}^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i[\mathcal{D}]\{\Phi\}_i,$$

sau, avînd în vedere (6.60)

$$\{\Phi\}^{(3)} = \sum_{i=1}^{n} c_i\lambda_i^2\{\Phi\}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(\omega_i^2)^2}\{\Phi\}_i. \tag{6.66}$$

În general, în treapta j de triere a soluțiilor va rezulta

$$\{\Phi\}^{(j)} = [\mathcal{D}]\{\Phi\}^{(j-1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(\omega_i^2)^{j-1}}\{\Phi\}_i. \tag{6.67}$$

Întrucît s-a presupus că $\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_i < \ldots < \omega_n$ se constată că în cazul în care j crește nedefinit, numai primul termen al seriei (6.67) va avea o valoare predominantă în raport cu ceilalți termeni, astfel încît la limită, cînd $j \to \infty$, vectorul $\{\Phi\}^{(j)} \to \{\Phi\}_1$.

Deci, se va putea scrie

$$\lim_{j\to\infty}\{\Phi\}^{(j)} = \{\Phi\}_1, \tag{6.68}$$

iar pulsația fundamentală rezultă

$$\omega_1^2 = \lim_{j\to\infty}\frac{\Phi_{k,j-1}}{\Phi_{k,j}}, \tag{6.69}$$

în care s-au notat prin $\Phi_{k,j-1}$ și $\Phi_{k,j}$ elementele rîndului k din vectorul $\{\Phi\}^{(j-1)}$ și vectorul rezultat $\Phi^{(j)}$. În calculele practice se constată însă că după un număr limitat de iterații se obțin rezultate satisfăcătoare din punctul de vedere al exactității. De altfel, eroarea cu care se obțin valorile proprii este controlabilă, de la o etapă la alta. În principiu acest procedeu este identic cu metoda Stodola și de aceea în procesul iterativ se tinde către pulsația fundamentală exactă prin valori descrescătoare. Procesul iterativ este cu atît mai convergent cu cît $\omega_1 \gg \omega_2$, așa cum rezultă și din (6.67), iar vectorul inițial este mai apropiat de cel fundamental. Din punct de vedere teoretic, relația (6.69) este identică cu (6.47).

Metoda matriceală iterativă permite astfel determinarea primului mod de vibrație (fundamental).

Cu toate acestea, se pot obține și *modurile superioare* dacă se elimină modurile inferioare determinate în prealabil. Întrucît modul fundamental se poate totdeauna calcula, rezultă că următorul mod de vibrație care se va obține va fi cel de-al doilea. În acest fel, după eliminarea modului fundamental, *modul al doilea* devine cel mai jos (minim), către care deci va tinde și procesul iterativ în forma prezentată anterior.

Admițînd pentru vectorul propriu corespunzător formei a doua o exprimare identică cu (6.64) și impunînd condiția de ortogonalitate cu forma fundamentală, rezultă:

$$\{\Phi\}_1^T [M] \{\Phi\}^{(1)} = 0. \tag{6.70}$$

Substituind relația (6.64) și dezvoltînd ecuația (6.70)

$$c_1\{\Phi\}_1^T [M] \{\Phi\}_1 + c_2\{\Phi\}_1^T [M] \{\Phi\}_2 + \ldots + c_i\{\Phi\}_1^T [M] \{\Phi\}_i + \ldots + c_n\{\Phi\}_1^T [M] \{\Phi\}_n = 0,$$

se observă că în afară de primul termen, toți ceilalți sînt egali cu zero datorită proprietății de ortogonalitate a vectorilor propriii (3.34). În această situație, ecuația (6.70) devine:

$$c_1\{\Phi\}_1^T [M]\{\Phi\}_1 = 0$$

și deoarece triplul produs matriceal este diferit de zero rezultă că $c_1 = 0$. Revenind la expresia vectorului (6.64) se constată că influența modul fundamental a fost eliminată și deci

$$\{\Phi\}^{(1)} = c_2\{\Phi\}_2 + c_3\{\Phi\}_3 + \ldots + c_i\{\Phi\}_i + \ldots + c_n\{\Phi\}_n = \sum_{i=2}^{n} c_i\{\Phi\}_i. \tag{6.71}$$

Dacă se premultiplică acest vector, cu matricea dinamică $[\mathcal{D}]$ se constată că după un număr j de iterații, seria obținută va avea expresia următoare:

$$\{\Phi\}^{(j)} = [\mathcal{D}] \{\Phi\}^{(j-1)} = \sum_{i=2}^{n} \frac{c_i}{(\omega_i^2)^{j-1}} \{\Phi\}_i. \tag{6.72}$$

Cînd $j \to \infty$, vectorul rezultat $\{\Phi\}^{(j)} \to \{\Phi\}_2$, deci tinde către primul termen al seriei (6.72), adică către forma a doua care a devenit cea mai joasă din modurile rămase după eliminarea celui fundamental.

Folosind deci *tehnica eliminării*, se obține noul vector pentru forma a doua din dezvoltarea condiției (6.70) în felul următor:

$$\Phi_{1,1} m_1 \Phi_1^{(1)} + \Phi_{2,1} m_2 \Phi_2^{(1)} + \ldots + \Phi_{k,1} m_k \Phi_k^{(1)} + \ldots + \Phi_{n,1} m_n \Phi_n^{(1)} = 0,$$

de unde se obține

$$\Phi_1^{(1)} = e_{1,2}^{(1)} \Phi_2^{(1)} + \ldots + e_{1,k}^{(1)} \Phi_k^{(1)} + \ldots + e_{1,n}^{(1)} \Phi_n^{(1)}, \tag{6.73}$$

în care

$$e_{1,k}^{(1)} = -\frac{m_k \Phi_{k,1}}{m_1 \Phi_{1,1}}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

celelalte elemente ale vectorului $\{\Phi\}^{(1)}$ rămînînd aceleași

$$\left.\begin{aligned} \Phi_2^{(1)} &= \Phi_2^{(1)} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_k^{(1)} &= \Phi_k^{(1)} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \Phi_n^{(1)} &= \Phi_n^{(1)} \end{aligned}\right\} \tag{6.74}$$

Combinînd relațiile (6.73) și (6.74), rezultă următoarea exprimare matriceală

$$\begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ .. \\ \Phi_k \\ .. \\ \Phi_n \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & e_{12}^{(1)} \ldots e_{1k}^{(1)} \ldots e_{1n}^{(1)} \\ 0 & 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 \ldots 0 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 \ldots 0 \ldots 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ .... \\ \Phi_k \\ .... \\ \Phi_n \end{Bmatrix}^{(1)} \tag{6.75}$$

Matricea pătrată (n, n) care intervine în (6.75) se mai numește matrice de eliminare, avînd rolul unui operator matriceal, și se va nota prin $[E_1]$. În formă compactă, relația (6.75) se va scrie

$$\{\Phi\}_c^{(1)} = [E_1] \{\Phi\}^{(1)}. \tag{6.76}$$

Considerînd vectorul $\{\Phi\}_c^{(1)}$ în noul proces iterativ pentru obținerea celui de-al doilea mod de vibrație, prin premultiplicarea cu $[\mathcal{D}]$ se obține o relație analogă cazului precedent (6.61):

$$[\mathcal{D}] \{\Phi\}_c^{(1)} = [\mathcal{D}] \{E_1\} \{\Phi\}^{(1)} = \{\Phi\}^{(2)}. \tag{6.77}$$

Se observă că produsul celor două matrice pătrate reprezintă matricea dinamică caracteristică modului secund

$$[\mathcal{D}_2] = [\mathcal{D}] [E_1], \tag{6.78}$$

încît, relația (6.77) scrisă în treapta j de iterație va avea forma deja cunoscută (6.62)

$$[\mathcal{D}_2] \{\Phi\}^{(j-1)} = \{\Phi\}^{(j)}, \tag{6.79}$$

iar în momentul cînd cele două matrice sînt proporționale

$$[\mathcal{D}_2] \{\Phi\}_2^{(j-1)} = \{\Phi\}_2^{(j)} = \lambda_2^{(j)} \{\Phi\}_2^{(j-1)} = \lambda_2 \{\Phi\}_2, \tag{6.80}$$

rezultatele obținute sînt exacte.

Pentru *determinarea caracteristicilor modului trei*, este necesar să se elimine simultan modurile inferioare 1 și 2, obținute în prealabil. Condițiile de ortogonalitate dintre vectorul de triere al formei a treia și vectorii proprii 1 și 2 vor fi:

$$\left.\begin{aligned} \{\Phi\}_1^T [M] \{\Phi\}^{(1)} &= 0 \\ \{\Phi\}_2^T [M] \{\Phi\}^{(1)} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{6.81}$$

Substituind vectorul (6.64) în condițiile (6.81), rezultă $c_1 = c_2 = 0$, ceea ce demonstrează că modurile inferioare sînt eliminate din expresia (6.64) încît procesul iterativ ce se va efectua cu noul vector rezultat va tinde către modul al treilea, devenit cel mai jos.

Procedînd ca în cazul modului 2, se obține matricea de eliminare $[E_2]$ sub forma

$$[E_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{13}^{(2)} & e_{14}^{(2)} & \dots & e_{1k}^{(2)} & \dots & e_{1n}^{(2)} \\ 0 & 0 & e_{23}^{(2)} & e_{24}^{(2)} & \dots & e_{2k}^{(2)} & \dots & e_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{6.82}$$

unde coeficienții $e_{1,k}^{(2)}$ și $e_{2,k}^{(3)}$, $k = 3, 4, .., n$, se obțin în urma exprimării primelor două componente ale vectorului $\{\Phi\}^{(1)}$ din ecuațiile (6.81), în funcție de celelalte două componente.

Matricea dinamică a modului 3 va rezulta:

$$[\mathcal{D}_3] = [\mathcal{D}]\,[E_2], \tag{6.83}$$

iar problema obținerii caracteristicilor acestui mod se reduce la aplicarea relației

$$[\mathcal{D}_3]\,\{\Phi\}^{(j-1)} = \{\Phi\}^{(j)}. \tag{6.84}$$

Cînd cele două coloane din relația (6.84) devin proporționale, se obțin valoarea și vectorul corespunzător celui de-al treilea mod

$$[\mathcal{D}_3]\,\{\Phi\}_3^{(j-1)} = \{\Phi\}^{(j)} = \lambda_3^{(j)}\{\Phi\}_3^{(j-1)} = \lambda_3\{\Phi\}_3. \tag{6.85}$$

În aceeași manieră se obțin toate celelalte moduri proprii de vibrație.

Metoda matriceală iterativă se poate aplica fie manual, fie folosind un calculator electronic. Cînd numărul gradelor de libertate al sistemului este ridicat, calculul manual devine laborios mai ales pentru determinarea modurilor superioare.

În privința aplicării practice a acestui procedeu se vor face în continuare unele observații:

a) Pentru determinarea caracteristicilor vibrațiilor proprii corespunzătoare modului fundamental, principalele operații de calcul comportă următoarele etape:

— se alege o matrice coloană inițială $\{\Phi\}^{(1)}$;

— se aplică relația (6.61) obținîndu-se următoarea matrice coloană $\{\Phi\}^{(2)}$;

— prin aplicarea relației (6.62) se continuă procesul iterativ de triere a vectorilor coloană pînă cînd în două trepte succesive coloanele devin proporționale (v. relația 6.63). În acest moment s-au obținut caracteristicile reale ale modului fundamental;

— prin folosirea unei valori pivot în matricele coloană rezultate prin triere, procesul iterativ poate fi încetat cînd eroarea existentă în două etape succesive se consideră satisfăcătoare cerințelor practice.

b) Pentru determinarea caracteristicilor corespunzătoare celui de-al doilea mod de vibrație se procedează astfel:

— se definește matricea de eliminare (6.75);

— se calculează matricea dinamică a modului 2 conform relației (6.78);

— se aplică relația (6.79) pînă în treapta în care se ajunge la o precizie acceptabilă aproximației impuse.

c) Stabilirea caracteristicilor proprii ale celorlalte moduri se face ca la punctul *b* după ce în prealabil au fost definite matricele de eliminare.

d) Convergența iterației pentru obținerea modului fundamental este cea mai rapidă. Ea crește cu cît vectorul inițial este mai apropiat de cel exact și cu cît raportul ω_2/ω_1 este mai mare.

e) Se poate determina de la început domeniul în care se află totalitatea pulsațiilor, adică valorile care mărginesc inferior și superior pulsațiile ω_1 și ω_n.

Din teoria matricelor se știe că urma matricei $[\mathcal{D}]$, adică suma elementelor situate pe diagonala principală, este egală totdeauna cu suma valorilor proprii, adică

$$tr\,[\mathcal{D}] = \sum_{j=1}^{n} d_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i, \tag{6.86}$$

și reprezintă un invariant.

Deoarece valorile proprii sînt reale și pozitive rezultă că ele vor fi cuprinse între zero și $tr\,[\mathcal{D}]$. Dacă se admite ipotetic că cele n valori proprii sînt egale între ele, din relația (6.86) se obține:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_i = \dots = \lambda_n = \frac{tr\,[\mathcal{D}]}{n}.$$

Acest rezultat permite să se stabilească limitele superioară și inferioară ale valorilor proprii

$$\left.\begin{aligned} n^{-1}\,tr\,[\mathcal{D}] \leqslant \lambda_1 \leqslant tr\,[\mathcal{D}] \\ 0 \leqslant \lambda_n \leqslant n^{-1}\,tr\,[\mathcal{D}] \end{aligned}\right\} \tag{6.87}$$

unde $\lambda_1 = 1/\omega_1^2$ și $\lambda_n = 1/\omega_n^2$.

Dacă $\omega_n > \dots > \omega_i > \dots > \dots > \omega_2 \gg \omega_1$ și deci se consideră $\lambda_2 = \dots = \lambda_i = \dots \lambda_n = 0$, relația (6.86) permite să se determine în mod aproximativ valoarea proprie fundamentală [99]

$$\omega_1 \simeq (tr\,[\mathcal{D}])^{\frac{1}{2}}. \tag{6.88}$$

6.5.2. Operarea în raport cu matricea de rigiditate [R]

Metoda matriceală iterativă se aplică în același mod dacă se utilizează ecuația (3.26), transformată în identitate (3.27), astfel:

$$[\mathcal{R}]\,\{\Phi\} = \omega^2\,\{\Phi\}.$$

În acest caz, procesul iterativ converge totdeauna către modul propriu cu cea mai ridicată valoare proprie. Întrucît valoarea proprie în raport cu care se efectuează operațiile numerice este ω^2, rezultă că se va obține mai întîi modul propriu cel mai înalt, caracterizat de ω_n și $\{\Phi\}_n$. Aplicînd însă

procedeul eliminării succesive, se vor putea determina caracteristicile dinamice ale modului propriu fundamental. Se poate însă efectua *iterația inversă*, obținîndu-se vectorul $\{\Phi\}^{(j)}$ din sistemul de ecuații

$$\{\mathcal{K}\}\{\Phi\}^{(j)} = \{\Phi\}^{(j-1)}. \tag{6.89}$$

Ținînd seama de relația existentă între matricele $[\mathcal{D}]$ și $[\mathcal{K}]$ (3.29), rezultă că iterația inversă, în raport cu matricea de rigiditate, conduce la rezultate identice cu iterația directă prin intermediul matricei de flexibilitate, obținîndu-se astfel întîi caracteristicile modului propriu fundamental. Utilizarea matricei de rigiditate prezintă avantajul că în cazul structurilor complexe matricea $[\mathcal{K}]$ este slab populată (în particular de tip bandă).

Cu scopul reducerii propagării erorilor de la un mod propriu la altul, eliminarea modurilor determinate anterior se poate realiza cu o matrice specifică, introdusă de Fl. Macavei [128]:

$$[E_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \Phi_{2,1} & e_2^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \Phi_{3,1} & 0 & e_3^{(1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{n,1} & 0 & 0 & \dots & e_n^{(1)} \end{bmatrix}, \tag{6.90}$$

unde

$$e_i^{(1)} = -\frac{[M_1]\{\Phi\}_1}{\langle M_i\rangle\{\Phi\}_1}, \quad i = 1, 2, \dots n, \tag{6.91}$$

iar $\langle M_i\rangle$ reprezintă linia matricei $[M]$.

Noile matrice de inerție și de rigiditate care intervin au expresiile:

$$[M_1] = [E_1]^T[M][E_1] = \begin{bmatrix} M_1^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_{2,2}^{(1)} & \dots & M_{2,n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & M_{n,2}^{(1)} & \dots & M_{n,n}^{(1)} \end{bmatrix}, \tag{6.92}$$

$$[R_1] = [E_1]^T[R][E_1] = \begin{bmatrix} R_1^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R_{2,2}^{(1)} & \dots & R_{2,n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & R_{n,2}^{(1)} & \dots & R_{n,n}^{(1)} \end{bmatrix}. \tag{6.93}$$

Cu matricele de tip (6.92) și (6.93) se operează în procesul iterativ corespunzător următorului mod propriu. În fiecare etapă matricele de inerție și de rigiditate sînt simetrice, iar ordinul matricelor cu care se operează efectiv în fiecare etapă se reduce succesiv. Se observă că M_1^* reprezintă masa generalizată (4.7), iar R_1^* rigiditatea generalizată (4.9) a sistemului dinamic în modul propriu fundamental.

Matricea modală va avea în final expresia:

$$[\Phi] = [E_1][E_2]\dots[E_{n-1}]. \tag{6.94}$$

S-a insistat mai mult asupra metodei matriceale iterative datorită importanței și eficacității pe care o are în operațiile numerice, mai ales cînd se utilizează procedee automate de calcul.

6.6. ALTE METODE

Pe lîngă metodele descrise în paragrafele precedente, în literatura de specialitate mai există și alte procedee privind calculul caracteristicilor proprii de vibrație ale sistemelor oscilante. Aceste metode sînt uneori variante ale celor deja expuse sau se referă la anumite cazuri speciale în care metodele analizate aici aproximează prea larg soluțiile. Dintre aceste metode, mai consacrate sînt următoarele: metoda Rayleigh-Ritz, metoda Galerkin, metoda Myklestad-Thomson, metoda matricelor de transfer, precum și metodele Givens, Householder, Jacobi, Rutishauser etc.

Se subliniază faptul că, metodele date anterior pot rezolva orice problemă curentă de dinamica structurilor întîlnită în practica inginerească. Cu toate acestea, în acest paragraf va fi descris succint un prim procedeu aproximativ, utilizat în special pentru evaluarea pulsațiilor fundamentale de vibrație care, în multe cazuri, reprezintă caracteristica proprie hotărîtoare în aprecierea răspunsului structurii la diferite tipuri de excitații.

Prin transformarea unui sistem cu n grade de libertate într-un sistem cu un singur grad de libertate, pe baza anumitor criterii, calculul pulsațiilor fundamentale se va face cu formula (2.16). Pentru exemplificare, se va considera sistemul din figura 6.8, *a*, cu n grade de libertate, a cărui pulsație fundamentală se va determina prin intermediul sistemului cu un singur grad de libertate din figura 6.8, *b*.

Masa sistemului oscilant din figura 6.8, *b*, sistem numit și *echivalent*, se obține din condiția ca energiile cinetice maxime în cele două sisteme să fie egale

$$E_{c,max}^{(n)} = E_{c,max}^{(e)}, \tag{6.95}$$

unde

$E_{c,max}^{(n)}$, reprezintă energia cinetică maximă a sistemului cu n grade de libertate (fig. 6.8, *a*);

$E_{c,max}^{(e)}$ — energia cinetică maximă a sistemului echivalent (fig. 6.8, *b*).

Expresiile celor două energii, (6.5), rezultă:

$$E_{c,max}^{(n)} = \frac{1}{2}\omega_{1,n}^2\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2,$$

$$E_{c,max}^{(e)} = \frac{1}{2}\omega_{1,e}^2 m_e x_e^2.$$

Întrucît pulsația fundamentală a sistemului cu n grade de libertate $\omega_{1,n}$ trebuie să coincidă cu pulsația proprie a sistemului echivalent $\omega_{1,e}$, folosind relația (6.95), se obține expresia masei echivalente

$$m_e = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2}{x_e^2}. \tag{6.96}$$

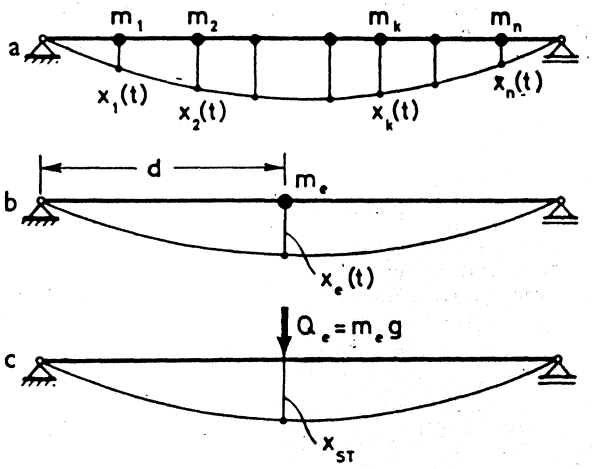


Fig. 6.8

Pentru aplicarea formulei (6.96) se va asimila forma fundamentală cu deformata statică produsă de încărcările $Q_k = m_k g (k = 1, 2... n)$, sau orice altă curbă compatibilă cu legăturile sistemului, în baza căreia se determină ordonatele x_k și x_r.

Fiind precizată poziția masei echivalente d, pulsația fundamentală se calculează cu formula cunoscută

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{x_{ST}}},$$

unde x_{ST} reprezintă săgeata statică produsă de acțiunea sarcinii echivalente $Q_e = m_e g$ aplicată pe direcția de oscilație în punctul de fixare al masei (fig. 6.8,*c*). Gradul de precizie depinde de modul în care s-a aproximat deformata x_k a sistemului. În cazul unui sistem cu masă distribuită se aplică o formulă identică cu formula (6.96) în care suma se înlocuiește prin integrală.

În general această metodă se aplică la sistemele a căror structură elastică este simplă. De aceea, *metoda masei echivalente* are un domeniu de aplicabilitate destul de limitat.

Un alt procedeu care permite evaluarea directă a pulsației sau perioadei proprii fundamentale, specific structurilor înalte (civile sau industriale), se bazează pe aproximarea grosieră a formei fundamentale prin vectorul

$$\{x\} = x_n\{1\} = x_{ST,max}\{1\},$$

unde $x_n = x_{ST,max}$, conform figurii 6.4, reprezintă săgeata maximă a structurii produsă de acțiunea statică a încărcărilor gravitaționale orientate pe direcția GLD. Aplicînd relația (6.8) se obțin pentru pulsație și perioadă formulele Geiger (6.40) și (6.41). Aproximarea este satisfăcătoare, pînă în 10% față de valoarea exactă. În același cadru de aproximare, se poate considera pentru vectorul propriu fundamental o variație liniară (triunghiulară).

6.7. APLICAȚII

Aplicația 6.7.1. Să se determine caracteristicile proprii de vibrație pentru structura din figura 6.9, folosind metodele numerice expuse în acest capitol. Această problemă a mai fost analizată în aplicația 3.4.2. Astfel se cunosc matricele de rigiditate și de inerție

$$[R] = \frac{12EI}{h^3}\begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} = R_0\begin{bmatrix} 13 & -5 & 0 \\ -5 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad [M] = m\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

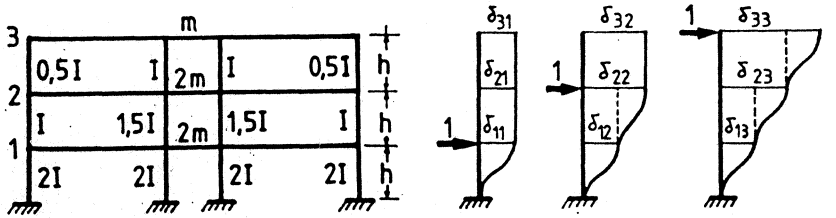


Fig. 6.9

precum și expresiile pulsațiilor proprii de vibrație

$$\omega_1 = 3{,}151\sqrt{EI/mh^3}, \quad \omega_2 = 7{,}238\sqrt{EI/mh^3}, \quad \omega_3 = 9{,}986\sqrt{EI/mh^3}.$$

Variația formelor proprii de vibrație a fost deja calculată și reprezentată grafic în figura 3.7.

Întrucît unele din metodele numerice ce vor fi aplicate în continuare se bazează pe aproximarea prealabilă a deplasărilor laterale, rezultă necesitatea determinării coeficienților de influență care definesc matricea de flexibilitate. În cazul particular al structurii din figura 6.9 coeficienții se calculează direct, obținîndu-se în final următoarea expresie pentru matricea de flexibilitate:

$$[D] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \frac{1}{K}\begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 \\ 15 & 39 & 39 \\ 15 & 39 & 79 \end{bmatrix},$$

în care s-a introdus notația

$$K = 120 \quad R_0 = 1\,440 \quad EI/h^3.$$

Aceste date sînt suficiente pentru a putea aplica toate metodele numerice conținute în prezentul capitol.

a. **Aplicarea metodei Rayleigh.** Calculul pulsației fundamentale se va face cu ajutorul formulei (6.8):

$$\omega^2_{1,R} = g\frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k x_{k,ST}}{\sum_{k=1}^{n} Q_k x^2_{k,ST}},$$

unde x_k sînt deplasările laterale statice produse de acțiunea încărcărilor gravitaționale Q_k aplicate pe direcția orizontală. Calculul deplasărilor se face cu relația matriceală

$$\{x\} = [D]\{Q\}.$$

Toate elementele care intervin în formula lui Rayleigh sînt calculate direct în tabelul 6.1. În baza acestora rezultă

$$\omega_{1,R}^2 = g\frac{631\,(Q/K)}{89\,237\,(Q/K)^2} = \frac{631}{89\,237}\frac{K}{m} = 10{,}2\,\frac{EI}{mh^3},$$

și deci

$$\omega_{1,R} = 3{,}195\sqrt{EI/mh^3}.$$

Așa cum era de așteptat, valoarea pulsației fundamentale obținută prin aplicarea formulei lui Rayleigh este mai mare decît valoarea exactă. Diferența fiind de numai 1,43%, rezultă că această metodă de calcul dă rezultate satisfăcătoare în aplicațiile practice.

b. **Aplicarea metodei Dunkerley-Southwell.** Se va folosi formula redusă (6.39), a cărei utilizare este extrem de simplă

$$\omega_{1,D} = \sqrt{g/\tilde{x}_{ST}},$$

unde

$$\tilde{x}_{ST} = \sum_{k=1}^{n} x_{k,ST}.$$

În cazul de față, deplasările statice produse de acțiunea laterală a fiecărei forțe $Q_k (k = 1,2,3)$ vor fi

$$x_{1,ST} = Q_1\delta_{11} = 30\ Q/K.$$
$$x_{2,ST} = Q_2\delta_{22} = 78\ Q/K,$$
$$x_{3,ST} = Q_3\delta_{33} = 79\ Q/K,$$

și deci

$$\tilde{x}_{ST} = 187\,Q/K.$$

Prin înlocuirea acestui rezultat se obține următoarea expresie pentru pulsația fundamentală de vibrație

$$\omega_{1,D} = 2{,}777\sqrt{EI/mh^3}.$$

TABELUL 6.1

NIVEL k	Q_k	x_k	x_k^2	$Q_k x_k$	$Q_k x_k^2$
1	$2Q$	$75\left(\frac{Q}{K}\right)$	$5\,625\left(\frac{Q}{K}\right)^2$	$150\left(\frac{Q}{K}\right)Q$	$11\,250\left(\frac{Q}{K}\right)^2 Q$
2	$2Q$	$147\left(\frac{Q}{K}\right)$	$21\,509\left(\frac{Q}{K}\right)^2$	$294\left(\frac{Q}{K}\right)Q$	$43\,018\left(\frac{Q}{K}\right)^2 Q$
3	Q	$187\left(\frac{Q}{K}\right)$	$34\,960\left(\frac{Q}{K}\right)^2$	$187\left(\frac{Q}{K}\right)Q$	$34\,969\left(\frac{Q}{K}\right)^2 Q$
				$631\left(\frac{Q}{K}\right)Q$	$89\,237\left(\frac{Q}{K}\right)^2 Q$

Pulsația obținută prin aplicarea formulei lui Dunkerley este totdeauna inferioară celei exacte. Pentru cazul considerat aici, diferența este de 11,35%.

Dacă se utilizează formula corectată, în baza justificărilor date în partea a II-a a lucrării, va rezulta

$$\omega_1 \approx 1{,}12\omega_{1,D} = 3{,}110\sqrt{EI/mh^3} \quad (-1{,}27\%).$$

c. **Aplicarea metodei Stodola.** Pulsația fundamentală a structurii se obține folosind fie relația (6.44), fie relația (6.45). Calculul se va face numai în două trepte de aproximare. În prima treaptă de aproximare se vor considera deplasările produse de acțiunea încărcărilor gravitaționale Q_k aplicate lateral, deci valorile calculate în tabelul 6.1:

$$x_1^{(1)} = 75\ Q/K,\quad x_2^{(1)} = 147\ Q/K,\quad x_3^{(1)} = 187\ Q/K.$$

În cea de-a doua treaptă de aproximație se vor considera următoarele încărcări laterale

$$F_1^{(2)} = m_1x_1^{(1)},\quad F_2^{(2)} = m_2x_2^{(1)},\quad F_3^{(2)} = m_3x_3^{(1)},$$

cărora le corespund deplasările laterale

$$\{x^{(2)}\} = [D]\{F^{(2)}\}.$$

Efectuînd operațiile numerice de calcul rezultă

$$\begin{Bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{K}\begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 \\ 15 & 39 & 39 \\ 15 & 39 & 79 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 150\ mQ/K \\ 294\ mQ/K \\ 187\ mQ/K \end{Bmatrix},$$

și deci

$$x_1^{(2)} = 9\,465\ mQ/K^2,\quad x_2^{(2)} = 21\,009\ mQ/K^2,\quad x_3^{(2)} = 28\,489\ mQ/K^2.$$

Aplicînd relația (6.44), se obține

$$\omega_1^2 = \frac{x_3^{(1)}}{x_3^{(2)}} = \frac{187\ Q/K}{28\,489\ mQ/K^2} = \frac{187}{28\,489}\frac{K}{m} = 9{,}455\,\frac{EI}{mh^3},$$

iar pulsația fundamentală va fi

$$\omega_1 = 3{,}075\sqrt{EI/mh^3}.$$

Diferența față de expresia exactă a pulsației este de 2,38%.

Dacă se utilizează a doua relație (6.45), pulsația fundamentală va fi mai corect aproximată

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_k x_k^{(1)}}{\sum_k x_k^{(2)}} = \frac{409\ Q/K}{58\,963\ mQ/K^2} = 9{,}98\,\frac{EI}{mh^3},$$

încît

$$\omega_1 = 3{,}160\sqrt{EI/mh^3}.$$

Pulsația astfel obținută aproape coincide cu cea exactă (diferența 0,32%). Forma de vibrație corespunzătoare va avea ordonatele

$$\Phi_{1.1} = 1{,}00 \quad \Phi_{2.1} = 2{,}22 \quad \Phi_{3.1} = 3{,}02.$$

Este evident că în următoarea treaptă de aproximare rezultatele se vor îmbunătăți substanțial, în special forma proprie de vibrație.

d. **Aplicarea metodei Holzer.** Operația de triere a caracteristicilor proprii de vibrație se face în baza relației (6.57), adică

$$\Phi_{k,i} = \Phi_{k+1.i} - \frac{\varphi_i}{\eta_{k+1.k}} \sum_{r=k+1}^{n} \alpha_r \Phi_{r.i} \quad (i = 1,2,3).$$

Rigiditățile relative de nivel, care reprezintă forțele care produc deplasări unitare între două niveluri consecutive, precum și coeficienții de rigiditate relativă rezultă

$$R_{1.0} = \eta_{1.0} R_0 = 8R_0, \quad \eta_{1.0} = \eta_{11} = 8$$

$$R_{2.0} = \eta_{2.0} R_0 = 5R_0, \quad \eta_{2.0} = \eta_{12} = 5,$$

$$R_{3.0} = \eta_{3.0} R_0 = 3R_0, \quad \eta_{3.0} = \eta_{13} = 3.$$

Coeficienții de masă α_k, definiți prin relația (6.55) vor fi

$$m_1 = \alpha_1 m = 2m, \quad \alpha_1 = 2,$$

$$m_2 = \alpha_2 m = 2m, \quad \alpha_2 = 2,$$

$$m_3 = \alpha_3 m = m, \quad \alpha_3 = 1.$$

Coeficienții de frecvență φ_i se pot exprima în funcție de pulsație folosind relația (6.56):

$$\varphi_i = \frac{m}{R_0} \omega_i^2 = \frac{mh^3}{12EI} \omega_i^2,$$

expresie care coincide cu notația α_i din aplicația 3.4.2.

Operațiile de triere a soluțiilor nu vor fi date în detaliu, ci numai iterațiile finale care corespund coeficienților exacți $\varphi_1 = 0{,}827$, $\varphi_2 = 4{,}366$, $\varphi_3 = 8{,}307$. În tabelul 6.2 se dau aceste operații finale cu mențiunea că s-au considerat egale cu unitatea ordonatele formelor proprii pe direcția gradului de libertate 3, adică $\Phi_{3.1} = \Phi_{3.2} = \Phi_{3.3} = +1{,}000$. Cu scopul de a compara rezultatele obținute cu cele exacte, din aplicația 3.4.2, se vor transforma vectorii proprii din tabelul 6.2 considerînd ordonatele pe direcția gradului de libertate 1 egale cu unitatea. În consecință vor rezulta următorii vectori proprii

$$\begin{Bmatrix} \Phi_{1.1} \\ \Phi_{2.1} \\ \Phi_{3.1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}000 \\ 2{,}269 \\ 3{,}133 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Phi_{1.2} \\ \Phi_{2.2} \\ \Phi_{3.2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}000 \\ 0{,}854 \\ -1{,}875 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Phi_{1.3} \\ \Phi_{2.3} \\ \Phi_{3.3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}000 \\ -0{,}723 \\ 0{,}408 \end{Bmatrix},$$

obținîndu-se astfel mărimile exacte ale vectorilor proprii de vibrație.

TABELUL 6.2

φ_i	k, r	α_r	$\alpha_r\varphi_i$	$\Phi_{k,i}$	$\alpha_r\varphi_i\Phi_{k,i}$	$\Sigma\alpha\varphi\Phi$	η_k	$\frac{1}{\eta_k}\Sigma$
Modul 1 $\varphi_1 = 0{,}827$	3	1	0,827	+1,000	+0,827	+0,827	3	+0,276
	2	2	1,654	+0,724	+1,198	+2,025	5	+0,405
	1	2	1,654	+0,319	+0,528	+2,553	8	+0,319
	0	—	—	0,000	—	—	—	—
Modul 2 $\varphi_2 = 4{,}366$	3	1	4,366	+1,000	+4,366	+4,366	3	+1,455
	2	2	8,732	−0,455	−3,973	+0,393	5	+0,079
	1	2	8,732	−0,534	−4,663	−4,270	8	−0,534
	0	—	—	0,000	—	—	—	—
Modul 3 $\varphi_3 = 8{,}307$	3	1	8,307	+1,000	+8,307	+8,307	3	+2,769
	2	2	16,614	−1,769	−29,390	−21,083	5	−4,217
	1	2	16,614	+2,448	+40,665	+19,582	8	+2,448
	0	—	—	0,000	—	—	—	—

e **Aplicarea metodei matriceale iterative utilizînd matricea de flexibilitate.** În baza considerațiilor teoretice expuse în § 6.5, caracteristicile proprii de vibrație ale modului fundamental se determină cu relația (6.60) adică

$$[\mathcal{D}_1]\{\Phi\}_1 = \lambda_1 \{\Phi\}_1, \quad \left(\lambda_1 = \frac{1}{\omega_1^2}\right)$$

în care matricea dinamică are expresia

$$[\mathcal{D}_1] = [D][M] = \frac{m}{K}\begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 \\ 15 & 39 & 39 \\ 15 & 39 & 79 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{m}{K}\begin{bmatrix} 30 & 30 & 15 \\ 30 & 78 & 39 \\ 30 & 78 & 79 \end{bmatrix}.$$

În procesul de triere a soluțiilor se va admite inițial un vector propriu care să concorde cu configurația geometrică a formei fundamentale. De asemenea,

în toate etapele de iterație se va considera ca pivot fix, valoarea ordonatei formei proprii pe direcția gradului 1 de libertate ($\Phi_{1,1} = +1{,}000$).

Iterația 1

$$\frac{m}{K}\begin{bmatrix}30 & 30 & 15\\ 30 & 78 & 39\\ 30 & 78 & 79\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix}=\frac{m}{K}\begin{Bmatrix}135\\303\\423\end{Bmatrix}=135\frac{m}{K}\begin{Bmatrix}1{,}000\\2{,}244\\3{,}133\end{Bmatrix}=\lambda_1^{(1)}\{\Phi\}_1^{(1)},$$

de unde rezultă

$$\lambda_1^{(1)} = 135\frac{m}{K} \quad \text{și} \quad \omega_1^{(1)} = 3{,}265\sqrt{EI/mh^3}.$$

Iterația a 2-a

$$\frac{m}{K}\begin{bmatrix}30 & 30 & 15\\ 30 & 78 & 39\\ 30 & 78 & 79\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1{,}000\\2{,}244\\3{,}133\end{Bmatrix}=\frac{m}{K}\begin{Bmatrix}144{,}315\\327{,}263\\452{,}583\end{Bmatrix}=144{,}315\frac{m}{K}\begin{Bmatrix}1{,}000\\2{,}267\\3{,}136\end{Bmatrix}=\lambda_1^{(2)}\{\Phi\}_1^{(2)}.$$

$$\lambda_1^{(2)} = 144{,}315\frac{m}{K}, \quad \omega_1^{(2)} = 3{,}159\sqrt{EI/mh^3}.$$

Iterația a 4-a

$$\frac{m}{K}\begin{bmatrix}30 & 30 & 15\\ 30 & 78 & 39\\ 30 & 78 & 79\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1{,}000\\2{,}269\\3{,}134\end{Bmatrix}=\frac{m}{K}\begin{Bmatrix}145{,}081\\329{,}210\\454{,}565\end{Bmatrix}=145{,}081\frac{m}{K}\begin{Bmatrix}1{,}000\\2{,}269\\3{,}133\end{Bmatrix}=\lambda_1^{(3)}\{\Phi\}_1^{(3)},$$

$$\lambda_1^{(3)} = 145{,}081\frac{m}{K}, \quad \omega_1^{(3)} = 3{,}151\sqrt{EI/mh^3}.$$

Întrucît vectorii $\{\Phi\}^{(3)}$ și $\{\Phi\}^{(4)}$ practic coincid, se poate considera că s-au obținut rezultatele exacte și anume:

$$\omega_{1,EX} = \omega_1^{(3)} = 3{,}151\sqrt{EI/mh^3}, \quad \{\Phi\}_{1,EX} = \{\Phi\}_1^{(3)} = \begin{Bmatrix}1{,}000\\2{,}269\\3.133\end{Bmatrix},$$

rezultînd pentru modul fundamental un proces iterativ rapid convergent.

Pentru determinarea caracteristicilor modului 2 de vibrație se va stabili mai întîi matricea de eliminare (6.75), folosind caracteristicile modului fundamental. Această matrice va avea forma

$$[E_1] = \begin{bmatrix}0 & -2{,}269 & -1{,}567\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Matricea dinamică corespunzătoare modului 2 de vibrație se obține aplicînd relația (6.78), adică

$$[\mathcal{D}_2] = [\mathcal{D}_1][E_1] = \frac{m}{K}\begin{bmatrix}30 & 30 & 15\\ 30 & 78 & 39\\ 30 & 78 & 79\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -2{,}269 & -1{,}567\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -38{,}073 & -31{,}995\\ 0 & 9{,}927 & -7{,}995\\ 0 & 9{,}927 & 32{,}005\end{bmatrix}.$$

În această situație, valorile și vectorii proprii se determină prin intermediul relației (6.79):

$$[\mathcal{D}_2]\{\Phi_2\} = \lambda_2\{\Phi\}_2,$$

iar ca pivot fix se va considera ordonata $\Phi_{1,2} = +1{,}000$.

Deoarece procesul iterativ este mai lent, va fi redată numai ultima operație de calcul care corespunde cu a 8-a iterație (inițial s-a admis vectorul propriu 1, 1, —2). Deci

$$\frac{m}{K}\begin{bmatrix}0 & -38{,}073 & -31{,}995\\ 0 & 9{,}927 & -7{,}995\\ 0 & 9{,}927 & 32{,}005\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1{,}000\\0{,}854\\-1{,}875\end{Bmatrix}=\frac{m}{K}\begin{Bmatrix}27{,}486\\23{,}471\\51{,}442\end{Bmatrix}=$$

$$=27{,}486\frac{m}{K}\begin{Bmatrix}1{,}000\\0{,}854\\-1{,}875\end{Bmatrix}=\lambda_2^{(8)}\{\Phi\}_2^{(8)},$$

încît

$$\lambda_2^{(8)} = 27{,}482\frac{m}{K}, \quad \omega_2^{(8)} = 7{,}238\sqrt{EI/mh^3}.$$

Rezultă că după opt etape iterative se obțin caracteristicile exacte ale modului 2 de vibrație

$$\omega_{2,EX} = \omega_2^{(8)} = 7{,}238\sqrt{EI/mh^3}, \quad \{\Phi\}_{2,EX} = \{\Phi\}_2^{(8)} = \begin{Bmatrix}1{,}000\\0{,}854\\-1{,}875\end{Bmatrix}.$$

Pentru determinarea caracteristicilor modului 3, se stabilește inițial matricea de eliminare $[E_2]$ pe baza condițiilor de ortogonalitate (6.81). Rezultă în final matricea dinamică corespunzătoare modului 3 de vibrație:

$$[\mathcal{D}_3] = [\mathcal{D}_1][E_2] = \frac{m}{K}\begin{bmatrix}30 & 30 & 15\\ 30 & 78 & 39\\ 30 & 78 & 79\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 2{,}449\\ 0 & 0 & -1{,}769\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\frac{m}{K}\begin{bmatrix}0 & 0 & 35{,}373\\ 0 & 0 & -25{,}560\\ 0 & 0 & 14{,}440\end{bmatrix}.$$

Ultima coloană a matricei $[\mathcal{D}_3]$ reprezintă vectorul propriu $\{\Phi\}_3$, astfel încît nu se mai efectuează o iterație propriu-zisă. Aceasta realizează doar o altă normalizare a vectorului $\{\Phi\}_3$ și precizează valoarea proprie:

$$\lambda_3 = 14{,}440\frac{m}{K},\quad \omega_3 = 9{,}986\sqrt{EI/mh^3},\quad \{\Phi\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}723 \\ 0{,}408 \end{Bmatrix}.$$

f. **Aplicarea metodei matriceale iterative utilizînd matricea de rigiditate.** Se va aplica iterația directă, cu matrice de eliminare de tipul (6.90) care păstrează simetria matricelor de rigiditate și de inerție. Pentru modul propriu 3 s-au utilizat matricele $[M]$ și $[R]$ inițiale, după 12 pași de iterație obținîndu-se:

$$\omega_3^2 = 8{,}3069\frac{R_0}{m},\quad \omega_3 = 9{,}984\sqrt{EI/mh^3},\quad \{\Phi\}_3 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}723 \\ 0{,}408 \end{Bmatrix}.$$

Matricea de eliminare a modului 3 are expresia:

$$[E_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}723 & e_2^{(3)} & 0 \\ 0{,}408 & 0 & e_3^{(3)} \end{bmatrix},$$

unde, conform expresiei (6.91):

$$e_2^{(3)} = -\frac{2\times 1}{2\times(-0{,}723)} = 1{,}384,\quad e_3^{(3)} = \frac{2\times 1}{1\times 0{,}408} = -4{,}895.$$

Matricele pentru iterarea modului propriu 2 vor fi:

$$[M_2] = [E_3]^T[M][E_3] = m\begin{bmatrix} 3{,}212 & 0 & 0 \\ 0 & 5{,}827 & 2 \\ 0 & 2 & 25{,}962 \end{bmatrix},$$

$$[R_2] = [E_3]^T[R][E_3] = R_0\begin{bmatrix} 26{,}679 & 0 & 0 \\ 0 & 14{,}487 & 26{,}401 \\ 0 & 26{,}401 & 84{,}887 \end{bmatrix}.$$

Iterînd numai cu submatricele (2×2), obținute prin omiterea primei linii și coloane din $[R_2]$ și $[M_2]$, în 5 pași de iterație se obține vectorul propriu $\{1 \quad 0{,}621\}$. Matricea de eliminare a modului 2 va fi:

$$[E_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0{,}621 & e_3^{(2)} \end{bmatrix},$$

unde

$$e_3^{(2)} = -\frac{5{,}827\times 1 + 2\times 0{,}621}{2\times 1 + 25{,}962\times 0{,}621} = -0{,}390.$$

Printr-o transformare de coordonate corespunzătoare a matricei $[E_2]$, se obțin matricele de inerție și de rigiditate diagonale:

$$[M_1] = [E_2]^T[M][E_2] = m\begin{bmatrix} 3{,}212 & 0 & 0 \\ 0 & 18{,}317 & 0 \\ 0 & 0 & 8{,}222 \end{bmatrix},$$

$$[R_1] = [E_2]^T[R_2][E_2] = R_0\begin{bmatrix} 26{,}679 & 0 & 0 \\ 0 & 79{,}970 & 0 \\ 0 & 0 & 6{,}800 \end{bmatrix}.$$

Matricea modală are expresia:

$$[\Phi] = [E_3][E_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0{,}723 & 0{,}854 & 2{,}269 \\ 0{,}408 & -1{,}875 & 3{,}133 \end{bmatrix}.$$

Deoarece s-a efectuat o iterație directă cu matricea de rigiditate, modurile proprii s-au obținut în ordine inversată. Pătratele pulsațiilor proprii se obțin efectuînd raportul elementelor diagonale corespunzătoare ale matricelor $[R_1]$ și $[M_1]$.

g. **Metoda masei echivalente.** În vederea determinării masei echivalente m_e, care se consideră concentrată la nivelul 3 al cadrului din figura 6.9, se va utiliza relația (6.90)

$$m_e = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2}{x_e^2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,1}^2}{\Phi_{3,1}^2}.$$

Dacă se admite pentru modul fundamental o variație liniară de forma

$$\{\Phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \Phi_{1,1} \\ \Phi_{2,1} \\ \Phi_{3,1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1{,}000 \\ 2{,}000 \\ 3{,}000 \end{Bmatrix},$$

rezultă

$$m_e = \frac{2m(1)^2 + 2m(2)^2 + m(3)^2}{3^2} = 2{,}11\ m.$$

Săgeata statică a structurii produsă de acțiunea laterală a încărcării $Q_e = m_e g = 2{,}11Q$, aplicată pe direcția gradului de libertate 3 va fi

$$x_{ST} = Q_e\delta_{33} = 2{,}11Q\left(\frac{79}{K}\right) = \frac{166{,}8}{1440}\frac{Qh^3}{EI}.$$

În consecință pulsația fundamentală va fi:

$$\omega_1 = \sqrt{g/x_{ST}} = 2{,}950\sqrt{EI/mh^3}.$$

Diferența dintre această valoare a pulsației și cea exactă este de 6,35%. Aproximația poate fi ameliorată dacă se admite o altă deformată care să asimileze forma proprie fundamentală.

În tabelul 6.3 sînt recapitulate toate rezultatele ce s-au obținut prin aplicarea metodelor numerice din acest capitol.

TABELUL 6.3

METODA DE CALCUL	$\frac{\omega_1}{\sqrt{EI/mh^3}}$	$\frac{\omega_2}{\sqrt{EI/mh^3}}$	$\frac{\omega_3}{\sqrt{EI/mh^3}}$	Diferența față de $\omega_{1,EX}$ în %
Exactă	3,151	7,238	9,986	—
Rayleigh	3,195	—	—	+1,43
Dunkerley	2,777	—	—	−11,35
Dunkerley corectată	3,110	—	—	−1,27
Stodola	3,160	—	—	+0,32
Holzer	3,151	7,238	9,986	0
Matriceală iterativă	3,151	7,238	9,986	0
Masa echivalentă	2,950	—	—	−6,35

Aplicația 6.7.2. Pentru cadrul de beton armat, cu șapte niveluri, din figura 6.10, s-au determinat caracteristicile proprii de vibrație utilizînd metoda matriceală iterativă cu ajutorul unui calculator electronic. Principalele caracteristici ale structurii sînt date direct în figura 6.10.

În tabelul 6.4 sînt conținute mărimile ordonatelor tuturor vectorilor proprii, precum și valorile proprii corespunzătoare. Variația formelor proprii de vibrație sînt reprezentate grafic în figura 6.10.

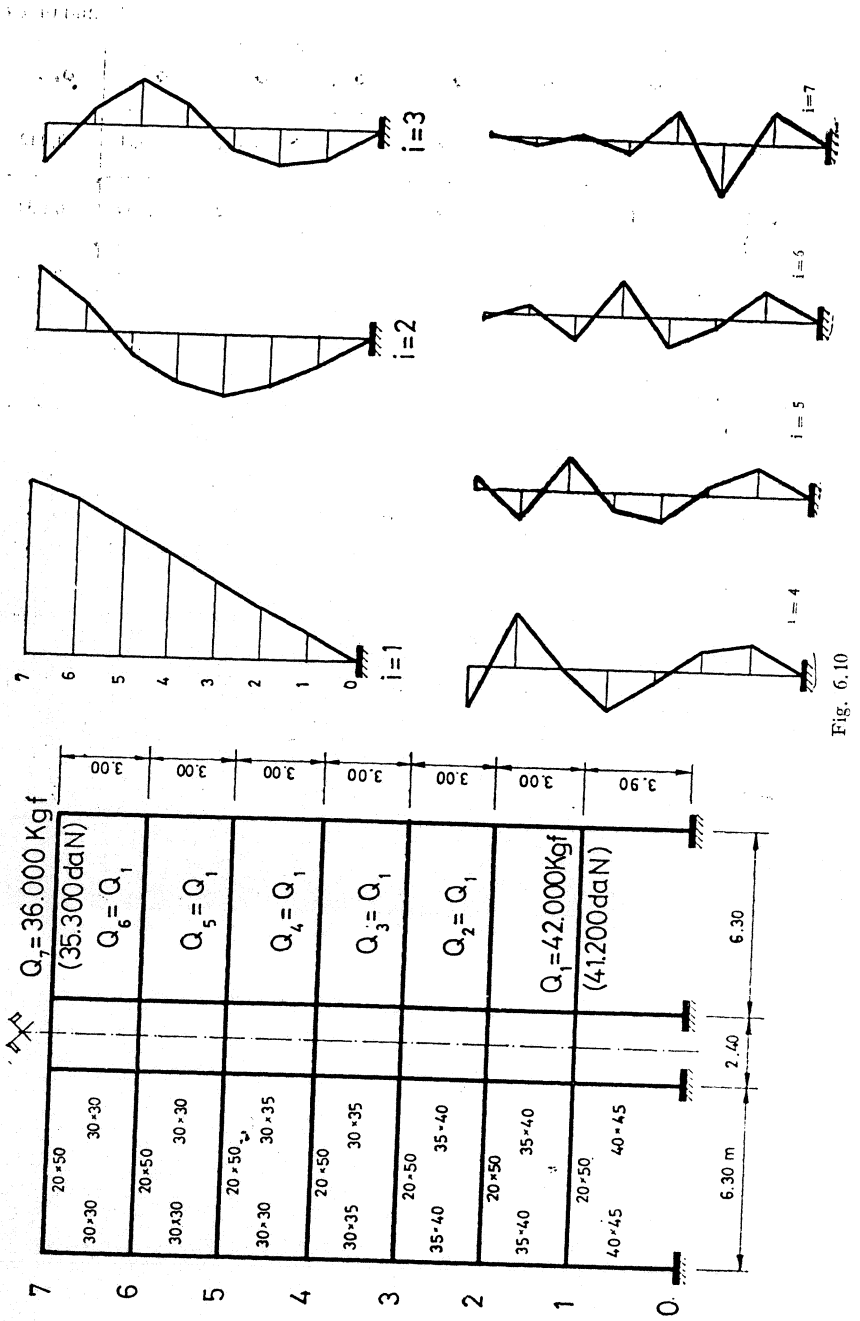


Fig. 6.10

TABELUL 6.4

k	α_k	$\Phi_{k,1}$	$\Phi_{k,2}$	$\Phi_{k,3}$	$\Phi_{k,4}$	$\Phi_{k,5}$	$\Phi_{k,6}$	$\Phi_{k,7}$
7	0,875	5,868	2,225	−1,439	−1,389	0,421	−0,084	0,012
6	1	5,431	1,103	0,438	1,871	−0,972	0,309	−0,031
5	1	4,567	−0,571	1,549	0,133	1,249	−0,851	0,101
4	1	3,692	−1,529	0,801	−1,367	−0,392	1,288	−0,318
3	1	2,644	−1,873	−0,700	−0,408	−0,993	−0,988	0,892
2	1	1,830	−1,627	−1,266	0,734	0,292	−0,279	−1,781
1	1	1,000	−1,000	−1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0	1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
ω_i, în rad/s		7,468	19,404	31,102	34,794	49,711	57,837	71,281
T_i, în s		0,841	0,324	0,202	0,181	0,126	0,109	0,088

Partea a II-a

INGINERIE SEISMICĂ

7

INTRODUCERE ÎN STUDIUL SEISMOLOGIC ŞI INGINERESC AL CUTREMURELOR DE PĂMÎNT

7.1. SPECIFICUL FENOMENELOR SEISMICE

Cutremurele de pămînt sînt fenomene fizice deosebit de complexe, caracterizate printr-o mişcare violentă şi haotică a păturilor superficiale ale globului terestru, iar prin consecinţele sale dezastruoase asupra oamenilor şi bunurilor materiale reprezintă una din cele mai mari calamităţi naturale cunoscute în decursul timpului. Toată istoria documentară a oamenirii relatează despre catastrofele produse de cutremure, începînd cu descrierea panicii şi suferinţei populaţiei şi terminînd cu dispariţia unor civilizaţii întregi. Datorită apariţiei lor imprevizibile şi cauzelor care le generează, omul nu a reuşit pînă în prezent să-şi exercite controlul şi autoritatea asupra cutremurelor care pot produce, într-un interval de timp extrem de scurt, pagube şi dezastre imense asupra operelor pe care omenirea le-a creat printr-o muncă de secole.

Prin pierderile de vieţi omeneşti, avarierea sau distrugerea unor obiective civile şi industriale, modificările topologice superficiale, ca urmare a ruptu-rilor scoarţei terestre şi alunecărilor de pămînt, şi prin pagubele materiale şi spirituale produse, cutremurele au implicaţii economice şi sociale din cele mai importante.

Modul de manifestare al cutremurelor, precum şi consecinţele provocate, au încă un efect nefast asupra psihologiei oamenilor, indiferent de vîrstă şi gradul de cultură, mai ales dacă se are în vedere caracterul de neprevăzut al acestor fenomene.

În epoca modernă, datorită exploziei demografice şi expansiunii industriale din zonele afectate de mişcările seismice, consecinţele defavorabile produse de cutremure devin mai grave decît în trecut cînd gradul de aglomerare al acestor zone era mult mai redus. Întrucît potenţialul economic şi social al omenirii este în continuă creştere, este de aşteptat ca dezastrele produse de cutremure să fie mai de anvergură, chiar dacă seismicitatea zonelor actuale nu se modifică. De altfel, amploarea pierderilor în vieţi omeneşti şi bunuri materiale a evoluat aproape în acelaşi ritm cu sporirea densităţii populaţiei şi cu dezvoltarea economico-socială. Evaluările statistice arată că în prima jumătate a acestui secol numărul victimelor produse de cutremure a fost de circa 15 000/an, în următorii 25 de ani (pînă în 1975) acest număr dublîndu-se, deşi ingineria seismică a cunoscut în ultimele decenii o dezvoltare considerabilă, iar măsurile de protecţie antiseismică s-au aplicat în condiţii satisfăcătoare. Seismologii americani apreciază că un cutremur identic cu cel din San Francisco (18 aprilie 1906), care a provocat moartea a 700 de persoane, ar produce astăzi aproape 20 000 de victime şi circa 600 000 de răniţi datorită creşterii densităţii populaţiei, cu toate că marea majoritate a construcţiilor sînt asigurate seismic. Din aceste motive, riscul seismic devine din ce în ce mai mare, el diferenţiindu-se atît ca importanţă, cît şi ca pondere.

Probleme mai dificile şi deosebit de serioase le ridică acele zone în care nu există încă surse seismice identificate sau unde activitatea seismică nu

s-a mai manifestat de secole. Aceste situaţii devin grave întrucît este posibil şi probabil ca în aceste zone, în care nu se iau măsuri de protecţie antiseismică, să se producă cutremure catastrofale. Cercetările de seismologie efectuate pînă în prezent nu oferă încă posibilitatea predicţiei unui cutremur puternic, inclusiv gradul de intensitate, localizarea geografică şi data producerii acestuia. De aceea zonele potenţial active din punct de vedere seismic, nu pot fi încă precizate. În numeroase zone seismice, sau potenţial seismice, trăiesc oameni în locuinţe cu rezistenţă întîmplătoare la cutremure. În acest sens specialiştii americani apreciază că în S.U.A. locuiesc aproximativ 100 milioane de oameni în construcţii situate în zone seismice, dintre care majoritatea au fost proiectate fără a ţine seama de acţiunea distructivă a cutremurelor.

În ultinul secol, ştiinţa şi tehnica au adus contribuţii notabile cu privire la explicarea originii şi cauzelor cutremurelor, precum şi asupra măsurilor concrete ce se impun în vederea limitării sau chiar prevenirii distrugerilor şi pagubelor provocate de mişcarea seismică. Această problemă, de o importanţă socială şi economică deosebită, a devenit o preocupare cu caracter fundamental în ţările în care frecvenţa de apariţie a cutremurelor puternice este ridicată, aşa cum este şi cazul României. Astfel, după cutremurul catastrofal din San Francisco (1906), la data de 5 iulie 1906 a intrat oficial în vigoare prima normă seismică din lume referitoare la asigurarea seismică a construcţiilor. Cercetările în acest domneiu au progresat la început destul de lent, pentru ca în ultimele decenii să cunoască o dezvoltare teoretică şi experimentală impresionantă.

Istoria modernă a cutremurelor a reţinut o serie de date memorabile în legătură cu amploarea dezastrelor înregistrate, precum şi cu informaţiile de ordin ştiinţific furnizate de mişcările seismice şi care au contribuit la elucidarea multor aspecte de ordin ştiinţific. Din analiza rapoartelor şi studiilor elaborate asupra cutremurelor care s-au produs în acest secol, în tabelul 7.1 se prezintă o sinteză a celor mai semnificative mişcări seismice, precum şi principalele caracteristici seismologice.

Cercetările care au ca scop general aprofundarea cunoştinţelor asupra structurii interioare a Pămîntului, pe baza analizei propagării undelor seismice, precum şi identificarea mecanismului de generare al cutremurelor puternice, fac obiectul *seismologiei*, care reprezintă o ramură bine conturată a geofizicii. Preocupările de seismologie au apărut cu mult înaintea celor cu privire la tehnica protecţiei antiseismice a construcţiilor. Trebuie subliniat faptul că toate teoriile actuale privind originea şi cauzele cutremurelor, structura interioară a Pămîntului, mecanismul producerii şi propagării undelor seismice de la sursă pînă la suprafaţa liberă, precum şi alte fenomene auxiliare, se bazează aproape exclusiv pe interpretări teoretice şi logice. De aceea în numeroase situaţii, observaţiile şi constatările efective au evidenţiat inadvertenţe calitative şi cantitative între deducţiile matematice şi fenomenele reale înregistrate. În această privinţă există încă multe aspecte esenţiale, mai ales în legătură cu definirea caracteristicilor mişcării seismice ce se manifestă într-un anumit punct situat pe suprafaţa terestră, care nu au fost elucidate pînă în prezent de către seismologi.

Studiile asupra naturii efectelor distructive produse de mişcarea terenului, precum şi dezvoltarea metodelor practice de analiză şi proiectare a construcţiilor rezistente la cutremure revin *ingineriei seismice*. Acţiunea seismică

TABELUL 7.1

CUTREMURE SEMNIFICATIVE PRODUSE ÎN PERIOADA 1900—1984

Nr. crt.	DATA	DENUMIREA CUTREMURULUI	STAȚIA SEISMICĂ (observație)	MAGNIT. RICHTER M	INTENSIT. SEISMICĂ MM	ACC. MAX. (cm/s²)	DISTANȚA EPICENTR. (km)	ADÎNC. FOCAR (km)	DURATA SEMNIF. (s)
1.	18.IV.1906	San Francisco – California	—	8,3	XI	—	—	—	25
2.	28.XII.1908	Messina—Italia	—	7,5	X	200	—	—	—
3.	16.XII.1920	Kansu—China	—	8,6	XI	—	—	—	—
4.	15.IX.1923	Kanto—Japonia	Tokyo—Yokohama	8,3	X—XI	—	—	12—16	—
5.	29.VI.1925	Santa Barbara—California	—	6,3	VIII—IX	—	—	—	—
6.	10.III.1933	Long Beach—California	Public Utilities Building	6,3	IX	285	—	16,0	—
7.	30.XII.1934	Lower—California	El Centro-Imperial Valley	6,5	IX	183	58	16,0	16,9
8.	31.X.1935	Helena—Montana	Carrol College	6,0	VIII	145	8	—	3,7
9.	18.V.1940	Imperial Valley—California	El Centro Valley	6,5	X	341,7	8	16,0	24,4
10.	10.XI.1940	Vrancea—România	București	7,4	IX	—	165	133	—
11.	21.X.1942	Borrego Valley—California	El Centro-Imperial Valley	6,5	VII	60	—	16,0	—
12.	28.VI.1948	Fukui—Japonia	—	7,3	IX—X	600	—	15	—
13.	6.X.1948	Ashabad—U.R.S.S.	Ashabad	7,6	IX	—	30—40	20—40	10
14.	13.IV.1949	Western Washington	Olympia Washington	7,1	VIII	280	21	—	17,0
15.	21.VII.1952	Kern County—California	Taft	7,7	XI	179	56	16,0	28,9
16.	21.XII.1954	Eureka—California	Eureka Federal Building	6,5	VII	258	25	—	6,8
17.	18.III.1957	Southern—California	Port Hueneme	4,7	VI	167	—	13,8	—
18.	22.III.1957	San Francisco	Golden Gate Park	5,3	VII	105	11	—	2,9
19.	28.VII.1957	Mexico—Mexic	—	7—7,5	VII—VIII	—	—	—	—
20.	22.II.1960	Agadir—Maroc	Agadir	5,7	X—XI	—	3—5	3	15
21.	22.V.1960	Chile	Valdivia-Conception	8,5	X—XI	—	—	—	—
22.	26.VII.1963	Skopje—Iugoslavia	USGS	6,2	VIII—IX	—	—	33	—
23.	27.III.1964	Prince William Sound, Alaska	Anchorage	8,4	XI	—	130	20	—
24.	16.VI.1964	Niigata—Japonia	Atsumi	7,5	VIII	400	20	40	—
25.	29.IV.1965	Puget Sound—Washington	Olympia Seattle-Highway Test Lab	6,5	VIII	198	—	—	—
26.	26.IV.1966	Taskent—U.R.S.S.	Taskent	5,4	VIII	—	~0	8	—
27.	27.VI.1966	Parkfield—California	Cholame Shandon — California	5,6—5,8	VII	434	5	6	6,7
28.	22.VII.1967	Mudurny—Turcia	—	7,1	IX	220	—	20	—
29.	29.VII.1967	Caracas—Venezuela	Caracas	5,7—6,5	VII—VIII	—	60	15	20
30.	11.XII.1967	Konya—India	Konya	6,2—7,5	VIII—IX	600	13	12	—
31.	8.IV.1968	Borrego Mountain—California	San Onofre	6,5	VII	46	122	11,1	30
32.	15.V.1968	Tokachi Oki—Japonia	—	7,8	IX	230	—	20	—
33.	31.V.1970	Chimbote—Peru	—	7,7	VIII—IX	—	—	25	—
34.	9.II.1971	San Fernando—California	Pacoima Dam	6,6	XI	1 148,1	4	13,0	7,0
35.	23.XII.1972	Managua—Nicaragua	Nicaragua-Esso Refinery	6,2	—	351	—	—	5
36.	31.X.1974	Lima—Peru	—	7,6	IX	250	—	55	—
37.	6.V.1976	Friuli—Italia	Trieste	6,5	IX—X	350	—	—	—
38.	28.VII.1976	Tangshan—China	Tangshan	7,8	X—XI	—	~0	12—16	—
39.	16.VIII.1976	Mindanao—Filipine	USGS	8,0	IX	—	—	25	—
40.	4.III.1977	Vrancea—România	Bucuresti	7,2	IX	~210	165	95—105	15
41.	23.XI.1977	Argentina	San Juan	7,4	X	189,5	—	—	—
42.	15.IV.1979	Montenegro—Iugoslavia	Bar	7,2	IX	—	—	40	—
43.	27.XI.1979	Khorasan—Iran	USGS	7,1	IX—X	—	—	33	—
44.	29.VII.1980	Western Nepal—India	USGS	6,5	IX	—	—	33	—
45.	10.X.1980	El Asnan—Algeria	—	7,3	IX—X	—	—	—	—
46.	24.II.1981	Corinth—Grecia	Atena	6,7	IX	330	80	16	—

asupra construcțiilor, generată de cutremure, are un pronunțat caracter dinamic de natură particulară întrucît se manifestă violent, spațial și aleatoriu. Desfășurarea evenimentului seismic este de scurtă durată (tranzitorie), avînd direcția și intensitatea extrem de variabile în timp. În consecință, ingineria seismică reprezintă acea parte a dinamicii structurilor care furnizează informații asupra calculului și comportării structurilor de rezistență la acțiunea cutremurelor puternice și contribuie la definirea unor concepții unitare cu privire la configurația structurală (dimensiunile și forma elementelor constitutive), caracteristicile materialelor, procedeele de execuție etc.

În ultimele decenii, evoluția cunoștințelor acumulate cu privire la descrierea acestui fenomen natural a permis să se proiecteze și să se execute construcții care au demonstrat o comportare satisfăcătoare chiar la cutremure de mare intensitate. Se poate considera că în prezent, datorită investigațiilor experimentale (in situ și în laborator), informațiilor provenite din comportarea reală a construcțiilor în timpul cutremurelor și evoluției bazelor teoretice, există cunoștințe avansate cu privire la următoarele aspecte principale:

- Identificarea repartiției principalelor focare active și posibilitatea înregistrării instrumentale a mișcării seismice, la suprafața terenului, cu aparatură de înaltă tehnicitate.
- Comportarea materialelor, componentelor structurale și a unităților structurale de diverse configurații la acțiuni seismice intensive.
- Modelarea fizică, mecanică și matematică a structurilor de rezistență.
- Evaluarea răspunsului seismic la acțiunea cutremurelor reale sau simulate (sintetice) prin rezolvări parametrice, pe baza unor scenarii de comportare, utilizînd calculatoarele electronice.
- Cercetarea experimentală a materialelor, elementelor de rezistență și structurilor atît în laborator, cît și cu ocazia cutremurelor puternice.
- Elucidarea parțială a unor fenomene mai puțin cunoscute în trecut cum ar fi: comportarea postelastică a elementelor și structurilor, analiza spațială, influența amortizării, interacțiunea teren-structură, implicațiile condițiilor geologice locale etc.

Cu toată cantitatea mare de informație asupra fenomenelor seismice acumulată pînă acum, perioada de observație instrumentală este totuși prea scurtă (aprox. 5 decenii), iar cercetarea științifică a cutremurelor este încă relativ nouă. Din aceste motive chiar asigurarea actuală prin concepție, analiză și execuție, pe baza unor criterii și măsuri riguroase de protecție, este de multe ori incertă. În această privință, seismologia și ingineria seismică nu au rezolvat toate problemele referitoare la garantarea integrității unei construcții la acțiuni seismice de excepție. De altfel, fiecare cutremur care se produce în lume pune în evidență atît succesele cît și eșecurile, cu toate progresele importante înregistrate pînă în prezent.

Datorită dezvoltărilor urbane, specifice acestui secol, frecvența de apariție a unui cutremur puternic într-o zonă populată și industrializată este în continuă creștere. Se apreciază statistic că anual pe glob se produc în medie 10 cutremure violente cu consecințe sociale și economice importante, 100 de cutremure destul de puternice care produc daune relativ reduse și 1 000 de cutremure cu efecte moderate. În afara acestora se mai produc sute de mii de mișcări seismice mai slabe, majoritatea înregistrate numai instrumental sau semnalate în stațiile biologice de observație, dintre care puține sînt resimțite de oameni.

7.2. TERMINOLOGIE ȘI DEFINIȚII SPECIFICE SEISMOLOGIEI ȘI INGINERIEI SEISMICE

- *Accelerogramă* — înregistrarea mișcării seismice obținută cu un accelerometru calibrat și exprimată prin variația accelerațiilor.
- *Accelerometru* — instrument (aparat) specific înregistrării variației accelerațiilor unui cutremur (accelerograma seismică).
- *Adîncimea focală* (profunzimea focarului sau cutremurului) — distanța dintre focar și epicentru.
- *Alunecare de falie* — mișcare relativă a planurilor care definesc o falie.
- *Aluviune* — sedimente neconsolidate, de dată relativ recentă, existente în depozitele granulare.
- *Amplificare seismică* — fenomen care se manifestă în urma traversării undelor seismice prin diverse categorii de terenuri cu proprietăți fizico-mecanice și dinamice specifice.
- *Analiza răspunsului în timp* (time-history response) — reprezentarea răspunsului structurii (exprimat în deplasări, viteze sau în accelerații) pe timpul istoric al mișcării seismice (definită prin accelerograme).
- *Armonică* — componentă a unei mișcări cu caracter periodic și a cărei frecvență este un multiplu simplu al frecvenței fundamentale.
- *Atenuare* — disiparea (amortizarea) energiei eliberate în focar, în funcție de mai mulți factori, și a cărei consecință o reprezintă reducerea intensității seismice.
- *Bloc de falii* — grupare de roci aparținînd uneia sau mai multor falii.
- *Clase de focare* — clasificarea focarelor în funcție de adîncime: focare normale (0 ... 70 km), focare intermediare (70 ... 300 km) și focare profunde (300 ... 700 km).
- *Compactare-consolidare* — reducerea volumului depozitelor sedimentare și creșterea densității specifice.
- *Complex bazal* — roci metamorfice sau eruptive care definesc baza depozitelor sedimentare.
- *Contact geologic* — plan de separare dintre două roci cu caracteristici diferite.
- *Conținut de frecvență* — totalitatea frecvențelor componentelor care definesc o înregistrare seismică (a se vedea spectrul de amplitudine și transformata Fourier).
- *Compoziție spectrală* — este pusă în evidență de spectrul de amplitudine exprimat prin serii convergente sau transformata Fourier.
- *Cutremur de pămînt* — fenomen natural (uneori și artificial) generat de surse tranzitorii care se manifestă prin unde elastice ce se propagă prin medii caracterizate geologic.
- *Cutremur maxim așteptat* — cutremur de intensitate maximă care se poate produce într-o anumită zonă.
- *Cutremur posibil (probabil)* — cel mai puternic cutremur care poate să se manifeste statistic într-o zonă bine precizată și într-un interval de timp determinat.
- *Difracție* — diseminare energetică a energiei eliberată în focar.

● *Discontinuitate* — plan de separare între două formațiuni geologice cu proprietăți fizico-mecanice și dinamice pronunțat diferite.

● *Discontinuitatea Mohorovičič* (sau „Moho") — discontinuitate existentă în crusta continentală, situată la 30—40 km de suprafața liberă.

● *Dispersie* — variația continuă în timp a perturbației seismice.

● *Epicentru* — punct teoretic situat la suprafața liberă a terenului pe verticala focarului.

● *Eveniment microseismic* — perturbații slabe, naturale sau artificiale, care pot fi identificate numai instrumental.

● *Falie* — dislocarea unei zone din scoarța terestră ca urmare a unei ruperi, într-un anumit plan, în care se produce între roci o mișcare relativă.

● *Faliere* — fenomen însoțit de o mișcare relativă a rocilor adiacente unui plan de rupere.

● *Falie potențial activă* — falii existente la suprafața terenului, neidentificate, care pot deveni active în timpul unui cutremur puternic.

● *Focar* — punct teoretic situat în interiorul Pămîntului care reprezintă originea sursei energetice a unui cutremur; energia este eliberată radial mediului prin unde elastice de propagare (se mai numește hipocentru).

● *Forfecare* — alunecarea unei roci în raport cu alta, în lungul suprafeței de contact, produsă în urma depășirii rezistenței la forfecare în planul de separare.

● *Fractură* — dislocare rezultată în urma ruperii sau falierii rocilor.

● *Geologie* — ramură a științei care se ocupă în principal cu studierea structurii pămîntului, caracteristicilor rocilor componente, precum și cu modificarea acestora în timp.

● *Geologia locală a amplasamentului* — compoziția geologică specifică unui anumit amplasament, caracterizat printr-un depozit sedimentar.

● *Geomorfologie* — parte a geologiei în care se studiază configurația suprafeței Pămîntului, precum și variația în timp a acesteia.

● *Hidroseism* — perturbație seismică care se manifestă la nivelul suprafeței libere a apei.

● *Hipocentru* — sinonim focar.

● *Hologen* — perioadă geologică recentă, ulterioară epocii glaciale, corespunzătoare ultimilor 11 000 ani.

● *Impuls seismic* — undă seismică de foarte scurtă durată în raport cu desfășurarea întregului eveniment, avînd în general valorile inițială și finală egale cu zero.

● *Intensitate* — evaluarea convențională (subiectivă) a severității unui cutremur pe baza efectelor de suprafață produse asupra oamenilor, construcțiilor și configurației terenului.

● *Izoseistă* — locul geometric al tuturor punctelor, situate la suprafața liberă a terenului, a căror intensitate este aceeași (linie imaginară de separare a zonelor cu grade de intensitate seismică diferite).

● *Lichefiere* — fenomen în urma căruia un depozit granular necoeziv și saturat se transformă în stare fluidă datorită creșterii presiunii apei din pori.

● *Limită elastică* — efortul maxim la care este supusă o rocă fără ca deformațiile să depășească limita de curgere sau de rupere.

● *Litologie* — studiul compoziției și texturii rocilor.

● *Magnitudine* — exprimarea violenței unui cutremur prin intermediul energiei eliberată în focar în momentul declanșării unui șoc seismic.

● *Manta* — zonă terestră cuprinsă între crusta terestră și nucleul exterior (fig. 7.1).

● *Mediu vîsco-elastic liniar* — caracterizarea unui mediu în care legătura între tensiuni și deformații (precum și între derivatele temporale ale acestora) se poate exprima prin relații liniare.

● *Microseism* — perturbație naturală sau artificială, sesizată numai cu ajutorul instrumentelor specifice (înregistratoare seismice).

● *Mișcare puternică* (strong motion) — mișcare generată de cutremure și ale cărei efecte distructive se manifestă asupra oamenilor, construcțiilor și terenului.

● *Multiplet* — ansamblu de cutremure, asociate în timp și spațiu, ale căror magnitudini sînt comparabile.

● *Perioadă predominantă* — perioada corespunzătoare mișcării seismice care produce efecte maxime într-un amplasament bine definit, de la suprafața liberă a terenului.

● *Plan de stratificare* — suprafață de separare (discontinuitate) a stratelor din rocile sedimentare.

● *Răspunsul terenului* — caracterizarea mișcării seismice (exprimată în deplasări, viteze sau accelerații), într-un punct situat la suprafața liberă a terenului, prin înregistrări instrumentale.

● *Replică seismică* — sinonim cu șoc postseismic.

● *Rezistența terenului* — tensiunea limită care definește capacitatea portantă a terenului fără să se producă plastificări sau ruperi.

● *Rocă de bază* — sinonim cu complex bazal.

● *Rocă de bază seismică* — plan convențional care delimitează depozitele sedimentare superficiale, caracterizat prin viteza de propagare a undelor secundare $v_S = 750 \ldots 800$ m/s.

● *Roci sedimentare* — depuneri sedimentare stratificate constituite prin acumulări în timp.

● *Roi de cutremure* — ansamblu de evenimente seismice, cu pondere energetică aproximativ identică, care nu pot fi ierarhizate riguros.

● *Seismic* — termen caracteristic undelor elastice, naturale sau artificiale, care se propagă prin mediul geologic de la sursă pînă în orice punct de la suprafața liberă.

● *Seismicitate* — caracteristică seismică certă sau probabilă a unei anumite zone superficiale.

● *Seismograf* (seismometru) — instrument care permite înregistrarea undelor seismice.

● *Seismogramă* — înregistrarea mișcării seismice obținută cu un seismometru și care exprimă variația deplasărilor în timp.

● *Seismologie* — ramură a geofizicii care se ocupă cu studiul cutremurelor și propagării undelor seismice.

● *Set de falii* — asocierea mai multor falii paralele, situate în aceeași zonă.

● *Spectru* — caracterizarea acțiunii sau răspunsului în funcție de conținutul de frecvență al sursei perturbatoare.

● *Spectru de amplitudine* — reprezentarea grafică a relației amplitudine-frecvență corespunzătoare unei înregistrări seismice (se mai numește spectrul Fourier).

● *Spectru de răspuns* — reprezentarea grafică a valorilor maxime ale răspunsului (exprimat în deplasări relative, viteze relative sau accelerații absolute) corespunzătoare unui set de sisteme cu un singur grad de libertate dinamică (1 GLD) supus unei accelerații seismice, în funcție de perioada (sau frecvența) proprie neamortizată.

● *Strate neconsolidate* — depozite geologice superficiale sau de adîncime granulare, necoezive și de slabă consistență, avînd rezistența la forfecare redusă.

● *Stratificație* — formații de roci sedimentare stratificate prin planuri de separare.

● *Suprafața faliei* — suprafața planului de dislocare care definește o anumită falie.

● *Șoc postseismic* — cutremur ce urmează în general unui șoc mult mai puternic (șoc principal).

● *Șoc principal* — șocul seismic inițial de magnitudine maximă, în cazul unei serii de cutremure (cutremure multișoc).

● *Șoc seismic* — mișcare seismică puternică de scurtă durată.

● *Tectonica* — caracterizează rocile și natura deformărilor din punct de vedere structural.

● *Textură* — alcătuirea intimă, la nivel de particulă minerală, a rocilor.

● *Transformata Fourier* — transformarea unei funcții, exprimată în domeniul timp (cum este cazul înregistrărilor seismice), în domeniul frecvență, ceea ce permite identificarea conținutului de frecvențe ale mișcării seismice.

● *Tsunami* — unde seismice marine produse de cutremure tectonice sau erupții vulcanice.

● *Undă* — mișcare a particulelor materiale, cu caracter alternant, avînd amplitudini variabile și puncte nule fixe (numite și noduri), ca urmare a energiei eliberate în focar de cutremur.

● *Unde de suprafață* (superficiale) — unde de tip seismic care se manifestă în straturile superficiale perpendicular pe direcția de propagare. Aceste unde sînt de tip Rayleigh și Love sau hidrodinamice.

● *Undă principală „P"* — undă seismică de adîncime, longitudinală sau de dilatație, în care mișcarea particulelor materiale în timp coincide cu direcția de propagare a undei.

● *Undă secundară „S"* — undă seismică de adîncime, transversală sau de forfecare, în care mișcarea particulelor materiale în timp este perpendiculară pe direcția de propagare a undei.

● *Urma faliei* — dislocarea terenului la suprafața liberă ca urmare a apariției procesului de faliere.

● *Viscozitate* — proprietate fizică internă a mediului care generează forțe de amortizare în opoziție cu direcția mișcării de lunecare relativă. În cazul mediului liniar vîscos, forțele de opoziție sînt proporționale cu viteza de deformație.

● *Viteză seismică* — viteza de propagare a undelor seismice de tip P și S, notate prin v_P și v_S.

● *Zonă de falie* — asocierea mai multor falii într-o zonă restrînsă.

7.3. ORIGINEA ȘI CAUZA CUTREMURELOR DE PĂMÎNT. MECANISME DE GENERARE A MIȘCĂRII SEISMICE

Pămîntul, care se află într-o permanentă mișcare, posedă o structură internă destul de complicată care poate fi redusă schematic la modelul reprezentat în figura 7.1. În acest context, continentele se deplasează continuu și lent producînd modificări ale scoarței terestre în urma acumulărilor energetice în roci și erupțiilor vulcanice, generatoare de rupturi și prăbușiri de amploare în interiorul litosferei. Aceste fenomene se manifestă periodic în crusta terestră prin mișcări bruște și violente care sînt înregistrate la suprafața liberă a terenului sub forma cutremurelor de pămînt.

Cu privire la sursa care generează cutremure puternice se admit două categorii de mecanisme posibile de producere, și anume:

— *cutremure vulcanice* datorate erupțiilor vulcanice;

— *cutremure tectonice* datorate unor modificări structurale importante ale scoarței terestre (sînt însoțite de fenomene de rupere sau de faliere a rocilor).

Cele mai frecvente cutremure sînt de origine tectonică, iar energia pe care o eliberează se extinde pe zone întinse de la suprafața terestră. Șocul seismic se produce ca urmare a unei fracturări a rocilor care vin în contact într-un plan mai slab în care s-au acumulat în decursul timpului deformații elastice extrem de mari. Eliberarea bruscă a energiei de deformație, transformată instantaneu în energie cinetică, generează unde elastice care se propagă radial în toate direcțiile, iar prin procese de reflexie și refracție ajung la suprafața Pămîntului.

Punctul teoretic în care se produce ruptura inițială (în realitate există o zonă de fracturare) se numește *focar* sau *hipocentru*. Punctul situat la suprafața Pămîntului, pe verticala focarului, poartă denumirea de *epicentrul cutremurului*

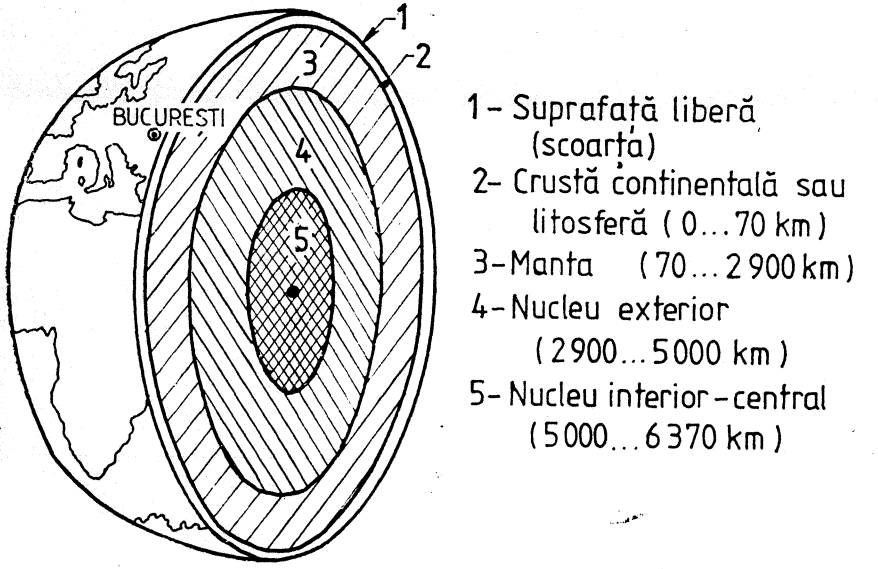


Fig. 7.1

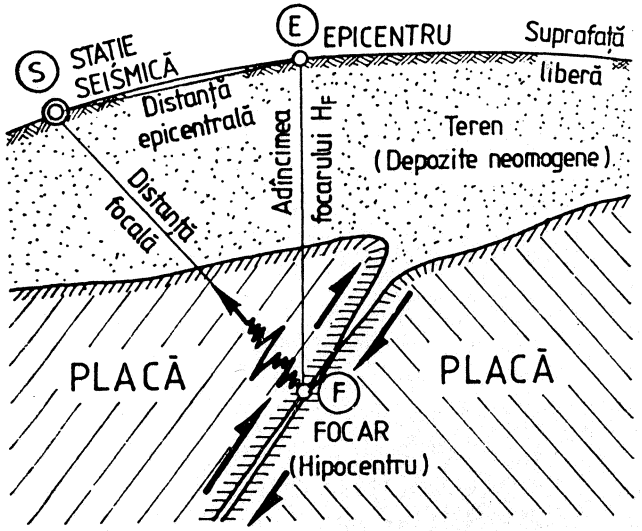


Fig. 7.2

(fig. 7.2). Localizarea poziției focarului și epicentrului se obține pe baza prelucrării înregistrărilor mișcării seismice în stații echipate cu aparatură specifică.

În funcție de poziția focarului (fig. 7.3), exprimată prin distanța H pînă la epicentru numită adîncime sau profunzime cutremurele se clasifică astfel:

— *Cutremure crustale (normale)*, avînd focarul situat pînă la 70 km adîncime, se află în limitele $0 \leqslant H_N \leqslant 70$ km. Aceste cutremure, care reprezintă peste 90% din cutremurele care se produc în lume, au o durată semnificativă relativ redusă, iar perioadele predominante specifice mecanismului de focar sînt în general scurte. Deși sînt extrem de violente, cutremurele crustale afectează zone destul de limitate de la suprafața Pămîntului. În această categorie se înscriu toate focarele care aparțin centurii circumpacifică, zonelor din Asia de sud-vest, bazinul mediteranean etc.

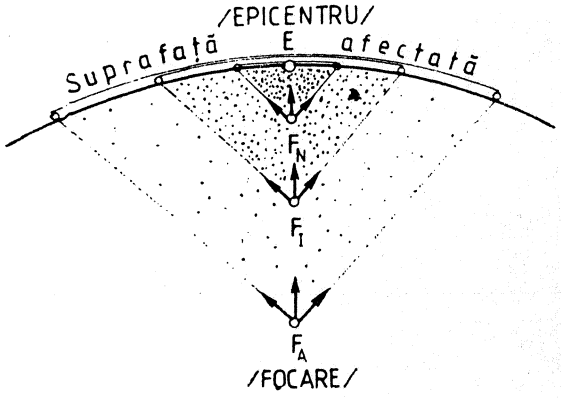


Fig. 7.3

— *Cutremure subcrustale (intermediare)* au focarul localizat în limitele $70 \leqslant H_I \leqslant 300$ km. Durata acestor cutremure este moderată, iar perioadele predominante mai lungi, în timp ce aria de manifestare este mult mai mare. Focare intermediare identificate pînă în prezent instrumental sînt destul de reduse ca număr, fiind situate în Afganistan, Columbia, Mexic și România. Perioadele de revenire ale cutremurelor intermediare sînt mult mai mari decît ale celor normale.

— *Cutremure de adîncime (de profunzime)* s-au semnalat în limitele $300 \leqslant H_A \leqslant 700$ km. Experiența acestor categorii de cutremure este mai redusă, existînd unele informații cu privire la durată (care este ceva mai mare) și la perioadele predominante care sînt lungi.

Din categoria cutremurelor normale fac parte cutremurele superficiale ale căror focare se află în imediata apropiere a scoarței terestre (Agadir—1960, Parkfield—1966, Taşkent—1966, Konya—1967 etc.), pînă la o adîncime de 6—8 km. Tabelul 7.1 conține adîncimea principalelor cutremure care s-au manifestat în acest secol.

În general cutremurele crustale au focarul situat deasupra suprafeței de discontinuitate Mohorovičič („Moho") care se află la o adîncime variabilă cuprinsă între 30 și 40 km.

Cutremurele tectonice au ca origine fie fenomenul de *faliere*, fie cel de *subducție* a plăcilor continentale.

Cutremurele violente generate de fractura rocilor din litosferă (crustă) se datoresc mișcărilor produse de alunecările în lungul unui plan de rupere, însoțite de eliberarea bruscă a unei energii imense. Aceste planuri de rupere se numesc *falii*, iar în momentul rupturii instantanee, capacitatea rocii respective a atins valoarea limită peste care nu mai este capabilă să mai acumuleze deformații elastice sau energie elastică de deformație (fig. 7.4). În general cutremurele se produc în lungul aceleiași falii, ceea ce caracterizează fenomenul de persistență a genezei mișcărilor seismice. Uneori faliile ar putea defini linia de contact dintre două plăci sau subplăci continentale sau oceanice. Faliile pot să rezulte printr-o alunecare înclinată, în care caz se produc mișcări în direcții opuse pe verticală sau oblice, sau printr-o alunecare verticală caracterizată prin mișcări laterale opuse (fig. 7.5). Cea mai mare falie activă din lume o reprezintă falia San Andreas din statul California, a cărei lungime este de circa 960 km. Cutremurul de la San Francisco din anul 1906 a fost determinat de o alunecare relativă a acestei falii de aproape 65 cm. Măsurători cu laser au arătat că după șocul din 1906 San Francisco s-a apropiat de Los Angeles cu 30 cm astfel încît, unii seismologi americani afirmă că peste 10 milioane de ani Los Angeles, prin deplasarea spre nord, va deveni vecin cu San Francisco, iar peste 60 milioane de ani va ajunge aproape de Alaska. Procese

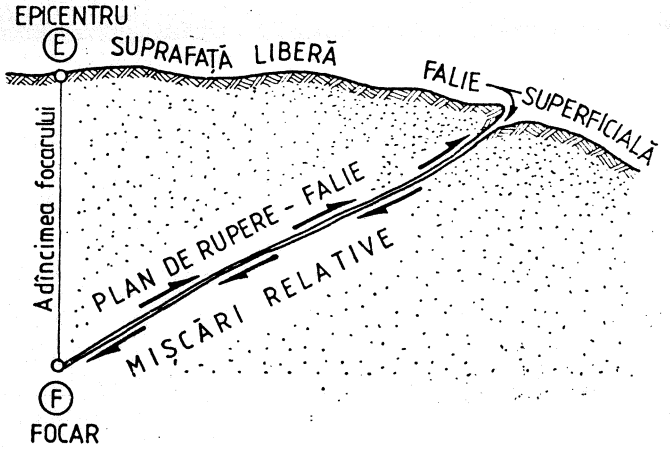


Fig. 7.4

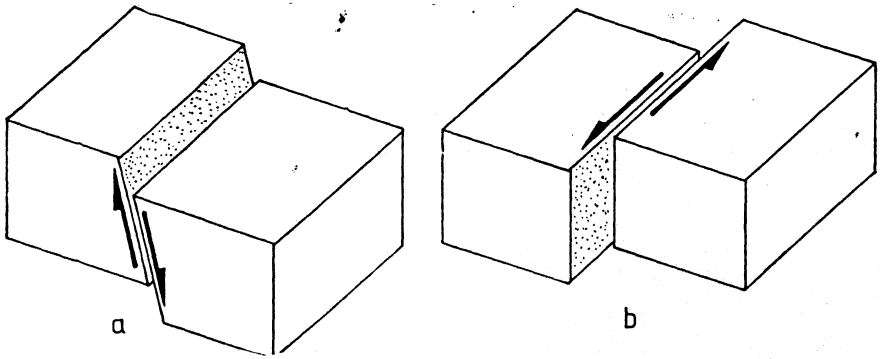


Fig. 7.5

importante de faliere, s-au produs în timpul cutremurelor din Chile (1960), Alaska (1964), California (1971) şi China (1976).

Teoria *plăcilor tectonice*, de dată mai recentă, susţine că prin comprimarea puternică, care se manifestă la contactul dintre plăcile continentale, se produc deplasări mari fie datorită cedărilor în urma strivirii rocilor, fie datorită fenomenului de subducţie (alunecarea relativă a unei plăci sub cealaltă).

Principalele plăci identificate pînă în prezent sînt următoarele: Euroasiatică (care trece prin România şi se află în contact direct cu subplăcile Moesică şi Intra-Alpină chiar în cotul Carpaţilor în zona Vrancea), Pacifică, Indo-Australiană, Americană, Caraibiană, Africană, Arabică, Antarctică etc. Teoretic există cel puţin 10 plăci gigantice, avînd grosimea de aproximativ 80 km, care plutesc pe mantaua semitopită a pămîntului, aflîndu-se într-o continuă mişcare (migrare). Prin teoria migrării plăcilor tectonice se poate explica formarea continentelor, reliefului şi vulcanilor (ca urmare a perforării anumitor platforme). Plăcile oceanice au o mişcare mai rapidă decît plăcile continentale. Astfel, placa Pacifică se mişcă cu circa 3 cm pe an mai mult decît placa Nord Americană, ceea ce ar putea explica dislocarea Californiei de Mexic şi apariţia golfului care se lărgeşte cu aproximativ 8 cm pe an. Unii seismologi consideră că falia San Andreas reprezintă marginea estică a platoului american, existînd tendinţa de desprindere a Californiei de continent. Situaţii oarecum similare s-au evidenţiat şi în Japonia datorită mişcării plăcii Pacificului şi tendinţei de fragmentare către zonele continentale din vest (Malaezia şi China).

7.4. DISTRIBUŢIA GEOGRAFICĂ A ZONELOR SEISMICE

Majoritatea focarelor corespunzătoare cutremurelor puternice sînt distribuite în lungul unor centuri definite pe suprafaţa terestră şi corespund unor subdiviziuni zonale ale globului pămîntesc (fig. 7.6). Cele mai importante zone sînt următoarele:

— *cordonul circumpacific*, cu numeroase ramificaţii, cuprinde Oceanul Pacific, America de Nord (Alaska şi California), Mexic, America Centrală (Nicaragua şi Guatemala), America de Sud (Columbia, Ecuador, Peru şi Chile — zona Anzilor Cordilieri), ramificîndu-se prin insulele Aleutine către coastele Asiei (Japonia, coastele Chinei şi Filipine) şi sud-est prin Malaezia, Polinezia, Noua Zeelandă atingînd insulele Fiji, Solomon, Noua Guinee, Caroline etc.;

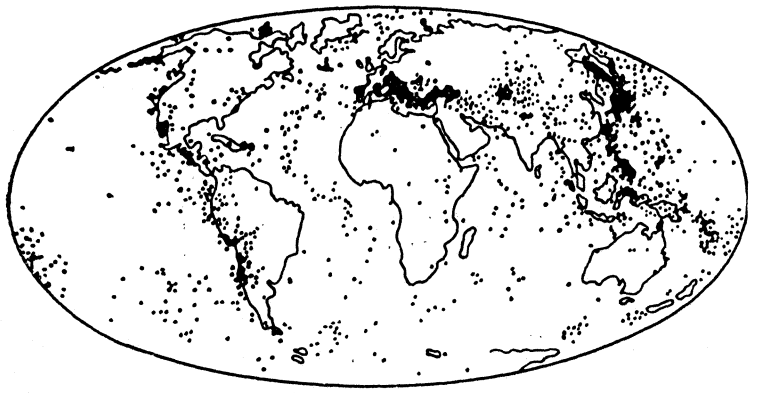


Fig. 7.6

— *cordonul alpid*, considerat ca unul din principalele ramuri ale centurii circumpacifice, începe din Burma spre nord-vest de arcul Himalaiei şi continuă spre vest trecînd prin Nepal, India de nord, Pakistan, Afganistan, Caucaz, Iran, Irak, Turcia, Grecia, Bulgaria, România, Iugoslavia, Italia (Sicilia), Spania, Algeria, Maroc pînă în insulele Azore;

— *zona Pamir-Baikal* din centrul Asiei;

— *centura din centrul Oceanului Indian* cu cîteva ramuri continentale;

— *zona bazinului central al Oceanului Pacific* cuprinzînd insulele Hawaii;

— *zone cu cutremure dispersate*.

Procentual, din totalitatea cutremurelor care se produc în lume, 80% provin din cordonul circumpacific, 15% din cordonul alpid, iar 5% din celelalte zone

7.5. SCURT ISTORIC. DESCRIEREA UNOR CUTREMURE SEMNIFICATIVE

Cutremurele de pămînt reprezintă fenomene naturale care au preocupat lumea încă din îndepărtatele timpuri ale istoriei, datorită efectelor distrugătoare, dar mai ales celor biologice. Cele mai vechi relatări istorice provenite din China şi care acoperă o perioadă de peste 3 000 de ani, reprezintă şi astăzi surse valoroase de informare. Toate documentele istorice existente, referitoare la localizarea regiunilor în care s-au manifestat în trecut cutremure puternice, contribuie la aprofundarea cunoştinţelor actuale, precum şi la identificarea unor zone seismice potenţial active. Cercetarea seismică bazată pe extrapolarea statistică a datelor istorice, necesară în activitatea actuală şi viitoare, trebuie interpretată cu multă precauţie avînd în vedere uniformitatea descrierilor, exagerările în aprecierea fenomenelor, subiectivitatea istoricilor, precum şi mentalitatea specifică epocilor respective cu privire la cauzele supranaturale ale cutremurelor. În anul 1950, sub auspiciile academiei de ştiinţe din China, a fost elaborat catalogul cutremurelor chineze, fiind substanţial îmbunătăţit în ediţia 1971. Acest catalog cuprinde 1323 de cutremure cărora li s-au stabilit coordonatele şi magnitudinile (selecţionate din circa 9000) începînd cu anul 1177 î.e.n. S-a ajuns la concluzia că pînă în prezent pe teritoriul Chinei continentale s-au produs circa 600 de cutremure cu magnitudinea peste 6, dintre care 18 de magnitudine egală sau mai mare ca 8. Se consideră că cel mai mare cataclism natural din istorie s-a produs în anul 1556 în regiu-

nea Shensi (circa 800 000 de victime), apreciindu-se că magnitudinea cutremurului pe scara Richter a fost de 8,3, iar adîncimea focarului de circa 24 km. Un alt cutremur devastator (circa 200 000 morți) s-a produs în regiunea Kansu la 16 decembrie 1920, avînd magnitudinea 8,6, deși în zona respectivă nu au mai fost semnalate cutremure de 280 ani. Ultimul cutremur nimicitor, asupra căruia se va reveni, a avut loc în regiunea Tangshan-Luanhsien din China (1976).

Un cutremur de mari proporții s-a produs în estul Mării Mediterane (21 iulie 365) și care s-a manifestat pe o arie de peste 2 milioane km², cuprinzînd toate țările mediteraneene situate între Sicilia și Siria, distrugînd multe orașe identificate prin cercetări arheologice. Cutremure deosebit de puternice, adevărate cataclisme, sînt menționate istoriografic în Orientul Mijlociu (Irak, Siria și Liban), în Iran, Afganistan, Pakistan și India.

Cercetările arheologice efectuate în insula Santorin (la nord de insula Creta) de echipe grecești și internaționale, au condus la concluzia că în această insulă, parțial scufundată, a avut loc în jurul anului 1500 î.e.n. explozia unui vulcan, care a produs un mare cataclism, făcînd să dispară civilizația minoică, orașe înfloritoare și o serie de insule din Marea Egee. S-a emis chiar ipoteza că Atlantida, continentul descris de Platon în „Dialoguri", ar fi fost o insulă în Marea Egee care ar fi dispărut în urma cutremurului generat de explozia vulcanului.

Cutremure de mare intensitate s-au semnalat la începutul erei noastre în insulele Cipru și Rodos, precum și în podișul Anatoliei.

În anul 1157, Siria a fost devastată de unul din cele mai puternice cutremure din Orientul Mijlociu, iar în anul 1320 a fost distrusă complet capitala Armeniei.

Pînă la începutul acestui secol, dintre cele mai puternice cutremure, care au produs victime omenești și importante pagube materiale, se menționează:

— 1730, Hokkaido — Japonia (137 000 de dispăruți);

— 1.XI.1755, Lisabona — Portugalia (15 000 case distruse și 60 000 de dispăruți);

— 5.II.1783, Calabria — Italia (50 000 dispăruți în timpul cutr murului și în urma epidemiilor);

— 1797, Quito — Ecuador (40 000 de dispăruți);

— 25.XII.1884, Analucia — Spania (cca 20 000 case distruse sau avariate și 1000 de dispăruți);

— 10.X.1891, Mino Owari — Japonia (aprox. 200 000 case distruse, 7 000 de dispăruți și 17 000 răniți);

— 12.VI.1897, Assam — India, unul dintre cele mai puternice cutremure din analele seismologiei moderne (distrugeri pe o suprafață de 75 000 km²).

Cutremure de mare intensitate au fost înregistrate documentar în statul California, în anii 1800 (San Francisco), 1812 (San Juan și New Madrid), 1857 (Fort Tejon), 1872 (Owens Valley) și 1899 (San Jacinto). Zona cea mai expusă cutremurelor o reprezintă coasta Pacificului unde imensa falie San Andreas, care caracterizează fenomenul de persistență a genezei mișcărilor seismice, reprezintă limita dintre placa crustală vestică-oceanică și placa crustală estică-continentală ale căror mișcări sînt contradictorii și depind de procesele tectonice ce se manifestă în mantaua globului terestru. În cazul cutremurelor californiene din această perioadă, numărul victimelor și al pagubelor materiale a fost redus datorită faptului că densitatea populației era scăzută, iar majoritatea construcțiilor, tipic americane, erau executate din lemn.

În privința cutremurelor care s-au manifestat în acest secol, numite și „cutremure moderne", în tabelul 7.1 sînt prezentate selectiv cele mai semnificative, avîndu-se în vedere proporțiile dezastrelor produse, învățămintele rezultate în confruntarea dintre opera umană și fenomenele naturii și informațiile instrumentale pe care le-au furnizat în folosul progresului seismologiei în general și al ingineriei seismice în special.

Primul cutremur de amploare al acestui secol s-a manifestat la 18 aprilie 1906 în *San Francisco — California*, afectînd și localitățile Santa Rosa și San José. Dezastrul s-a soldat cu 700 de victime și distrugerea în proporție de 90% a orașului San Francisco ca urmare a unei alunecări puternice în lungul faliei San Andreas și în special a incendiului care a durat trei zile.

Cutremure catastrofale, neînregistrate instrumental, au devastat *Messina — Italia* la 28 decembrie 1908 (83 000 dispăruți), precum și regiunea *Kanto — Japonia*, la 1 septembrie 1923, producînd pagube imense în orașele *Tokyo* (situat la 104 km de epicentru) și *Yokohama* (la 40 km de epicentru), evaluate la aproximativ 150 000 dispăruți, 100 000 răniți, 250 000 edificii distruse complet sau parțial și 450 000 construcții incendiate. La 29 februarie 1960 cutremurul din *Agadir-Maroc* a provocat moartea unui număr de 12 000 de persoane, 12 000 au fost rănite (la o populație de 33 000 de locuitori), iar peste 50% din clădiri au fost prăbușite.

O serie de cutremure, generate de un mecanism de focar particular, au avut loc în *Chile* în zilele de 21 și 22 mai 1960. După șocul inițial de magnitudine $M = 7{,}5$, au urmat alte postșocuri avînd $M = 6{,}5 \ldots 7{,}6$, iar la 22 mai un șoc maxim de magnitudine $M = 8{,}5$, cele mai afectate fiind orașele *Valdivia* (intensitatea Mercalli-Modificată $MM = 10$), *Puerto Montt* ($MM = 8-11$), *Rio Negro* ($MM = 8-9$) și *Conception* ($MM = 8$). Daunele acestui cutremur s-au estimat la 1 123 morți, 588 dispăruți, 258 răniți grav, 58 700 construcții distruse și peste 100 000 avariate. Un cutremur care a suscitat numeroase analize seismologice și inginerești a fost cel produs în zona *Prince William Sound — Alaska* la 27 februarie 1964 care a produs imense modificări ale configurației scoarței terestre, alunecări masive de pămînt, fenomene de lichefiere și apariția unei falii de mari proporții (600 km lungime). Cu toată violența șocului seismic ($M = 8{,}4$), datorită densității relativ scăzute a populației și protecției antiseismice asigurată majorității construcțiilor, numărul victimelor a fost de numai 125, dintre care 8 în orașul *Anchorage*, situat la cca 130 km de epicentru. La amploarea daunelor provocate de acest cutremur (evaluate la aprox. 22 miliarde dolari), au contribuit și numeroasele replici, peste 7 500, unele din acestea avînd magnitudini $M > 6$. Cel mai catastrofal seism din America de Sud s-a produs în zona *Chimbote — Peru* la 31 mai 1970, cu focarul situat în Oceanul Pacific la o adîncime de 25 km, și ale cărui consecințe au constat în 70 000 de victime, 50 000 de răniți și 186 000 locuințe integral distruse.

În continuare, se vor prezenta trei cutremure instrumentale, cărora li s-au consacrat numeroase studii de specialitate și care, în urma investigațiilor efectuate, au contribuit la progresul cunoștințelor de inginerie seismică prin informațiile obținute.

● *Niigata — Japonia*, 16 iunie 1964. Focarul acestui cutremur a fost situat în Marea Japoniei la o adîncime $H = 40$ km (fig. 7.7). Severitatea mișcării a fost caracterizată prin magnitudinea Richter $M = 7{,}5$ și intensitatea maximă pe scara Mercalli Modificată $MM = \text{VIII}$, în timp ce accelerațiile maxime au avut valori de 400 cm/s² în localitatea Atsumi (în vecinătatea epicentrului) și de 190 cm/s² în Niigata. S-au înregistrat mai multe replici de magnitudine $M \leqslant 6{,}0$ cu adîncimi de focar $H = 10 \ldots 40$ km. Terenul unde se găsește orașul Niigata, pe coasta Mării Japoniei, reprezintă un depozit aluvionar

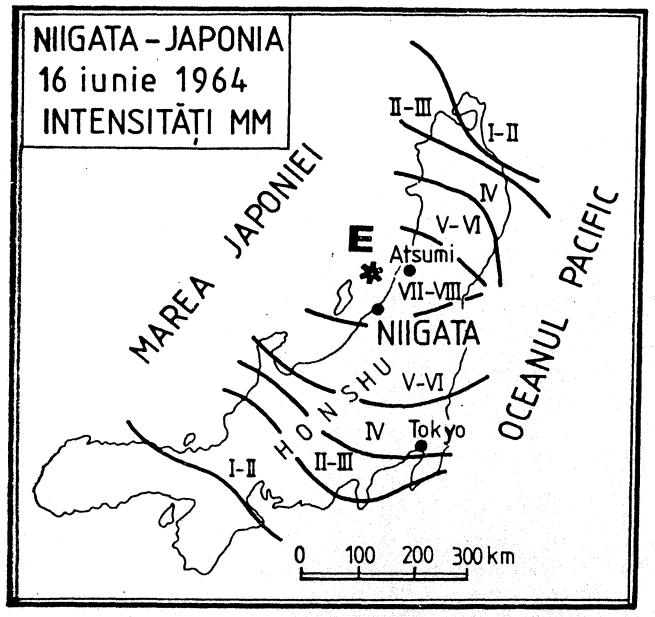


Fig. 7.7

alcătuit din sedimente marine, de grosime variabilă pînă la 30 m. Datorită densității reduse a nisipului granular saturat, s-au manifestat puternice fenomene de lichefiere, de tasare și prăbușire a terenului, formîndu-se rupturi superficiale și cratere. În figura 7.7 este redată harta izoseistelor acestui cutremur, exprimată în scara MM prin transformarea scării japoneze de intensitate seismică (JSI), din care rezultă o extindere destul de pronunțată a efectelor produse ca urmare a caracteristicilor particulare ale mișcării seismice și ale condițiilor geologice locale. Daunele cele mai pronunțate s-au semnalat pe o rază de circa 60 km față de focar și au constat în 26 pierderi de vieți omenești, 447 răniți, 2 130 de edificii distruse, 6 240 serios avariate, 31 240 ușor avariate, 300 incendiate și 15 350 inundate.

● *San Fernando — California*, 9 februarie 1971. Principalele caracteristici ale mișcării au fost următoarele: adîncimea focarului $H = 13$ km, magnitudinea $M = 6{,}6$, intensitatea maximă $MM = \text{XI}$ și accelerația maximă 1 148 cm/s² ($> \lg$) înregistrată la stația seismică instalată lîngă barajul Pacoima situat la circa 4 km de epicentru (munții San Gabriel). Postșocurile înregistrate au avut magnitudini $M \leqslant 5{,}1$. Mișcarea seismică a fost puternic amplificată datorită existenței unui bazin aluvionar superficial (care se sprijină pe o rocă de granit) compus din sedimente neomogene de nisip granular foarte fin, nisip și pietriș, spărturi de rocă de dimensiuni mari și a căror consistență este variabilă. De asemenea s-au identificat intercalații de argilă expansibilă și prezența pînzei de apă freatică destul de apropiată de nivelul terenului. San Fernando este practic o suburbie a orașului Los Angeles în care densitatea populației este ridicată (peste 7 milioane de locuitori). Cutremurul s-a manifestat cu violență pe o arie destul de limitată, producînd deformări ale terenului (fisuri, crăpături și falii), precum și avarierea multor construcții, în special în valea San Fernando. Harta cu izoseistele acestui cutremur este

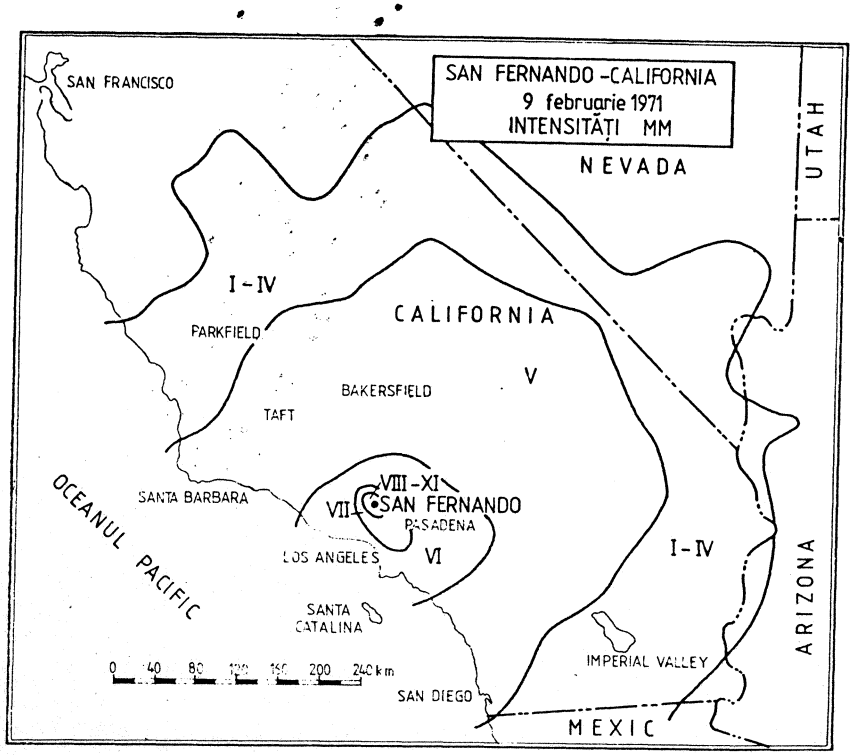


Fig. 7.8

dată în figura 7.8. Pagubele provocate au fost relativ limitate, înregistrîndu-se 58 de victime, circa 2 500 de răniți și 3 109 construcții avariate. Cutremurul de la San Fernando reprezintă unul din cutremurele californiene de excepție după cele din San Francisco (1906) și Imperial-Valley — El Centro (1940).

● *Tangshan — China*, 28 iulie 1976. Acest cutremur a fost unul dintre cele mai catastrofale din istoria omenirii prin consecințele sale tragice. Cutremurul cu focarul situat la o adîncime $H = 12-16$ km chiar sub orașul Tangshan a avut magnitudinea $M = 7{,}8$, intensitatea maximă $MM = \text{XI}$, fiind înregistrat în stații seismice la distanțe destul de mari față de epicentru (peste 150 km) cum ar fi Beijing (157 km). La proporțiile dezastrului au contribuit și cele două cutremure care au urmat de magnitudine $M = 6{,}5$ (după circa 3 ore și jumătate) și $M = 7{,}1$ (după circa 15 ore) cu epicentrul în apropierea orașului Luanhsien la 70 km nord de Tangshan. Cu toată poziția superficială a focarului, cutremurul s-a resimțit pe o suprafață enormă de $3{,}8 \cdot 10^6$ km² din care 27,5 km² — $MM = \text{XI}$, 367 km² — $MM = \text{X}$, 1 800 km² — $MM = \text{IX}$, 7 270 km² — $MM = \text{VIII}$ și 33 000 km² — $MM = \text{VII}$, așa cum rezultă din harta cu izoseiste din figura 7.9. Geologia locală a orașului Tangshan pune în evidență un depozit de aluviuni sedimentare slabe și afînate, alcătuite din nisip, pietriș nisipos și pietriș, avînd grosime variabilă de la 20 m în partea centrală a orașului pînă la 100—200 m în zonele periferice. Viteza de propagare a undelor secundare (de forfecare) s-a estimat la $v_s = 200-300$ m/s. Nivelul apelor subterane se află în apropierea suprafeței

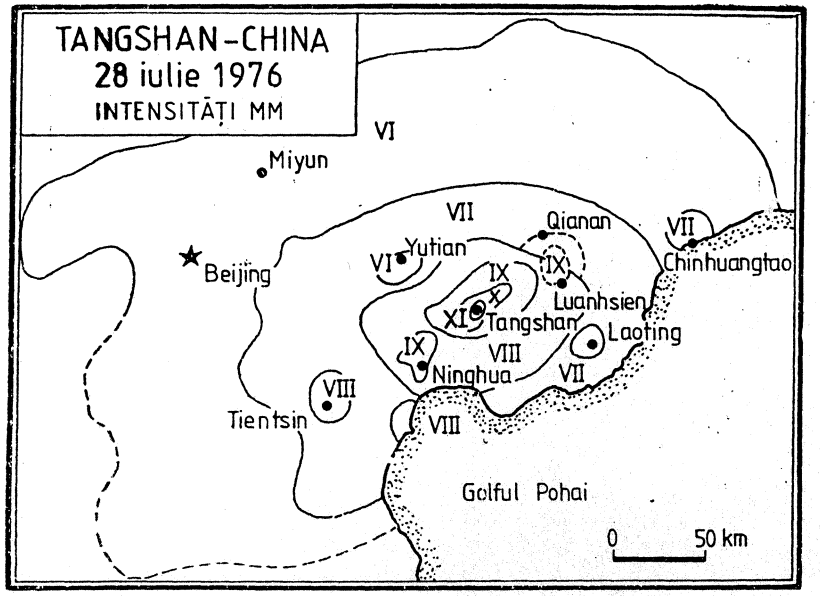


Fig. 7.9

libere încît s-au înregistrat fenomene de lichefiere pe o suprafață de circa 24 000 km². S-au constatat schimbări topologice superficiale, fisuri, crăpături și falieri multiple. Din datele publicate reiese că în acest dezastru și-au pierdut viața 655 237 de persoane, 779 000 au fost rănite (din care 79 000 în stare gravă), iar peste 75% din construcțiile din Tangshan au fost distruse. Se consideră că această calamitate este o consecință a faptului că riscul seismic din regiunea Tangshan nu a fost în mod corespunzător evaluat. Datele statistice chinezești arată că în ultimii 160 de ani, în nordul Chinei s-au produs 6 cutremure cu magnitudine $M \geqslant 7{,}0$ și peste 20 cu $M = 6 - 6{,}9$.

7.6. DEFINIREA MIȘCĂRII SEISMICE

7.6.1. Principalele caracteristici ale mișcării seismice care se manifestă la suprafața liberă a terenului

Datorită complexității fenomenelor seismice, identificarea calitativă și cantitativă a tuturor factorilor care caracterizează mișcarea seismică de la suprafața liberă a terenului reprezintă o problemă extrem de dificilă, fără a fi încă elucidată complet. Cunoștințele actuale de seismologie și inginerie seismică au permis totuși să se stabilească principalele caracteristici ce definesc parametrii mișcărilor seismice și care se manifestă într-un amplasament superficial bine determinat, și anume:

- *Mecanismul de focar* caracterizat geometric, cinematic și dinamic prin adîncimea focarului, directivitatea undelor, conținut de frecvențe (compoziție spectrală), durată, efecte multiple etc.

- *Proprietățile geologice ale mediului de propagare* a undelor seismice de la focar la suprafața Pămîntului.
- *Distanța epicentrală* a amplasamentului.
- *Proprietățile geomorfologice ale terenului* din amplasament (inclusiv caracteristicile fizico-mecanice și dinamice — perioade predominante).
- *Focalizarea, filtrarea, atenuarea sau amplificarea* undelor seismice de la roca de bază pînă la suprafața liberă a terenului.
- *Severitatea mișcării seismice*, exprimată prin accelerația maximă (inclusiv configurația înregistrării), intensitate sau magnitudine.
- *Mărimea suprafeței afectate de cutremur.*

Există numeroase situații cînd după șocul principal au urmat o serie de șocuri postseismice (replici) semnificative care, în general, sînt inferioare ca intensitate șocului inițial. Intensitatea și distribuția șocurilor posterioare sînt în directă dependență cu amploarea deformărilor pe care le-au suferit rocile înaintea declanșării cutremurului. Astfel, după șocul principal de la San Fernando (9 februarie 1971, $M = 6{,}6$ și $MM \leqslant$ XI) au urmat o serie de replici cu distribuție restrînsă în zona San Fernando Valley. În cazul cutremurului din Chile care a afectat sever orașele Valdivia, Conception, Puerto Montt și Rio Negro, șocul inițial (21 mai 1960) a avut magnitudinea $M = 7{,}5$ după care au urmat alte șocuri cu magnitudini $M = 6{,}5 \ldots 7{,}6$ pentru ca șocul cel mai puternic (22 mai 1960) să aibă magnitudinea $M = 8{,}5$, iar intensitatea $MM \leqslant$ XI, replicile răspîndindu-se pe o zonă mult mai vastă. La cutremurul de la Tangshan — China (28 iulie 1976) șocul principal a avut magnitudinea $M = 7{,}8$ ($MM \leqslant$ XI) ca după un interval de cca 15 ore să se producă două postșocuri (replici) de magnitudine $M = 6{,}5$ și $M = 7{,}1$. O manifestare particulară a avut evenimentul seismic din România de la 4 martie 1977 [138] considerat unicat pe plan mondial, datorită caracterului multișoc pe care l-a avut. Într-adevăr în interval de 19,2 s s-au produs un preșoc ($M = 5{,}0$) și alte trei șocuri consecutive S_1 ($M = 6{,}5$), S_2 ($M = 6{,}5$) și S_3($M = 7{,}2$) avînd o arie de răspîndire foarte restrînsă.

Șocurile posterioare devin cu atît mai periculoase cu cît intensitatea lor devine comparabilă cu cea a șocului inițial sau mai mare. Dacă în analizele de protecție antiseismică nu s-a ținut seama de asemenea situații posibile, efectele distructive de suprafață devin majore.

7.6.2. Înregistrarea mișcării seismice. Unde de propagare

Mișcarea terenului produsă de acțiunea cutremurelor, într-un anumit punct situat pe suprafața unui amplasament dat, să determină cu aparate moderne de înregistrare numite *seismometre* sau *accelerometre*. Echipamentele specifice stațiilor seismice permit înregistrarea simultană a trei componente ale mișcării, două situate în plan orizontal și a treia pe verticală. Variația deplasărilor în timp se obține prin intermediul seismogramelor care prezintă un interes deosebit în cercetările seismologice. Accelerogramele, care redau variația accelerațiilor în timp, specifice scopurilor inginerești, se obțin cu ajutorul accelerometrelor calibrate la un anumit nivel de intensitate seismică. Un aparat seismic reprezintă un sistem cu un singur grad de libertate dinamică care înregistrează răspunsul acestuia la perturbațiile provenite din deplasarea bazei, ca urmare a mișcării terenului (v. § 2.7).

Primul seismometru modern a fost realizat în anul 1931, iar prima înregistrare instrumentală a unei mişcări puternice a fost obţinută în timpul cutremurului din Long Beach — California ($M = 6{,}3$ şi $MM \leqslant$ IX) la 10 martie 1933.

Înregistrările seismometrice furnizează informaţii importante asupra mecanismului de producere a cutremurelor, precum şi asupra localizării focarului şi epicentrului. Accelerogramele reprezintă una din componentele fundamentale în studiile de inginerie seismică întrucît definesc răspunsul structural şi în general comportarea construcţiilor pe timpul cutremurelor de mare intensitate. Prima accelerogramă semnificativă din istoria ingineriei seismice a fost înregistrată în staţia seismică El Centro — California (18 mai 1940) în timpul puternicului cutremur din zona Imperial Valley ($M = 6{,}5-7{,}1$ şi $MM \leqslant$ X).

Energia eliberată brusc din focar în momentul producerii unui dezechilibru tectonic se propagă în toate direcţiile sub forma unor unde elastice, denumite *unde seismice*. Aceste unde sînt de două categorii:

— *unde de adîncime* care pot fi de tip longitudinal sau de dilataţie (numite *unde primare* P), şi de tip transversal sau de forfecare (numite *unde secundare* S);

— *unde superficiale*, de tip Raylegh R şi Love Q şi unde lungi L.

Undele seismice de adîncime se produc în interiorul Pămîntului şi se transmit din focar spre suprafaţa liberă a terenului. Vitezele de propagare ale acestor unde, depinzînd de caracteristicile geologice ale mediului, cresc cu adîncimea (tabelul 7.2).

TABELUL 7.2

ZONA	ADÎNCIMEA km	v_P km/s	v_S km/s
Crusta superficială	0 ... 5	0,4 ... 5	0,2 ... 3
Crusta continentală	5 ... 70	5 ... 8	3 ... 4,5
Discontinuitatea „Moho"	30 ... 40	~7	~4
Mantaua	70 ... 2 900	8 ... 13,5	4,5 ... 8
Nucleul exterior	2 900 .... 5 000	8 ... 9,5	—
Nucleul interior	5 000 ... 6 370	9,5 ... 11,5	—

În cazul undelor P, particulele materiale oscilează în direcţia propagării, iar în cazul undelor S, într-un plan perpendicular pe direcţia propagării. Întrucît direcţia de propagare devine aproape verticală în vecinătatea suprafeţei libere a terenului, *undele S (transversale) produc cele mai importante efecte inerţiale asupra construcţiilor.*

Amplitudinile mişcării terenului scad pe măsura depărtării de epicentru, dar pot creşte de la roca de bază pînă la suprafaţă în cazul depozitelor geologice aluvionare şi afînate, întrucît energia corespunzătoare perioadelor scurte se disipează, iar energia componentelor cu perioade lungi devine predominantă, avînd în vedere şi rolul de filtru dinamic pe care îl are mediul superficial de propagare.

O influenţă importantă asupra efectelor produse de mişcarea seismică o are *configuraţia mişcării înregistrate* (exprimată în termenii deplasărilor, vitezelor sau acceleraţiilor), precum şi *durata semnificativă* a evenimentului seismic.

7.6.3. Durata semnificativă a unui cutremur distructiv

Există numeroase cercetări elaborate în legătură cu definirea duratei semnificative a unui cutremur puternic. În unanimitate se consideră însă că factorii cei mai importanţi de care depinde durata semnificativă sînt următorii:

— severitatea mişcării seismice descrisă prin magnitudine, acceleraţia maximă, intensitatea spectrală Housner, intensitatea Arias, intensitatea MM sau MSK etc.;

— mecanismul de focar;

— compoziţia spectrală (conţinut de frecvenţă);

— distanţa sursă-amplasament sau distanţa epicentrală;

— caracteristicile geologice ale mediului de propagare, precum şi ale depozitului superficial (inclusiv adîncimea).

După B. A. Bolt [30], durata se defineşte prin timpul semnificativ descris de o accelerogramă, cuprins între prima şi ultima modificare a acceleraţiei corespunzătoare unui anumit nivel prestabilit (de exemplu 0,05 g).

În general durata semnificativă a unei mişcări seismice creşte cu cît magnitudinea este mai ridicată, terenul din straturile superficiale este mai slab şi distanţa pînă la sursă devine mai mică. În figura 7.10 se prezintă variaţia aproximativă a duratei semnificative în funcţie de magnitudine sintetizată de R. Dobry, I. M. Idriss şi E. Ng [56].

Cu toate că durata semnificativă a mişcării seismice scade cu distanţa epicentrală, s-a constatat că în depozitele sedimentare, aluvionare, situate la distanţe epicentrale destul de mari, aceasta poate să crească. O influenţă decisivă asupra duratei o au compoziţiile undelor de adîncime P şi S, precum şi ale celor superficiale Rayleigh şi Love. Este evident că în cazul unui cutremur cu durată semnificativă mai lungă efectele distructive de suprafaţă vor fi mai severe. Tabelul 7.1 cuprinde duratele semnificative ale unor cutremure, aşa cum rezultă din literatura de specialitate. Acestei probleme fundamentale în ingineria seismică i-au fost consacrate în ultimii ani importante studii şi cercetări [58], [80], [87], [189], [197].

7.6.4. Acceleraţia mişcării terenului

Descrierea reală a unui cutremur din punct de vedere ingineresc, într-un anumit amplasament, se obţine prin înregistrarea acceleraţiilor pe trei direcţii ortogonale, în timpul istoric al desfăşurării evenimentului seismic. Cunoaşterea înregistrării componentelor de translaţie, două orizontale şi una verticală, este suficientă pentru evaluarea efectelor cutremurelor asupra construcţiilor curente. În cazul structurilor speciale, de mare zvelteţe, pot interveni şi componentele rotaţionale ale mişcării.

În cercetările seismologice din ultimele decenii s-au făcut numeroase tentative de a se stabili o legătură directă între acceleraţia mişcării unui anumit

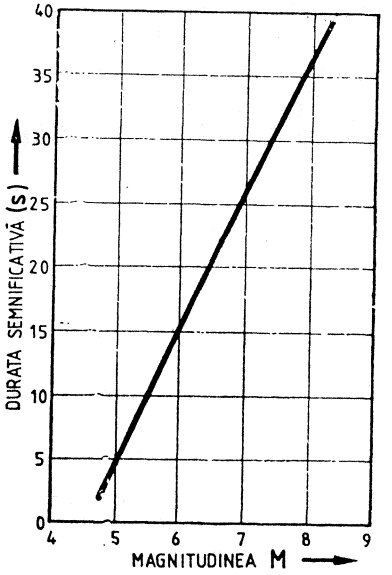


Fig. 7.10

punct de pe suprafața liberă a terenului și mecanismul de focar, distanța epicentrală, orientarea față de epicentru, magnitudinea cutremurului, caracteristicile geologice generale ale mediului de propagare, caracteristicile geologice locale ale amplasamentului etc. [46], [58], [78], [136], [174]. Toate relațiile de legătură propuse au un caracter exclusiv aproximativ, avînd în vedere variația aleatoare a majorității factorilor care intervin, iar utilizarea lor practică

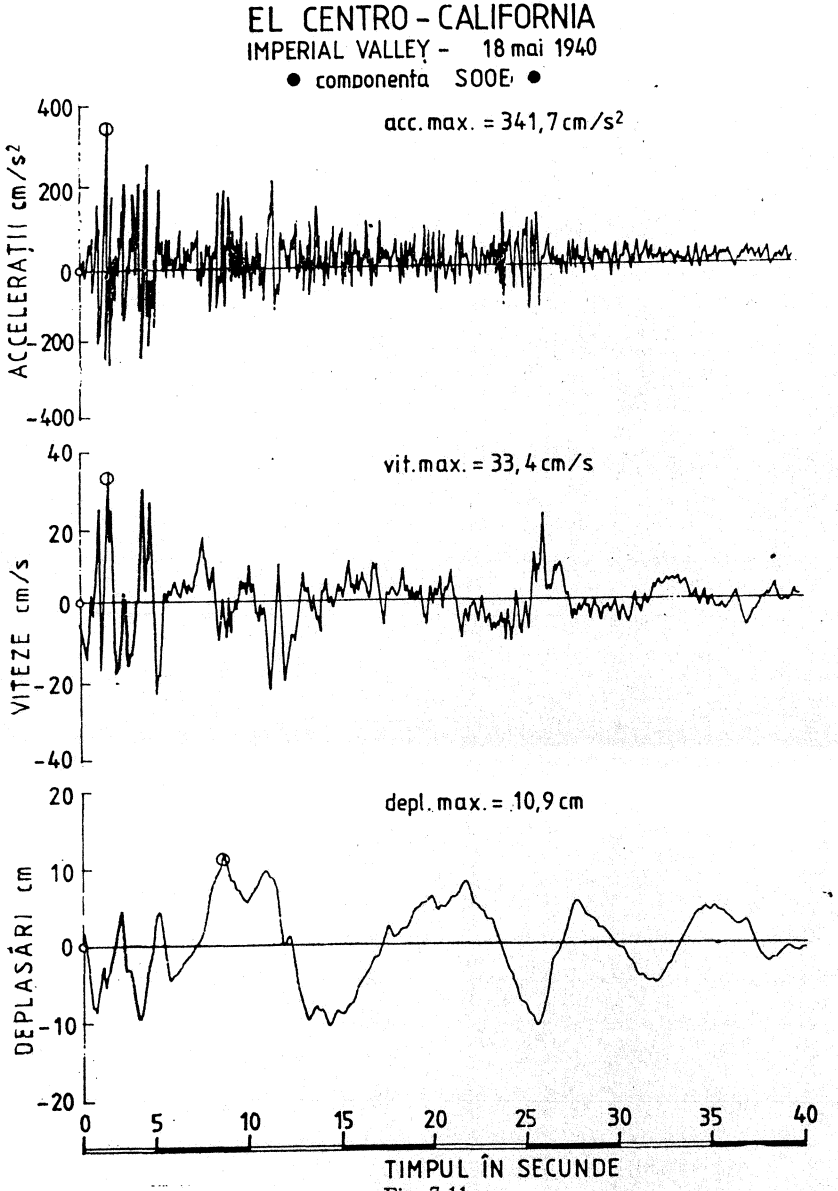


Fig. 7.11

rămîne sub semnul incertitudinilor. S-a constatat, de exemplu, că în vecinătatea faliilor, componenta orizontală a accelerațiilor pe direcția de alunecare este mult mai mare decît componenta perpendiculară pe linia de faliere (Parkfield — California 1966, Managua — Nicaragua 1972 etc.).

Trebuie subliniat însă faptul că valoarea maximă a accelerației, care se consideră de obicei de bază în proiectarea antiseismică a structurilor, reprezintă un criteriu relativ de estimare a severității unui cutremur. În acest sens, este necesar să se aibă în vedere nivelul mediu al tuturor accelerațiilor în timp al înregistrării, durata semnificativă a mișcării distructive, compoziția spectrală și configurația accelerogramei, numărul valorilor maxime în timpul istoric al desfășurării evenimentului seismic, precum și directivitatea acțiunilor maxime (direcția dominantă a cutremurului).

Pentru exemplificare au fost selecționate accelerogramele unor cutremure semnificative, prin particularitățile pe care le conțin, pe baza cărora s-au determinat variațiile vitezelor și deplasărilor.

În figura 7.11 este redată componenta S00E a primului cutremur puternic din zona Imperial Valley—California (1940) și înregistrat în stația seismică El Centro, care constituie una din mișcările instrumentale reprezentative pentru progresul ingineriei seismice din ultimele decenii. Componenta N44E înregistrată în stația seismică Ferndale, în timpul cutremurului din zona Eureka—California (1954), prezintă interes prin similitudinea compoziției sale spectrale cu cea a cutremurului înregistrat în București la 4 martie 1977 (fig. 7.12).

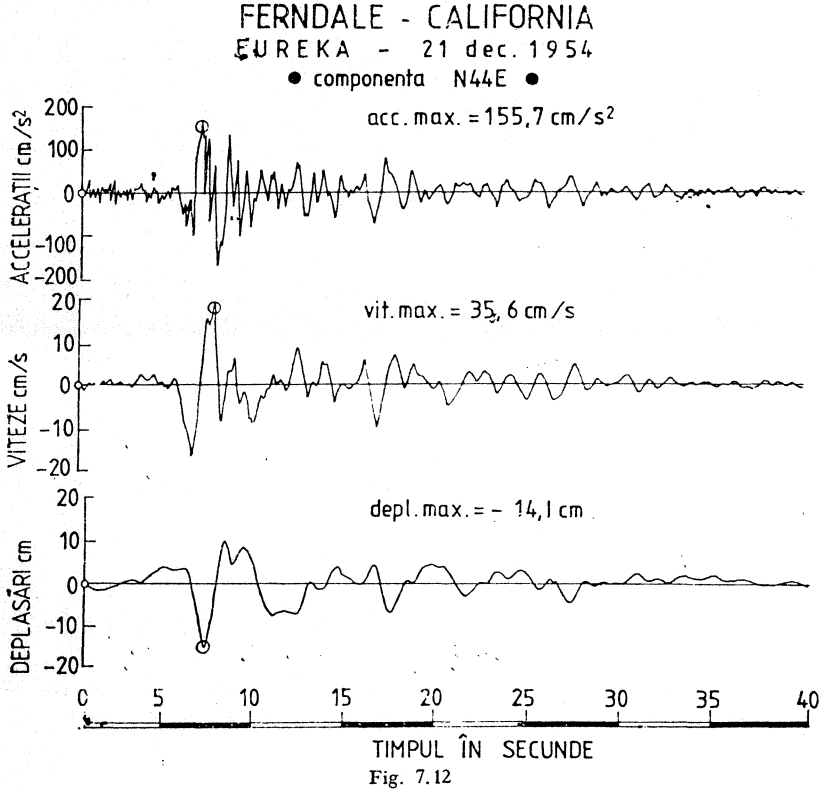


Fig. 7.12

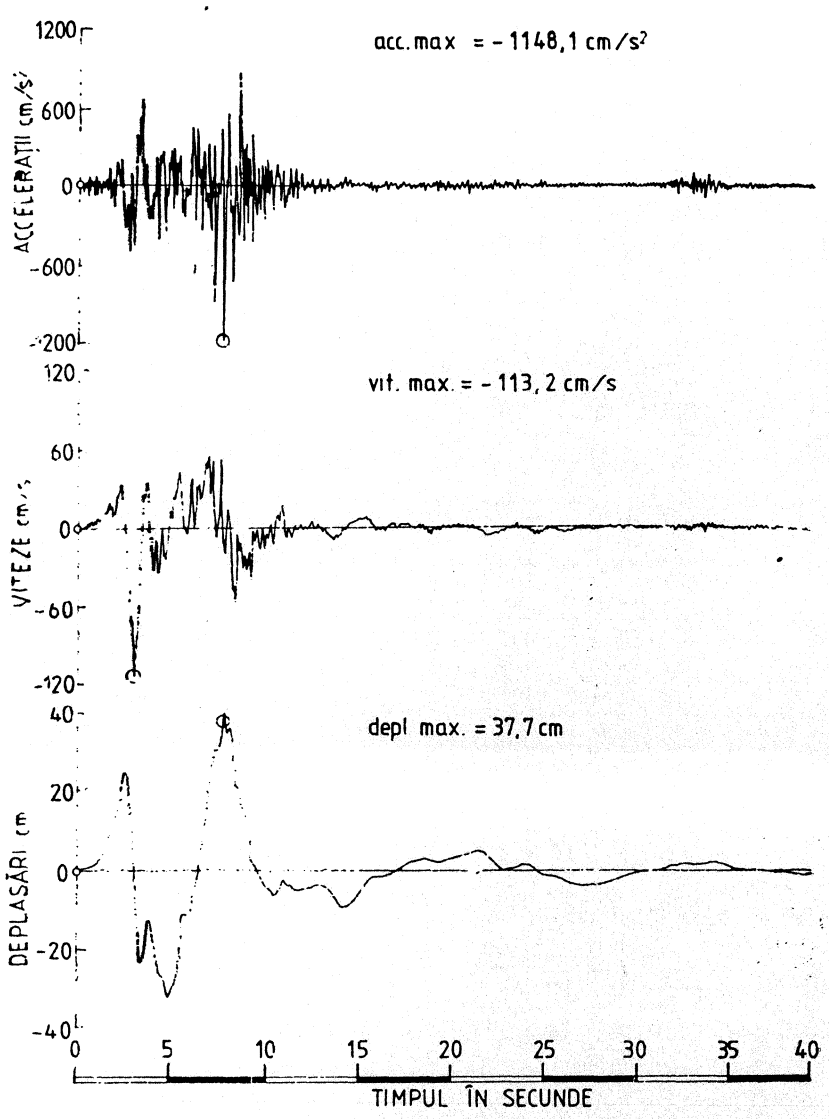


Fig. 7.13

O înregistrare de excepție (componenta S16E) a fost obținută în stația seismică Pacoima Dam în urma cutremurului din San Fernando — California (1971), întrucît accelerația seismică a depășit accelerația gravitațională (fig. 7.13). În figurile 7.14, 7.15 și 7.16 sînt reprezentate accelerogramele (inclusiv variațiile vitezelor și deplasărilor rezultate) înregistrate în stația seismică INCERC — București a cutremurului vrîncean din anul 1977. Sînt reprezentate componentele N-S (fig. 7.14), E-W (fig. 7.15) și verticală (fig. 7.16).

Trebuie menționat că toate accelerogramele au fost corectate în funcție de caracteristicile proprii ale înregistratoarelor utilizate.

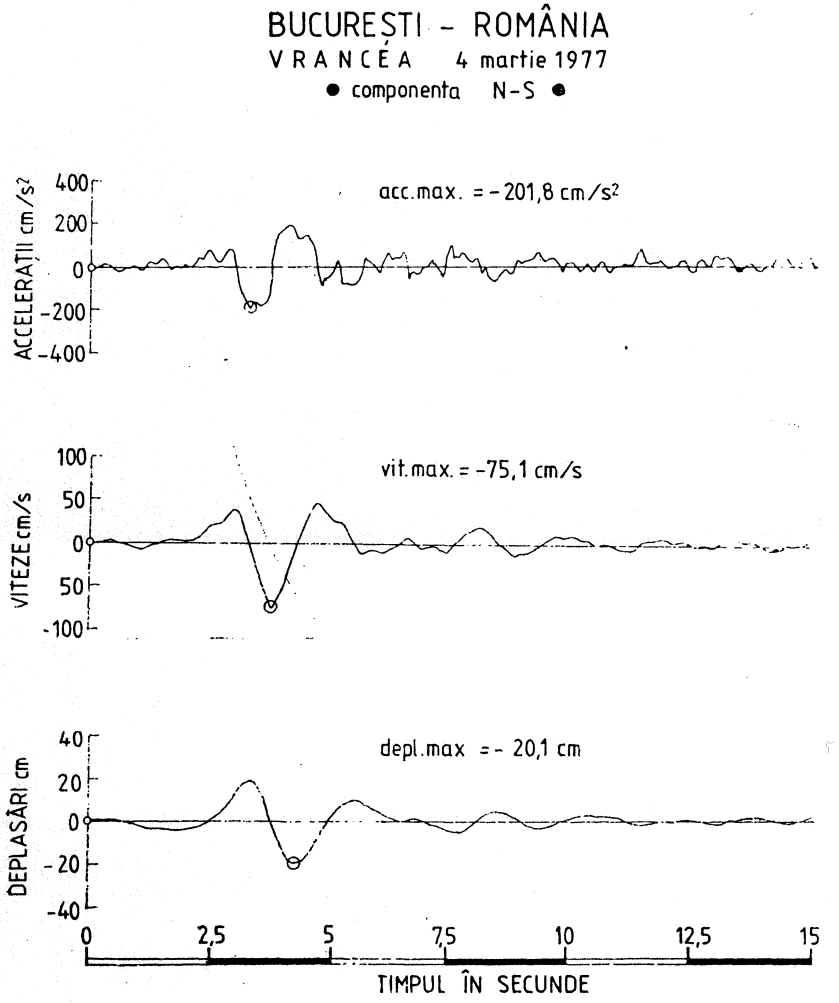


Fig. 7.14

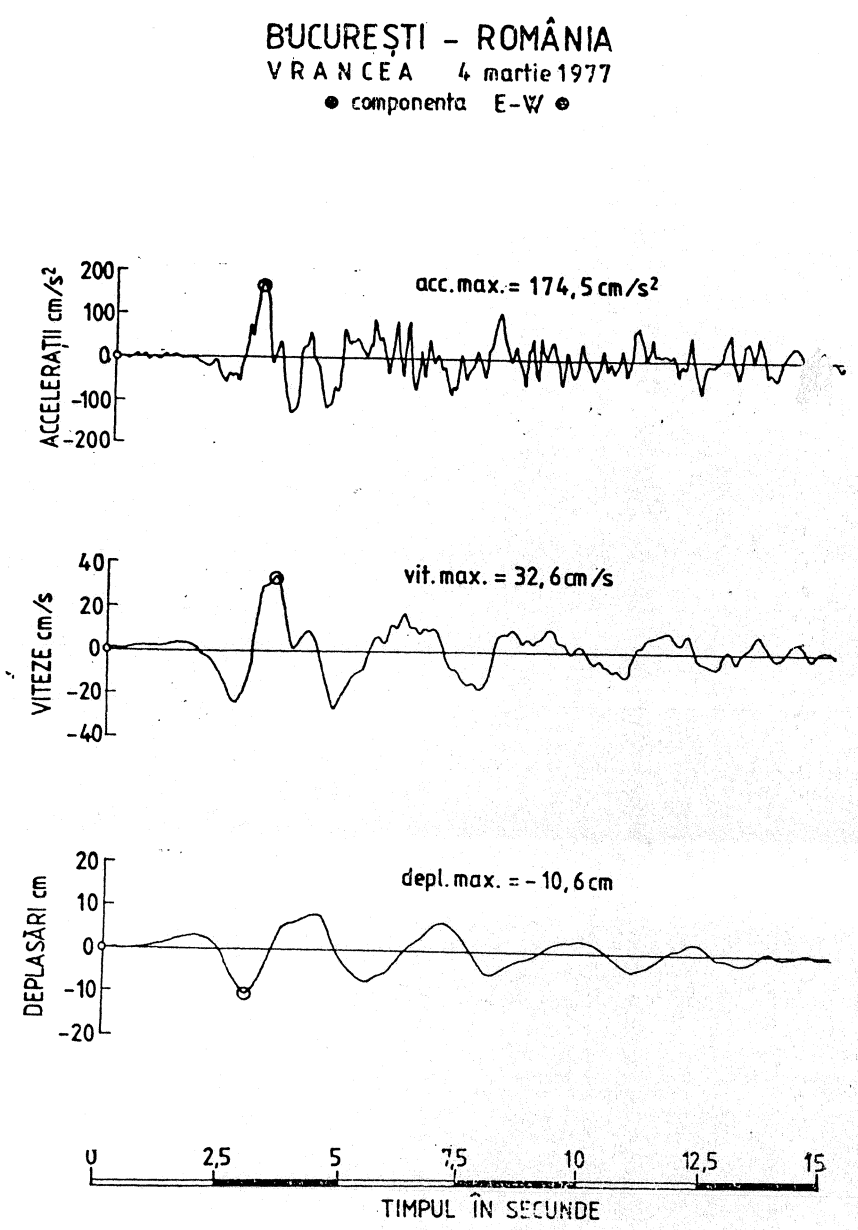


Fig. 7.15

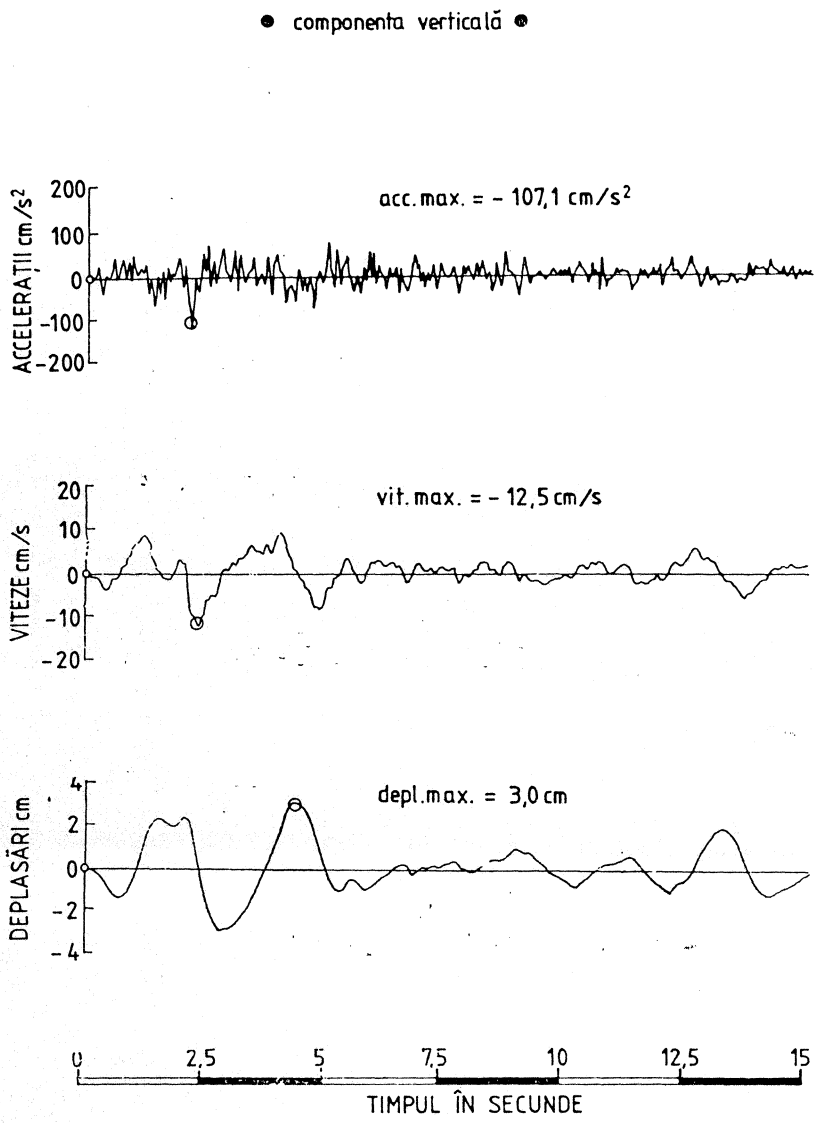


Fig. 7.16

În tabelul 7.3 sînt sintetizate principalele caracteristici corespunzătoare celor patru cutremure descrise anterior. Alte concluzii rezultate din analiza acestor cutremure se vor prezenta în § 7.10.1, precum și în capitolul 8.

TABELUL 7.3

DENUMIREA CUTREMURULUI (data)	STAȚIA SEISMICĂ	M Richter	MM max.	ADÎNCIME km	COMPONENTA	ACC. max. (cm/s²)	VIT. max. (cm/s)	DEPL. max. (cm)	SURSA
Imperial Valley California 18 mai 1940	El Centro Valley	6,5	X	16	S00E	341,7	33,4	10,9	[123]
Eureka California 21. dec. 1954	Ferndale City Hall	6,5	VII	≃20	N44E	155,70	35,6	14,1	[190]
San Fernando California 9 febr. 1971	Pacoima Dam	6,6	XI	13	S16E	1 148,1	113,2	37,7	[123]
Vrancea România 4 martie 1977	București (INCERC)	7,2	IX	95–105	N–S	208,2	74,9	25,7	[57]
					E–W	175,3	30,1	11,1	
					VERT	107,8	43,6	4,7	
					N–S	201,8	75,1	20,1	[35]
					E–W	174,5	32,6	10,6	
					VERT	107,1	12,5	3,0	
					N–S	221,0	82,0	27,0	[69]
					E–W	187,0	37,0	13,0	
					VERT	100,0	13,0	3,8	
					N–S	194,9	71,9	16,3	[233]
					E–W	163,1	28,2	9,6	
					VERT	105,8	9,7	2,3	

7.6.5. Intensitatea mișcării seismice

Cuantificarea cea mai simplă din punct de vedere inginerese a severității unui cutremur o constituie intensitatea seismică care pune în evidență, prin grade de intensitate seismică, consecințele biologice și materiale superficiale. Deși termenul este impropriu, intensitatea unui cutremur exprimată prin grade de intensitate seismică, caracterizează comportamentul psihofiziologic al oamenilor, efectele distructive asupra construcțiilor, precum și modificările configurației suprafeței libere a terenului. Descrierea în mod convențional (uneori chiar subiectivă) a violenței unui cutremur, prin grade de intensitate, corespunde potențialului distrugător specific unui anumit amplasament sau unei anumite zone. Subiectivitatea definirii intensității seismice rezultă și din faptul că puterea de distrugere a unui cutremur nu depinde numai de caracteristicile mișcării înregistrate la suprafața liberă a terenului, ci și de concepția de proiectare și protecție antiseismică a structurilor de rezistență, proprietățile materialelor și calitatea execuției.

Intensitatea mișcării seismice variază de la valori imperceptibile, sesizate numai de instrumente foarte sensibile, pînă la șocuri violente cu efecte dezastruoase asupra oamenilor, construcțiilor și configurației terenului.

7.6.6. Magnitudinea cutremurelor

Magnitudinea unui cutremur reprezintă o măsură obiectivă a energiei eliberate în focar în momentul declanșării evenimentului seismic. Noțiunea de magnitudine a fost introdusă în seismologie de către B. Gutenberg și Ch. F. Richter, iar scara magnitudinilor aparține lui Ch. F. Richter [66]. Caracterul obiectiv al acestei scări rezultă din faptul că magnitudinea se determină pe baza înregistrării instrumentale a mișcărilor seismice și este independentă de efectele produse la suprafața liberă a terenului.

Prin definiție, magnitudinea seismică reprezintă logaritmul zecimal al deplasării maxime (exprimată în microni) înregistrată pe un seismograf standard, amplasat la distanța de 100 km față de epicentru, în teren tare. Seismograful standard cu care se obțin înregistrările amplitudinilor deplasărilor este de tip Wood-Anderson, cu perioada proprie 0,8 s, fracțiunea din amortizarea critică 0,8, iar factorul de amplificare egal cu 2 800. Există tabele și hărți de corecție care permit extrapolarea sau interpolarea înregistrărilor în cazul în care distanța epicentrală diferă de 100 km, iar condițiile de teren sînt variabile.

Pe baza înregistrării unui mare număr de mișcări seismice, s-au putut stabili relații între magnitudine și energia radiată în focar, în timpul unui cutremur, de forma:

$$\log E = 11{,}8 + 1{,}5\,M,$$

sau

$$\log E = 11{,}4 + 1{,}5\,M,$$

unde E reprezintă energia exprimată în ergi, iar M-magnitudinea pe scara Richter.

Magnitudinea unui cutremur se exprimă prin numere întregi și zecimale. O creștere cu o unitate a magnitudinii corespunde unei creșteri de aproximativ 32 de ori a totalului de energie seismică eliberată în focar și o creștere de 10 ori a amplitudinii deplasărilor înregistrate. Astfel, dacă se compară două cutremure

cu magnitudini $M = 5$ și $M = 7$, rezultă pentru amplitudini relația $A_7 = 100A_5$, iar pentru energiile eliberate în focar $E_7 = 1000E_5$. Cea mai mare magnitudine a unui cutremur produs pînă în prezent s-a apreciat la valoarea $M = 8{,}75$ și se consideră că valoarea maximă posibilă este $M = 9$.

Scara magnitudinilor, specifică studiilor de seismologie, poate produce confuzii și aprecieri eronate cu privire la interpretarea cantitativă, dacă bazele matematice de definire și semnificația ei nu sînt suficient de bine cunoscute. Pentru un anumit cutremur, magnitudinea reprezintă o caracteristică unică, independentă de fenomenele superficiale produse de mișcarea seismică și care nu poate furniza deci informații asupra efectelor biologice și distructive. Intensitatea seismică însă, corespunzătoare aceluiași cutremur, este o caracteristică variabilă care depinde de distanța epicentrală, mecanismul de focar (adîncime și conținut de frecvențe), condițiile geologice locale, precum și de comportarea construcțiilor și terenului din amplasamentul respectiv. În foarte multe situații persoanele neavizate fac confuzii grave între scara energetică a magnitudinilor și scara convențională a intensităților seismice. Valorile magnitudinilor asociate și altor caracteristici ale unor cutremure puternice sînt date în tabelul 7.1. S-a apreciat statistic că dintre cutremurele care se produc anual în lume peste 700 au magnitudinea cel puțin egală cu 5 ($M \geqslant 5$), peste 90 au $M > 6{,}0$ și peste 12 au $M > 7{,}0$.

7.7. SCĂRI DE INTENSITATE SEISMICĂ

Scările de intensitate seismică au un pronunțat caracter subiectiv și convențional, deși în ultimele decenii s-a remarcat un proces de perfecționare a acestora bazat pe asocierea înregistrărilor instrumentale ale mișcării terenului. Cu ajutorul scărilor seismice se poate determina gradul de intensitate al cutremurelor, în funcție de descrierea efectelor produse la suprafață, iar prin intermediul unor criterii de corelare cantitativă se poate evalua, în mod aproximativ, accelerația atribuită mișcării efective a terenului dintr-o anumită zonă. În continuare vor fi descrise succint principale scări de intensitate seismică utilizate în ingineria seismică.

7.7.1. Scara de intensitate Mercalli modificată — MM

Pe baza efectelor produse de cutremurele observate în Italia, în anul 1873 L.S.D. Rossi a stabilit prima scară de intensitate seismică cu 10 grade, iar în același timp în Elveția, S. A. Forel a propus o scară ceva mai precisă, avînd tot 10 grade. După o activitate conjugată, zece ani mai tîrziu, cei doi seismologi au elaborat prima scară modernă de intensități seismice, cunoscută sub denumirea de scara Rossi-Forel. În anul 1883 G. Mercalli a elaborat o nouă scară de intensitate seismică cu 12 grade, care a fost succesiv îmbunătățită de Cancani (1903) și A. Sieberg (1923). Ultima perfecționare a scării Mercalli a fost adusă de către seismologii americani H. O. Wood și F. Neuman în anul 1931, noua variantă a scării de intensitate seismică fiind numită Mercalli—Modificată sau notată prescurtat MM. Această scară are astăzi o extindere internațională fiind adoptată de multe țări situate în zone seismice. Scara de intensitate MM exprimă gradul de severitate al unui cutremur, prin efectele produse asupra oamenilor, obiectivelor, clădirilor și terenului. Scara conține 12 grade de intensitate, considerîndu-se că primele degradări superficiale ale construcțiilor corespund gradului V, iar distrugerea totală gradului XII. Fiecare grad de intensitate este caracterizat prin valori convenționale ale accelerației maxime, și anume: 30 ... 70 cm/s² (grad VI), 70 ... 150 cm/s² (grad VII), 150 ... 300 cm/s² (grad VIII), 300 ... 700 cm/s² (grad IX) etc. În tabelul 7.4 se prezintă o descriere sumară a încadrării efectelor produse de cutremure în gradele de seismicitate corespunzătoare scării MM.

TABELUL 7.4

SCĂRI DE INTENSITATE SEISMICĂ
descrierea principalelor efecte produse

GRADUL	MERCALLI-MODIFICATĂ MM	MEDVEDEV—SPONHEUER—KÁRNÍK MSK-64
1	2	3
I	Cutremurul nu este perceput decît de puține persoane aflate în condiții favorabile.	Cutremurul este imperceptibil, iar intensitatea se află sub limita sensibilității oamenilor.
II	Se simte de puține persoane, în special de cele ce se găsesc la etajele superioare ale clădirilor.	Mișcarea foarte slabă, resimțită numai de persoanele care locuiesc la etajele superioare.
III	Se percepe în interiorul clădirilor, mai pronunțat la etajele superioare. Durata poate fi apreciată.	Se produc oscilații slabe similare celor produse de circulația autocamioanelor ușoare, fiind sesizat de majoritatea persoanelor din interiorul locuințelor.
IV	În timpul zilei este resimțit de multe persoane care se află în interiorul clădirilor. În exterior puțin perceptibil.	Cutremurul este destul de puternic, vibrații similare celor produse de circulația autocamioanelor grele. Obiectele suspendate, precum și lichidele din vase oscilează.
V	Este simțit aproape de toți oamenii. Ușoare degradări ale tencuielilor, iar unele obiecte instabile se răstoarnă.	Se percepe de toate persoanele din interiorul locuințelor și de majoritatea celor din exterior. Obiectele ușoare, nefixate, se deplasează sau se răstoarnă.
VI	Mișcarea este simțită de toată lumea producînd panică. Tencuiala cade, coșurile suferă degradări. Avarii neînsemnate la clădirile slab executate.	Mișcarea este resimțită în întregime producînd panică. Obiectele grele se deplasează. Degradări moderate în elementele nestructurale ale construcțiilor.
VII	Produce panică, iar oamenii părăsesc locuințele. Avarii neînsemnate la clădirile bine proiectate și executate. Avarii ușoare pînă la moderate la structurile de rezistență obișnuite. Avarii considerabile la construcțiile slab executate sau necorespunzător proiectate. Coșurile se prăbușesc.	Cutremurul produce panică, iar majoritatea oamenilor părăsesc locuințele. În clădirile slab executate apar avarii importante sau chiar distrugeri. În construcțiile proiectate și executate corespunzător se înregistrează degradări moderate. Coșurile de fum se dislocă puternic sau cad.
VIII	Avarii ușoare la structurile proiectate antiseismic. Avarii considerabile la clădirile obișnuite. Prăbușirea structurilor de rezistență defectuos executate. Dislocări ale zidăriei de umplutură, căderea coșurilor înalte, monumentelor etc.	Panica are un caracter general. Toate construcțiile sînt afectate. Se produc avarii majore și distrugeri la clădirile obișnuite, fără asigurare antiseismică, sau defectuos executate. Structurile proiectate în concept seismic pot suferi avarii moderate.
IX	Avarii însemnate la structurile de rezistență proiectate antiseismic. Se produc înclinări ale clădirilor cu schelet de rezistență bine proiectate. Distrugeri ale clădirilor slab executate. Crăpături în pămînt. Conductele subterane se rup.	Se produc avarii însemnate în structurile proiectate antiseismic. Construcțiile cu asigurare seismică moderată se distrug parțial sau se prăbușesc. Castelele de apă, turnurile izolate, monumentele etc. se prăbușesc. Crăpături în terenuri.

TABELUL 7.4 (continuare)

1	2	3
X	Majoritatea construcţiilor proiectate antiseismic se distrug o dată cu fundaţiile. Pămîntul se crapă puternic. Se produc alunecări de terenuri.	Construcţiile proiectate antiseismic se prăbuşesc parţial sau în totalitate. Degradări importante în baraje. Şinele de C.F. se deformează. Masive alunecări de teren.
XI	Puţine structuri de rezistenţă rămîn nedistruse. Apar falii la suprafaţa pămîntului. Conductele subterane complet distruse. Prăbuşiri şi alunecări puternice ale terenului.	Se distrug majoritatea construcţiilor corespunzător proiectate şi executate (clădiri, poduri, baraje, căi ferate etc.). Distrugerea conductelor subterane. Fracturi şi deplasări ale terenurilor pe toate direcţiile.
XII	Distrugere totală. Se observă unde la suprafaţa pămîntului. Obiectele sînt aruncate ascendent în aer.	Distrugerea totală a construcţiilor. Modificarea radicală a formei suprafeţei pămîntului.

7.7.2. Scara de intensitate MSK-64

Propusă în anul 1963 şi acceptată în anul 1964, scara de intensitate seismică elaborată de S.V. Medvedev, W. Sponheuer şi V. Kárník (prescurtat MSK-64), este alcătuită din 12 grade a căror descriere este redată în tabelul 7.4. În această scară severitatea unui cutremur poate fi evaluată prin aprecierea efectelor produse asupra oamenilor, construcţiilor şi configuraţiei terenului, cît şi instrumental prin înregistrarea amplitudinilor deplasărilor relative ale unui pendul sferic standard (etalon). Pendulul sferic utilizat are perioada proprie de oscilaţie $T = 0{,}25$ s, iar decrementul logaritmic al amortizării $\Delta = 0{,}50$. Din tabelul 7.5 rezultă caracteristicile principale ale mişcării terenului cînd gradul de seismicitate este determinat, fie pe baza efectelor distructive, fie în funcţie de amplitudinea deplasărilor relative ale pendulului, exprimată în mm. Această scară a fost adoptată în multe ţări europene printre care şi România. Există totuşi unele rezerve cu privire la evaluarea distrugerilor şi încadrarea lor în grade seismice, precum şi asupra rezultatelor contradictorii pe care le furnizează acceleraţiile şi vitezele corespunzătoare aceluiaşi grad

TABELUL 7.5

INTENSITĂŢI SEISMICE MSK-64 PE BAZA DATELOR INSTRUMENTALE

INTENSITATEA SEISMICĂ ÎN GRADE	ACCELERAŢIA[1] cm/s²	VITEZA[2] cm/s	DEPLASAREA[3] mm
V	12 ... 25	1,0 ... 2,0	0,5 ... 1,0
VI	26 ... 50	2,1 ... 4,0	1,1 ... 2,0
VII	51 ... 100	4,1 ... 8,0	2,1 ... 4,0
VIII	101 ... 200	8,1 ... 16,0	4,1 ... 8,0
IX	201 ... 400	16,1 ... 32,0	8,1 ... 16,0
X	401 ... 800	32,1 ... 64,0	16,1 ... 32,0

[1] acceleraţia maximă a oscilaţiei terenului pentru perioade de 0,1 ... 0,5 s;
[2] viteza maximă a oscilaţiei terenului pentru perioade de 0,5 ... 2,0 s;
[3] amplitudinea deplasării relative a pendulului standard.

7.7.3. Intensitatea spectrală G.W. Housner

În anul 1934, seismologul american H. Benioff [21] a exprimat ideea posibilităţii evaluării intensităţii unui anumit cutremur, prin intermediul răspunsului seismic al unui set de oscilatori simpli liniari (sisteme cu un singur grad de libertate dinamică), avînd diferite perioade proprii şi fracţiuni din amortizarea critică. Reluînd această idee, în anul 1952 G. W. Housner [73], [75] a definit noţiunea de intensitate spectrală, utilizînd în acest scop spectrul seismic al vitezelor relative. Întrucît noţiunea de spectru seismic va fi abordată în capitolul 8, se va reveni asupra semnificaţiei fizice şi a modului de exprimare a intensităţii spectrale Housner.

7.7.4. Intensitatea seismică A. Arias

Pentru a pune în evidenţă cantitatea de energie corespunzătoare unei accelerograme, A. Arias [4] a propus următoarea relaţie pentru a defini intensitatea întregii înregistrări seismice:

$$I_A = \frac{\arccos \nu}{g\sqrt{1-\nu^2}} \int_0^{t_f} a_0^2(t)\, dt,$$

unde

$a_0(t)$ reprezintă acceleraţia produsă de cutremur la nivelul suprafeţei libere a terenului;
t_f — durata totală a înregistrării (timpul final);
ν — fracţiunea din amortizarea critică;
g — acceleraţia gravitaţională.

Problema care prezintă dificultăţi destul de importante constă în aprecierea duratei accelerogramei t_f.

În cazul particular, cînd se neglijează prezenţa amortizării, intensitatea Arias devine:

$$I_A = \frac{\pi}{2g} \int_0^{t_f} a_0^2(t)\, dt.$$

7.7.5. Zonarea seismică a teritoriului

Zonarea seismică a unui anumit teritoriu, în vederea stabilirii gradelor de intensitate, reprezintă o operaţie deosebit de complexă şi dificilă datorită multitudinii factorilor care intervin. Criteriile de zonare seismică teritorială şi întocmirea hărţilor generale de macrozonare seismică au în vedere influenţa următorilor factori principali:

- Seismicitatea generală a întregului teritoriu, definită prin eventuale înregistrări efective de accelerograme sau reconstituirea unor accelerograme artificiale-sintetice, specifice amplasamentelor studiate.
- Analiza şi interpretarea statistică a efectelor produse asupra oamenilor, construcţiilor şi configuraţiei terenului în timpul cutremurelor anterioare.
- Mecanismul de focar al cutremurelor persistente (adîncimea focarului, conţinutul de frecvenţe, directivitatea undelor seismice, frecvenţa cutremurelor puternice, perioadele de revenire, predicţia unor viitoare cutremure etc.).
- Caracteristicile geologice ale mediului de propagare a undelor seismice.

- Distanțele epicentrale și poziția față de direcția dominantă a cutremurelor.
- Condițiile geologice locale și proprietățile fizico-mecanice ale depozitelor superficiale (natura terenului, poziția rocii de bază, starea de afînare-compactare, stratigrafia, gradul de omogenitate, prezența apei subterane, perioade predominante etc.).
- Efectele locale de atenuare-amplificare, filtrare dinamică sau focalizare a undelor seismice.

Izoseistele sînt linii imaginare de egală intensitate seismică care definesc nivelul intensităților seismice într-un anumit teritoriu (v. fig. 7.7, 7.8 și 7.9). Este evident că o asemenea definiție are un conținut exclusiv teoretic deoarece în mod practic este imposibil de stabilit cu exactitate asemenea linii. Izoseistele folosesc la întocmirea hărților de zonare seismică. Hărțile care se referă la teritorii întinse, la nivel de țări sau continente, se numesc hărți de *macrozonare seismică*, iar cele care au în vedere un teritoriu limitat (zone restrînse, orașe, amplasamente precizate), se numesc hărți de *microzonare seismică*. Elaborarea hărților de micro/macrozonare seismică presupune o cercetare aprofundată a informațiilor furnizate de analiza și interpretarea tuturor factorilor menționați mai sus, competență profesională ridicată și responsabilitate socială. Este cunoscut faptul că definirea cît mai precisă a seismicității unui anumit amplasament are implicații decisive asupra proiectării și execuției unei construcții rezistente la un viitor cutremur de mare intensitate.

7.7.6. Relații de legătură între intensitatea MM și caracteristicile cinematice ale mișcării seismice

În ultimele decenii au fost făcute multe cercetări în vederea stabilirii unor corelații între valorile de vîrf ale deplasărilor vitezelor și accelerațiilor mișcării seismice și intensitatea seismică MM, exprimată prin grade de seismicitate I_{MM}.

Pe baza formulelor de corelație propuse de Kawasumi, Gutenberg, Richter, Hershberger, Savarensky etc., M. D. Trifunac și A. G. Brady [189] au stabilit o astfel de corelație în urma analizei unui număr de 187 de accelerograme, înregistrate în timpul a 57 de cutremure puternice din statul California.

Admițînd în mod aproximativ că logaritmul zecimal al valorilor maxime ale deplasărilor d, vitezelor v și accelerațiilor a crește liniar cu gradele de intensitate MM (I_{MM}), au fost obținute următoarele formule:

— pentru deplasările maxime (cm), cînd $V \leqslant I_{MM} \leqslant X$

$$\log d_V = -1{,}13 + 0{,}24 I_{MM},$$
$$\log d_H = -0{,}53 + 0{,}19 I_{MM},$$

— pentru vitezele maxime (cm/s), cînd $IV \leqslant I_{MM} \leqslant X$

$$\log v_V = -1{,}10 + 0{,}28 I_{MM},$$
$$\log v_H = -0{,}63 + 0{,}25 I_{MM},$$

— pentru accelerațiile maxime (cm/s²), cînd $IV \leqslant I_{MM} \leqslant X$

$$\log a_V = -0{,}18 + 0{,}30 I_{MM},$$
$$\log a_H = -0{,}14 + 0{,}30 I_{MM}.$$

În toate aceste relații indicii V și H se referă la componentele verticală, respectiv orizontală.

Se menționează faptul că încă din anul 1942, B. Gutenberg și Ch. F. Richter [65] au propus o corelație între a_H și I_{MM} de formă similară celor de mai sus:

$$I_{MM} = 3 \log a_H + 1{,}5,$$

sau

$$\log a_H = -0{,}50 + 0{,}33 I_{MM},$$

valabilă pentru cutremurele californiene. Această formulă conduce la rezultate cantitative apropiate celor obținute cu formula anterioară, deși a fost stabilită pe baza unor informații mult mai limitate.

* * *

În legătură cu scările de intensitate seismică de tip MM și MSK trebuie subliniat faptul că violența unui cutremur, exprimată prin grade de seismicitate, se determină în principal pe baza senzațiilor simțite de oameni și efectelor asupra construcțiilor. Primul aspect depinde de sistemul biologic al fiecărei persoane în care intervine în mod decisiv subiectivismul, iar al doilea aspect este legat de tipul construcției, nivelul de asigurare seismică, caracteristicile materialelor folosite, metodele și calitatea execuției, precum și de evoluția în timp a proprietăților fizico-mecanice ale structurilor de rezistență.

În general, se poate considera că aprecierea intensității unui cutremur prin grade de seismicitate reprezintă o informare cantitativă unilaterală asupra efectelor distructive ale mișcării seismice.

7.8. PROPAGAREA UNDELOR SEISMICE PRIN MEDII CONTINUE DEFORMABILE

Studiul propagării undelor seismice din focar pînă la un anumit punct situat în interiorul pămîntului sau pe suprafața liberă a terenului, constituie o problemă fundamentală în seismologie. În analiza mecanismului de propagare a undelor seismice, intervin numeroși factori de natură diversă care fac ca rezolvarea acestei probleme să devină extrem de complicată, uneori chiar imposibilă. Se poate obține totuși o formulare matematică acceptabilă, dacă se admit unele ipoteze simplificatoare cu privire la modelarea mediului de propagare, prin neglijarea elementelor a căror influență asupra fenomenului în ansamblu poate fi considerată secundară.

Principalele aspecte de interes major în ingineria seismică, în legătură cu fenomenul de propagare a undelor seismice într-o anumită zonă sau într-un amplasament delimitat, sînt următoarele:

— Variația intensității undelor seismice în funcție de proprietățile fizico-mecanice și dinamice ale mediului de propagare.

— Modificarea răspunsului seismic al structurilor în funcție de caracteristicile de deformabilitate locală ale terenului specifice amplasamentului, precum și identificarea eventualelor fenomene de *filtrare* dinamică, *focalizare* sau *amplificare* a efectelor seismice.

Undele elastice, generate de energia eliberată în focar în momentul declanșării unui cutremur, nu se propagă către suprafața liberă a Pămîntului în mod uniform pe toate direcțiile și în toate categoriile de teren. Astfel, în prezența unui depozit coeziv sau necoeziv, afînat sau consolidat, saturat sau uscat etc., intensitatea undelor seismice poate suferi modificări importante cu consecințe directe asupra comportării terenului și construcțiilor.

Pentru rezolvarea aspectelor enunțate mai sus, mediul de propagare se va reduce la un model perfect elastic, omogen, izotrop, continuu și uniform. În consecință, pentru analiza propagării undelor elastice de tip seismic se vor utiliza ecuațiile generale ale mediului continuu deformabil exprimate în regim dinamic. Este evident că rezultatele ce se vor obține pe baza modelului acceptat vor avea mai mult un caracter orientativ [20], [99], [102].

7.8.1. Ecuațiile mediului continuu deformabil în raport cu tensiunile

În conformitate cu figurile 7.17 și 7.18, condiția de echilibru dinamic instantaneu a mediului continuu, exprimată în raport cu tensiunile, se poate scrie sub formă matriceală astfel:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} + \rho \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}. \qquad (7.1)$$

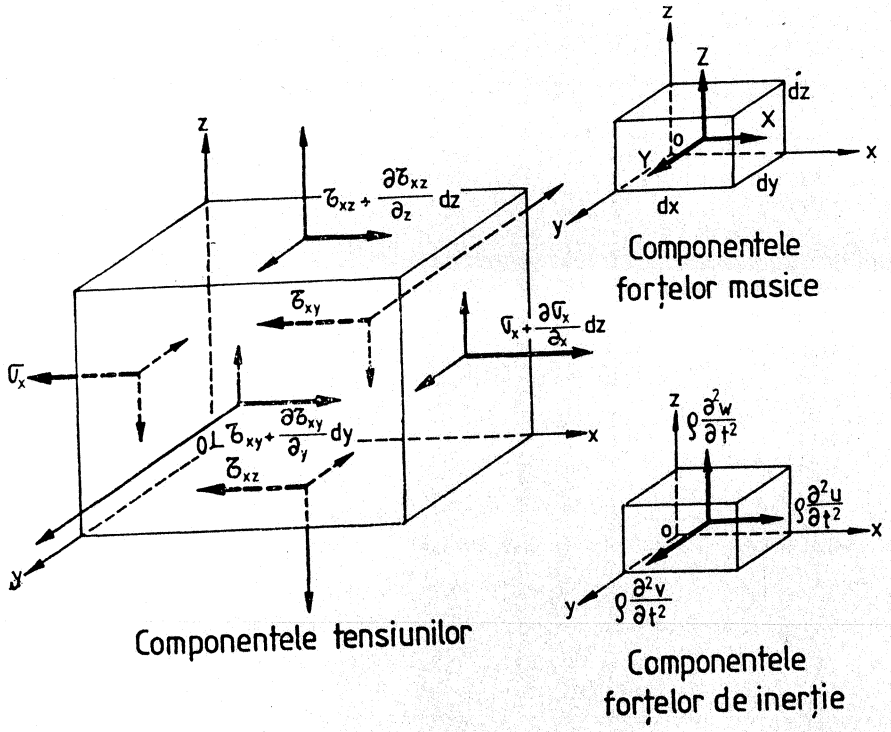


Fig. 7.17

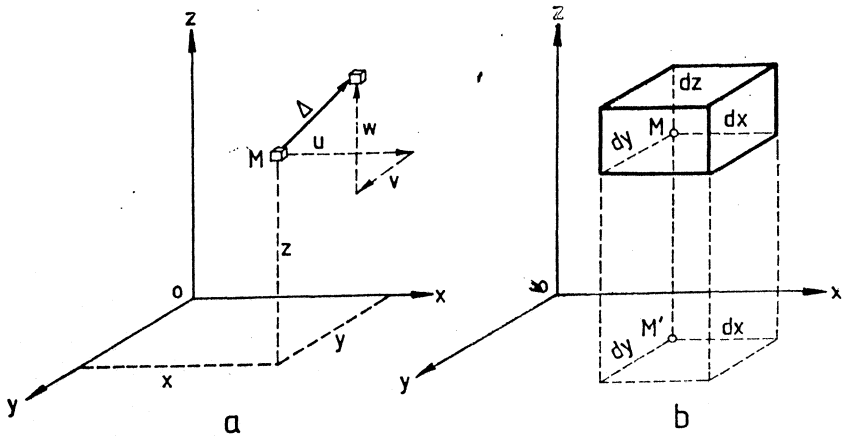


Fig. 7.18

În ecuația generală (7.1) este pusă în evidență matricea simetrică a tensiunilor ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$), caracteristică stării de tensiune spațială din orice punct al mediului raportat la sistemul de axe $Oxyz$, și de asemenea intervin matricele coloană ale operatorilor diferențiali de ordinul I și ale proiecțiilor forțelor masice (X, Y, Z), precum și matricea coloană a proiecțiilor deplasării totale (u, v, w). Prin ρ s-a notat densitatea specifică a mediului.

Ecuațiilor (7.1) li se asociază condițiile de suprafață (de contur)

$$\begin{Bmatrix} p_{xv} \\ p_{yv} \\ p_{zv} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}, \qquad (7.2)$$

exprimate prin intermediul proiecțiilor tensiunii superficiale $\bar{p}_v$ și cosinusurile directoare $l = \cos(v, x)$, $m = \cos(v, y)$, $n = \cos(v, z)$ ale vectorului de orientare $\bar{v}$ (fig. 7.19).

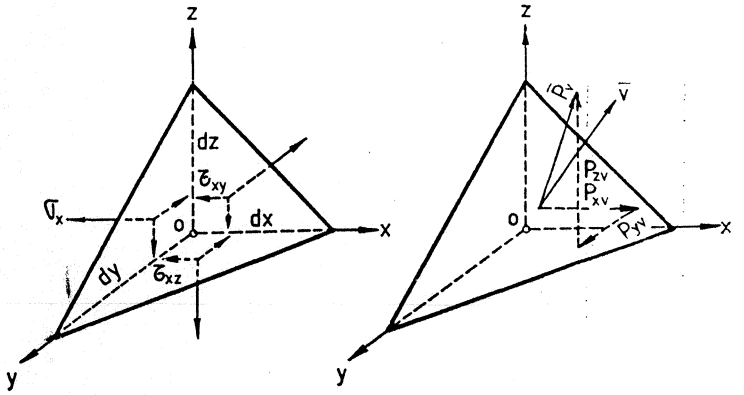


Fig. 7.19

7.8.2. Deformații specifice

Din studiul geometric al deformațiilor (fig. 7.20) se obțin
— componentele deformațiilor specifice liniare

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

— componentele deformațiilor specifice unghiulare

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x};$$

— componentele rotației

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right); \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right); \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Rezultă deci că matricea componentelor deformațiilor specifice conține nouă derivate parțiale distincte, adică:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} - \omega_z & \frac{1}{2}\gamma_{xz} + \omega_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} + \omega_z & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} - \omega_x \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} - \omega_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} + \omega_x & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Prima matrice care intervine în relația (7.3) se numește *matricea transformării omogene*, iar a doua *matricea generală de transformare*.

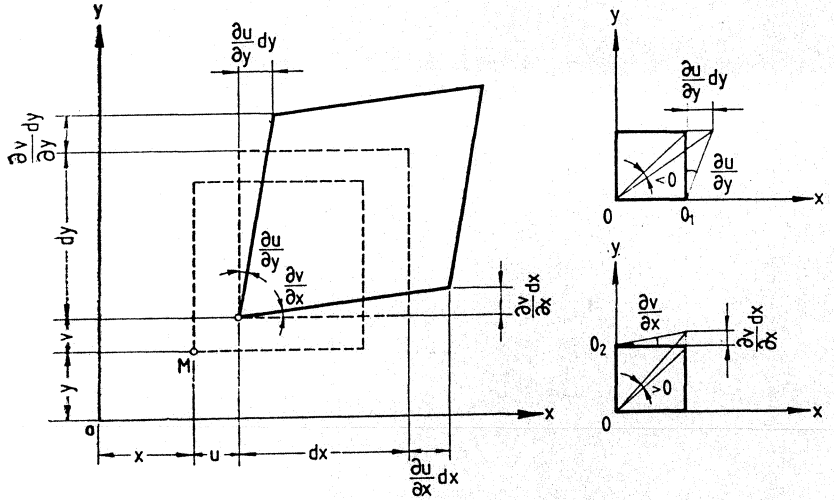


Fig. 7.20

Matricea generală de transformare poate fi descompusă în trei matrice distincte și anume: *matricea diagonală de dilatație cubică* $[\varepsilon]$, *matricea simetrică de modificare a formei* $[\gamma]$ și *matricea antisimetrică de rotație* $[\omega]$. Aceste matrice sînt de forma următoare:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{Bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{Bmatrix},$$

și în consecință va rezulta *matricea generală de deformare pură*

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}.$$

7.8.3. Exprimarea legăturii dintre deformații și tensiuni prin intermediul constantelor Young-Poisson

Dacă matricei tensiunilor și matricei de deformare pură li se asociază matricea unitate, se constată că urmele acestor matrice rămîn invariabile la schimbarea bazei de referință (sistemul de coordonate $Oxyz$) și deci

$$\theta = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{constant},$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \text{constant}.$$

În aceste relații θ reprezintă *invariantul tensiunilor*, iar ε_v dilatația cubică sau *deformația specifică volumetrică*.

Dacă se are în vedere aspectul fizic al problemei exprimat prin legea lui Hooke, cunoscînd modulul de elasticitate transversală E (constanta lui Young) și coeficientul de contracție transversală μ (constanta lui Poisson) corespunzători mediului continuu analizat, se va obține următoarea relație de legătură între matricele tensiunilor și de deformare pură:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1+\mu}{E}\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Din relația (7.4) rezultă sub formă generală, legătura dintre deformații și tensiuni prin intermediul constantelor Young-Poisson:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \tag{7.5}$$

și în consecință legea generalizată a lui Hooke

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E}\theta. \tag{7.6}$$

7.8.4. Exprimarea legăturii dintre tensiuni și deformații prin intermediul constantelor Lamé

Prin introducerea constantelor lui Lamé:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1-2\mu)(1+\mu)}, \tag{7.7}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \tag{7.8}$$

și explicitarea invariantului tensiunilor din (7.5), relația (7.4) devine:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} + \lambda\varepsilon_v \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.9}$$

Se obține în final, tot sub formă generală, legătura dintre tensiuni și deformații prin intermediul constantelor Lamé:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 2G(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 3\lambda\varepsilon_v, \tag{7.10}$$

și deci legea generalizată a lui Hooke

$$\theta = (2G + 3\lambda)\,\varepsilon_v. \tag{7.11}$$

Constanta G, avînd expresia (7.8), reprezintă modulul de elasticitate transversală a mediului.

7.8.5. Ecuațiile mediului continuu deformabil în raport cu deformațiile

În această situație, ecuația generală, care exprimă și condiția de continuitate a mediului deformabil, se obține direct dacă se substituie în ecuația (7.1) tensiunile în funcție de deformațiile specifice (7.9). Efectuînd operațiile corespunzătoare, ecuația generală a mediului deformabil, în formulare matriceală, va fi

$$(\lambda + G)\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix}\varepsilon_v + G\Delta\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \rho\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \tag{7.12}$$

unde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

reprezintă operatorul lui Laplace de ordinul II.

Efectuînd aceeași substituție, condițiile de suprafață (7.2) devin:

$$\begin{Bmatrix} p_{xv} \\ p_{yv} \\ p_{zv} \end{Bmatrix} = \lambda\varepsilon_v\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} + 2G\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}. \tag{7.13}$$

Ecuațiile rezultate din exprimarea matriceală (7.12) se mai numesc și ecuațiile lui Lamé.

Mișcarea oricărui punct material situat într-un mediu infinit, caracterizat prin modelul convențional definit anterior, va depinde atît de coordonatele punctului, cît și de timp, adică

$$u(x, y, z, t); \quad v(x, y, z, t); \quad w(x, y, z, t).$$

7.8.6. Ecuația generală a undelor longitudinale sau de dilatație

Dacă se consideră forțele masice constante sau nule, prin derivarea succesivă în raport cu x, y și z a ecuațiilor constitutive ale ecuației matriceale (7.12) se obține:

$$(\lambda + G)\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{Bmatrix}\varepsilon_v + G\Delta\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix}. \tag{7.14}$$

În urma sumării tuturor ecuațiilor din sistemul (7.14) rezultă *ecuația generală a undelor longitudinale*

$$(\lambda + 2G)\,\Delta\varepsilon_v = \rho\frac{\partial^2\varepsilon_v}{\partial t^2},$$

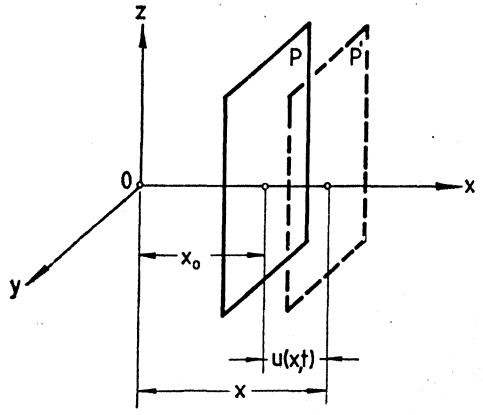


Fig. 7.21

sau

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_v}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varepsilon_v, \quad (7.15)$$

în care constanta a reprezintă *viteza de propagare a undelor longitudinale* numită și de *dilatație*

$$a = v_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}, \quad (7.16)$$

care este identică cu viteza de transmitere a sunetului prin mediul respectiv.

În situația particulară caracterizată de condițiile

$$u = u(x, t); \; v = 0 \text{ și } w = 0, \quad (7.17)$$

deplasările tuturor punctelor materiale aparținînd mediului de propagare se vor manifesta numai în direcția axei Ox, depinzînd exclusiv de coordonata x. Astfel, toate punctele situate în planul P (fig. 7.21) se vor deplasa uniform și simultan numai în direcția axei Ox, adică în direcția de propagare a undei, $x = x_0 + u(x, t)$.

Ecuația care caracterizează mișcarea punctelor materiale (traiectoriile în timp) se obține prin particularizarea ecuației (7.15) pe baza condițiilor (7.17). Deoarece mediul de propagare s-a considerat perfect elastic și nelimitat, nu va fi necesar să fie satisfăcute condițiile de suprafață, astfel încît ecuația oscilațiilor longitudinale rezultă sub forma

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (7.18)$$

Admițînd soluția de tip armonic

$$u(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right), \quad (7.19)$$

în care A este amplitudinea oscilației, iar T — perioada acesteia (mărimi considerate arbitrare), din condiția ca funcția (7.19) să satisfacă ecuația (7.18) rezultă

$$\frac{l}{T} = \pm a = \pm v_L,$$

unde l reprezintă lungimea de undă și căreia i se poate da o interpretare geometrică. Dacă se determină deformația specifică liniară în planul P (v. fig. 7.21)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = A \frac{2\pi}{l} \cos 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right),$$

se constată că dacă la un moment t (constant) se admite pentru x o variație egală cu l, se obține un nou plan P' în care ε_x are aceeași mărime. Deformația specifică ε_x, la timpul t, devine minimă în zona în care planele devin mai dese.

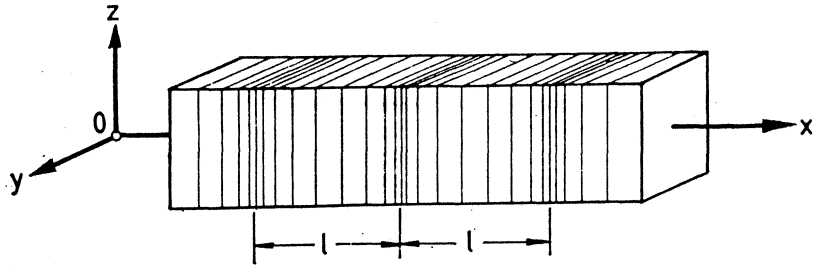


Fig. 7.22

Distanța dintre aceste zone este chiar l și reprezintă lungimea undei respective (fig. 7.22). Mărimea comprimării sau dilatării maxime rezultă din condiția

$$\cos 2\pi \left(\frac{x}{l} - \frac{t}{T} \right) = \pm 1 \quad \text{sau} \quad \frac{x}{l} - \frac{t}{T} = \frac{n}{2},$$

unde n este un număr întreg. Se constată că mișcarea oscilatorie are un caracter uniform în timp, avînd viteza

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{l}{T} = \pm a,$$

care reprezintă viteza de deplasare a undei longitudinale.

7.8.7. Ecuația generală a undelor transversale sau de forfecare

Menținînd ipoteza forțelor masice constante sau nule și presupunînd că procesul propagării se desfășoară fără variații de volum ($\varepsilon_v = 0$), din (7.12) rezultă ecuația matriceală

$$G \Delta \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad \text{sau} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = b^2 \Delta \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

care reprezintă *ecuația matriceală a undelor transversale* sau echivolumetrice, unde

$$b = v_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (7.21)$$

este *viteza de propagare a undelor transversale* numite și *unde de forfecare*.

Dacă se consideră cazul particular

$$u = 0; \quad v = 0 \quad \text{și} \quad w = w(x, t), \quad (7.22)$$

mișcarea punctelor materiale se va produce în direcția axei Oz, iar propagarea undei în direcția Ox. Cînd mișcarea este armonică sau periodică, se produc oscilații transversale (omogene) direcției Ox de propagare a undei.

În baza condițiilor (7.22), ecuația matriceală (7.20) se reduce la următoarea formă simplă:

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2}. \quad (7.23)$$

Din punct de vedere matematic ecuațiile (7.23) și (7.18) sînt identice astfel încît modul de integrare este același.

7.8.8. Specificul undelor seismice

Undele elastice generate de eliberarea energiei în focar în momentul producerii unui cutremur, numite unde seismice, se propagă radial în toate direcțiile. Undele seismice, descrise în § 7.3, care se manifestă în interiorul mediului de propagare, cunoscute și sub denumirea de *unde de adîncime*, sînt de două categorii: *unde longitudinale* (sau de dilatație) și *unde transversale* (sau de forfecare). Undele seismice care se propagă în imediata apropiere a suprafeței libere a terenului se numesc *unde superficiale*.

Întrucît viteza de propagare a undelor longitudinale (7.16) este mai mare decît viteza undelor transversale (7.21), acestea se definesc ca *unde primare* (unde P), respectiv *unde secundare* (unde S). Înregistrarea mișcării generate de cutremurele de pămînt se efectuează în stațiile seismice echipate cu aparatură specifică. În general, înregistrările se obțin simultan pe trei direcții ortogonale (două în plan orizontal și una pe verticală).

Pe baza formulelor (7.16) și (7.21) și ținînd seama de expresile (7.7) și (7.8) rezultă următoarele expresii pentru vitezele de propagare a undelor P și S:

$$v_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu} \cdot \frac{G}{\rho}}, \tag{7.24}$$

$$v_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \tag{7.25}$$

și deci

$$\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}} > 1, \quad (v_P > v_S). \tag{7.26}$$

Relația (7.26) pune în evidență faptul că primul tren de unde care se înregistrează într-o stație seismică corespunde undelor primare P.

Dacă se consideră pentru coeficientul de contracție transversală valoarea $\mu = 0{,}25$, rezultă:

$$\frac{v_P}{v_S} = \sqrt{3}, \quad \lambda = G = \frac{E}{2{,}5}.$$

În tabelul 7.6 se prezintă, pentru diverse categorii de pămînturi rapoartele v_P/v_S. Se constată că vitezele de propagare cresc atît cu gradul de compactare

TABELUL 7.6

	CATEGORII DE PĂMÎNTURI	γ (tf/m³)	E (kgf/cm²)	μ	v_P/v_S
Pămînturi necoezive	Nisipuri prăfoase în stare uscată	1,2 ... 1,5	100—120—140	0,25	1,73
	Nisipuri fine	1,2 ... 1,5	240—280—370	0,30	1,87
	Nisipuri mijlocii	1,4 ... 1,6	330—400—460	0,30	1,87
	Nisipuri cu pietriș și nisipuri mari	1,4 ... 1,7	330—400—460	0,35	2,09
	Pietriș uscat	1,8 ... 2,0	330—400—460	0,35	2,09
Pămînturi coezive	Praf argilos sau nisip argilos afînat	1,4 ... 1,6	110—160—260	0,40	2,45
	Praf argilos sau nisip argilos bine îndesat	1,65 ... 1,75	120—210—350	0,45	3,31

și calitățile fizico-mecanice ale pămîntului, cît și cu adîncimea măsurată de la suprafața liberă a terenului (grosimea stratului considerat). Spre exemplificare, viteza de propagare a undelor P pentru depozite sedimentare-aluvionare este $v_P = 0{,}5 \ldots 2{,}0$ km/s, iar pentru roci compacte (granitice sau bazaltice) $v_P \geq 4{,}0$ km/s. Valori orientative ale vitezelor de propagare a undelor P și S, în funcție de adîncime, sînt cuprinse în tabelul 7.2. Se poate constata descreșterea semnificativă a vitezelor de propagare în nucleul exterior, ceea ce demonstrează starea fluidă a acestuia. Starea solidă a nucleului interior este pusă în evidență prin creșterea vitezei de propagare a undelor P.

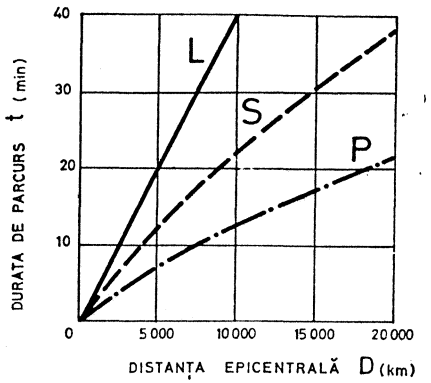


Fig. 7.23

În funcție de viteza de propagare a undelor, specifice mecanismului de focar și caracteristicile mediului de propagare, se poate determina timpul pe care îl parcurg undele seismice pînă la un anumit punct situat pe suprafața liberă a terenului. Legătura dintre timpul de sosire a undelor P, S, L și distanța epicentrală Δ (km), pentru o stație seismică oarecare și pentru diferite cutremure, este pusă în evidență, în mod orientativ, de *curbele hodocrone* sau *hodografe* (fig. 7.23). Deoarece curbele hodocrone sînt valabile pentru orice cutremur, independent de poziția focarului, rezultă că și proprietățile de elasticitate sînt repartizate, în jurul centrului Pămîntului, după o lege aproximativ-simetrică. Prin urmare, din punct de vedere seismic, interiorul Pămîntului poate fi considerat ca fiind constituit din straturi sferice și concentrice (v. fig. 7.1).

7.9. OSCILAȚII TRANSVERSALE ALE DEPOZITELOR GEOLOGICE SUPERFICIALE

7.9.1. Oscilații libere. Valori și vectori proprii, Perioade predominante

Deoarece undele seismice transversale (de forfecare) definesc parametrii mișcării care produc cele mai importante efecte dinamice asupra construcțiilor situate la suprafața liberă a terenului, se vor analiza oscilațiile libere orizontale (de forfecare) ale punctelor materiale, în vederea determinării caracteristicilor dinamice proprii. Se va admite pentru depozitul sedimentar, delimitat inferior de roca de bază (suprafața de discontinuitate), iar superior de suprafața liberă a terenului (fig. 7.24), un model de mediu perfect elastic, omogen, izotrop, continuu și uniform (semispațiu elastic) de grosime H.

În acest sens, se vor determina, pe baza unei abordări simplificate, valorile și vectorii proprii corespunzători depozitului geologic superficial, avînd în vedere influența decisivă pe care o au asupra fenomenelor de filtrare dinamică și amplificare seismică.

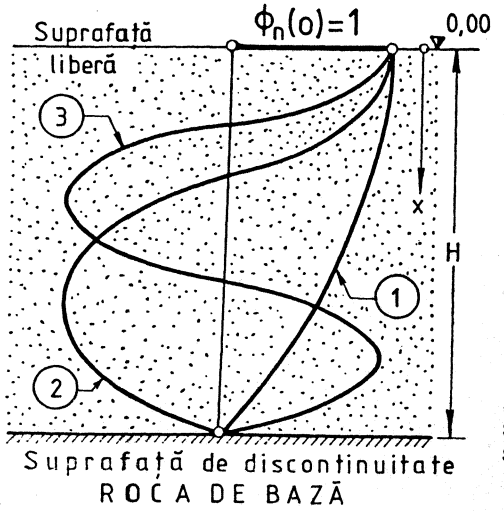


Fig. 7.24

În condițiile particulare în care se manifestă oscilațiile orizontale libere ale punctelor situate la cota x, de la suprafața liberă, și anume $u = u(x, t)$, $v = 0$, $w = 0$, ecuația de mișcare va avea forma (7.23):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = v_S^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}. \quad (7.27)$$

Întrucît vectorii proprii reprezintă funcții armonice staționare, se pot admite pentru ecuația (7.27) soluții particulare de tip Fourier-Bernoulli în care se consideră că variabilele de timp $\eta(t)$ și spațiu $X(x)$ sînt separate

$$u(x, t) = X(x)\,\eta(t), \quad (7.28)$$

similare cu cele utilizate în capitolul 5, formula (5.7). Prin $u(x, t)$ s-a notat deplasarea instantanee pe orizontală, a tuturor punctelor situate la aceeași cotă x.

Din condiția ca soluția (7.28) să satisfacă ecuația (7.27) rezultă egalitatea

$$X(x)\,\ddot{\eta}(t) = v_S^2 X''(x)\,\eta(t).$$

care împărțită prin (7.28) devine

$$\frac{\ddot{\eta}(t)}{\eta(t)} = v_S^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = -\omega^2. \quad (7.29)$$

Întrucît cele două variabile $\eta(t)$ și $X(x)$ sînt independente, relația (7.29) reprezintă o identitate și de aceea cei doi termeni vor fi egali cu o constantă unică și arbitrară, notată cu $-\omega^2$. Se obțin astfel două ecuații independente cu variabile separate

$$\ddot{\eta}(t) + \omega^2 \eta(t) = 0, \quad (7.30)$$

$$X''(x) + \left(\frac{\omega}{v_S}\right)^2 X(x) = 0, \quad (7.31)$$

din care rezultă că ω definește chiar valorile proprii ale mediului (exprimate prin pulsații), iar $X(x)$ caracterizează configurația vectorilor proprii corespunzători.

Prin integrarea ecuațiilor (7.30) și (7.31) se obțin soluții de forma (5.11), respectiv (5.14), adică:

$$\eta(t) = M \sin \omega t + N \cos \omega t = C \sin(\omega t + \varphi), \quad (7.32)$$

$$X(x) = A \sin \frac{\omega}{v_S} x + B \cos \frac{\omega}{v_S} x. \quad (7.33)$$

Constantele de integrare M și N sau C și φ se determină din condițiile inițiale ale mișcării, iar constantele A și B din condițiile la limită.

Astfel, impunînd următoarele *condiții limită*:

— la suprafața liberă: $x = 0, \dfrac{dX(x)}{dx} = 0,$

— la suprafața de discontinuitate: $x = H, \quad X(x) = 0,$
(la nivelul rocii de bază)

din ecuația (7.33) rezultă $A = 0$ și de asemenea

$$\cos \frac{\omega}{v_S} H = 0, \quad \frac{\omega}{v_S} H = (2i - 1)\frac{\pi}{2}$$

întrucît $B \neq 0$.

În consecință, expresiile valorilor ω și vectorilor $\Phi(x) = X(x)/B$ proprii sînt următoarele:

$$\omega_i = \frac{(2i-1)\pi}{2H} v_S, \quad (7.34)$$

$$\Phi_i(x) = \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2} \cdot \frac{x}{H}\right], \quad i = 1, 2, 3, \ldots \infty. \quad (7.35)$$

Perioada predominantă a depozitului sedimentar superficial va avea expresia

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{1}{2i-1} \cdot \frac{4H}{v_S}, \quad (7.36)$$

astfel încît *perioada predominantă fundamentală*, care va fi notată și cu T_0, rezultă

$$T_1 = T_0 = \frac{4H}{v_S}, \quad (7.37)$$

iar următoarele

$$t_2 = \frac{4H}{3v_S}, \quad T_3 = \frac{4H}{5v_S}, \quad T_4 = \frac{4H}{7v_S}, \quad T_5 = \frac{4H}{9v_S}, \ldots \quad (7.38)$$

și deci $T_1/T_2 = 3, \quad T_1/T_3 = 5, \quad T_1/T_4 = 7, \quad T_1/T_5 = 9, \ldots \quad (7.39)$

Configurațiile geometrice ale vectorilor proprii (formelor proprii de oscilație), corespunzători primelor trei moduri, sînt reprezentate în figura 7.24.

Se constată că perioadele predominante sînt direct proporționale cu adîncimea depozitului H și invers proporționale cu viteza de propagare a undelor secundare (transversale — de forfecare), Este evident că la adîncimi egale H, perioadele predominante vor fi cu atît mai mici cu cît terenurile vor avea consistență mai mare și grad de compactare mai ridicat. În mod orientativ, se pot accepta următoarele *valori pentru perioadele predominante fundamentale* în funcție de caracteristicile depozitului (stratului) geologic superficial:

— Straturi consistente, consolidate, de tipul rocilor stîncoase (granitice, bazaltice etc.) $< 0{,}3$ s
— Depozite aluvionare, consolidate, compacte, consistente, de mică grosime 0,3 ... 0,5 s
— Depozite aluvionare, consolidate, compacte, consistente, de grosime mare 0,3 ... 0,7 s
— Depozite aluvionare-sedimentare, slab consolidate, compactare medie, de grosime intermediară 0,5 ... 1,0 s
— Depozite aluvionare-sedimentare, slab consolidate și compactate, de grosime mare 0,8 ... 1,6 s
— Depozite sedimentare moi, saturate, umpluturi afînate, de grosime medie sau mare 1,5 ... 3,5 s

Perioadele predominante se determină experimental prin înregistrarea mișcării terenului produsă de seisme naturale (cutremure sau microseisme) sau de seisme artificiale (explozii sau șocuri puternice). Se constată că perioadele predominante obținute prin înregistrarea microseismelor și cele rezultate din înregistrarea cutremurelor puternice au valori destul de apropiate. În general T_0 (microseisme) $\leqslant T_0$ (macroseisme).

Pentru *vitezele de propagare* v_S, exprimate în m/s, se pot admite următoarele valori aproximative:

— nisip necoeziv	50 ... 100	— nisip saturat	300 ... 400
— argilă nisipoasă	120 ... 240	— nisip și pietriș	400 ... 600
— argilă consistentă	250 ... 300	— conglomerat stîncos	800 ... 1 500

Este evident că valorile vitezelor de propagare v_S sînt mai semnificative decît valorile perioadelor predominante în care grosimea depozitului superficial este descrisă numai calitativ.

În mod convențional se definește ca *rocă de bază* stratul compact căruia îi corespunde o viteză de propagare a undelor secundare $v_S = 750 \ldots 800$ m/s.

În cazul unui depozit stratificat, constituit din n straturi cu proprietăți și grosimi diferite, dar omogene, viteza de propagare a undelor S se poate evalua în mod aproximativ prin valoarea medie:

$$v_{S,\,med} = \frac{1}{H}\sum_{i=1}^{n} v_{S,\,k} H_k, \tag{7.40}$$

în care $v_{S,\,k}$ și H_k reprezintă viteza de propagare a undelor S, respectiv grosimea stratului k, aparținînd depozitului considerat ($k = 1, 2, \ldots n$).

7.9.2. Oscilații forțate. Aplicarea analizei modale

Se va admite că la nivelul suprafeței de separație dintre depozitul sedimentar și roca de bază se manifestă mișcarea seismică caracterizată prin variația deplasărilor $u_H(t)$. Menținînd ipotezele și condițiile de definire pentru modelul mediului, se vor stabili ecuațiile de condiție care guvernează convoluția sursei seismice de la roca de bază către suprafața terenului, exprimată prin deplasări, viteze sau accelerații. Acest aspect reprezintă o problemă specifică de dinamica mediilor continue deformabile și va fi abordată prin *metoda analizei modale*, așa cum a fost expusă în capitolele 4 și 6.

Conform figurii 7.25, deplasarea orizontală absolută a unui punct material situat la cota x (măsurată de la suprafața liberă) va fi:

$$u_a(x, t) = u_H(t) + u(x, t), \tag{7.41}$$

astfel încît ecuația (7.27) devine

$$\frac{\partial^2 u_a(x,t)}{\partial t^2} = v_S^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \tag{7.42}$$

sau prin înlocuirea relației (7.41)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - v_S^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u_H(t)}{\partial t^2} = -\ddot{u}_H(t), \tag{7.43}$$

unde $\ddot{u}_H(t)$ va reprezenta variația accelerațiilor seismice la nivelul suprafeței de separație (roca de bază).

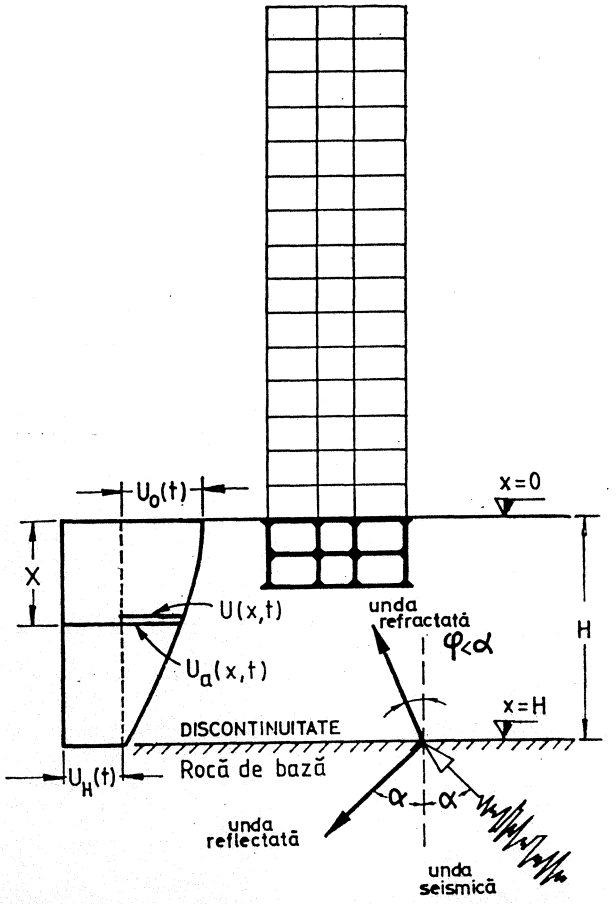


Fig. 7.25

Soluția ecuației, bazată pe transformarea liniară (4.14) sau (5.49), are forma

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x)\, \eta_i(t), \tag{7.44}$$

în care $\Phi_i(x)$ reprezintă vectorul propriu corespunzător modului i de oscilație, iar $\eta_i(t)$ coordonata modală (generalizată) aparținînd aceluiași mod.

Substituind soluția (7.44) în ecuația (7.43) se obține

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x)\, \ddot{\eta}_i(t) - v_S^2 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i''(x)\, \eta_i(t) = -\ddot{u}_H(t). \tag{7.45}$$

Dacă se ține seama de expresia generală a vectorilor proprii (7.35) se poate scrie

$$\Phi_i(x) = \cos\frac{\omega_i}{v_S} x, \quad \Phi_i''(x) = -\left(\frac{\omega_i}{v_S}\right)^2 \cos\frac{\omega_i}{v_S} x = -\left(\frac{\omega_i}{v_S}\right)^2 \Phi_i(x),$$

iar prin înlocuire în (7.45)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(x)\,\ddot{\eta}_i(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i^2 \Phi_i(x)\,\eta_i(t) = -\ddot{u}_H(t).$$

Prin multiplicarea acestei ecuații cu vectorul $\Phi_j(x)$, $j \neq i$ și prin integrarea fiecărui termen de la 0 la H, avînd în vedere proprietatea de ortogonalitate a vectorilor proprii (5.36), rezultă:

$$\ddot{\eta}_i(t)\int_0^H \Phi_i^2(x)\,dx + \omega_i^2\eta_i(t)\int_0^H \Phi_i^2(x)\,dx = -\ddot{u}_H(t)\int_0^H \Phi_i(x)\,dx,$$

și în final *ecuația modală decuplată* de forma (4.55) sau (5.55):

$$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = -A_i\ddot{u}_H(t), \tag{7.46}$$

unde

$$A_i = \frac{\int_0^H \Phi_i(x)\,dx}{\int_0^H \Phi_i^2(x)\,dx}, \tag{7.47}$$

reprezintă *factorul modal de distribuție al accelerației*, definit prin formula (4.59), întrucît produsul $A_i\ddot{u}_H(t)$ are semnificația unei accelerații modale. Proprietatea factorilor A_i, $i = 1, 2, \ldots \infty$ rezultă din relația (4.59), adică

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i = 1.$$

Datorită variației particulare a vectorilor proprii, definită prin funcții trigonometrice simple (7.35) se obțin pentru primele trei moduri de vibrație (fig. 7.18), valorile:

$$A_1 = \frac{4}{\pi} = 1{,}271; \quad A_2 = -0{,}416; \quad A_3 = 0{,}242.$$

Rezolvarea ecuației modale poate fi făcută în conformitate cu bazele teoretice expuse în capitolul 4. În cazul perturbațiilor descrise de funcții oarecare, cum este cazul celor provenite din mișcarea seismică se vor putea aplica conceptele specifice care urmează a fi prezentate în capitolul 8. În ecuația (7.46) poate fi introdus și efectul amortizării oscilațiilor seismice, printr-un termen identic cu cel care intervine în ecuația (4.55), fără ca dificultățile de rezolvare să se majoreze. Expresia coeficientului de amortizare specific mediilor omogene este dedusă în formula (7.61). Dacă se determină variația în timp a coordonatei modale $\eta_i(t)$, răspunsul în timpul istoric (time-history) pe durata semnificativă a unui cutremur se evaluează cu relația (7.44).

Acest mod de abordare a oscilațiilor forțate, produse în straturile sedimentare superficiale de mișcare seismică care se manifestă la nivelul rocii de bază, permite convoluarea acesteia în orice punct situat în mediul de propagare sau la suprafața liberă a terenului. Pentru aceasta, pot fi folosite accelerograme reale sau artificiale-simulate, denumite și sintetice, stabilite pe baza caracteristicilor focarului și mediului de propagare. În același timp, se poate trata și problema transmisibilității mișcării seismice prin medii omogene sau stratificate care poate caracteriza fenomenele de amplificare sau diminuare seismică, specifice unor amplasamente localizate.

7.10. INFLUENȚA CONDIȚIILOR GEOLOGICE LOCALE ASUPRA EFECTELOR SEISMICE DE SUPRAFAȚĂ

Undele seismice generate de energia eliberată în focar se transmit prin mediul de propagare în urma unor fenomene extrem de complexe de reflexie și refracție, datorate neomogenității și discontinuității straturilor pe care le traversează. În vecinătatea suprafeței libere a terenului, la contactul cu roca de bază a depozitului sedimentar superficial, direcția de propagare a undei refractată este aproape verticală. Vitezele de propagare ale undelor elastice descresc din focar către suprafața liberă, iar intensitatea mișcării se atenuează cu distanța epicentrală. În general componenta verticală a mișcării seismice este mai puțin importantă decît cea orizontală, deși proprietățile terenului se modifică mai pronunțat în direcția verticală.

Condițiile geologice locale, caracteristice unui anumit amplasament, au o influență decisivă asupra modificării efectelor seismice, caracterizate prin următorii factori principali:

— intensitatea mișcării seismice, care se manifestă la suprafața liberă, exprimată prin deplasări, viteze și accelerații maxime;

— conținutul de frecvențe și componentele dominante definite de compoziția spectrală a mișcării înregistrate;

— durata semnificativă a evenimentului seismic;

— configurația globală a variației mișcării în funcție de natura filtrării dinamice a undelor propagate;

— focalizarea efectelor seismice care se manifestă la suprafața liberă a terenului.

Cel mai important aspect legat de influența condițiilor geologice locale îl reprezintă compoziția spectrală a mișcării seismice, care pune în evidență atît modificările survenite în factorii descriși mai sus, cît și mecanismul de focar al cutremurului, în corelare directă cu magnitudinea cutremurului.

7.10.1. Spectrul Fourier al amplitudinilor. Conținut de frecvență — compoziție spectrală. Amplificarea efectelor seismice de suprafață

Spectrul Fourier al amplitudinilor unui eveniment seismic, înregistrat într-un anumit punct situat în stratul geologic superficial, pune în evidență conținutul de frecvență al mișcării, precum și amplificările corespunzătoare unor componente dominante. Spectrul Fourier se obține în urma substituirii mișcării reale tranzitorii a terenului, înregistrate cu aparatură specifică, printr-un număr infinit de componente sinusoidale ale căror frecvențe și faze sînt diferite. Prin superpoziția tuturor componentelor sinusoidale, variabile în timp, rezultă mișcarea reală (inițială). Se obține astfel variația amplitudinilor fiecărei componente armonice simple în funcție de frecvență sau perioadă. În general în ingineria seismică caracterizarea conținutului de frecvență, precum și a fenomenelor de amplificare în funcție de caracteristicile condițiilor geologice locale, se face prin intermediul spectrului Fourier al amplitudinilor accelerațiilor.

Pe baza aspectelor teoretice expuse în § 1.7.5, accelerația $a(t)$ generată de mișcarea seismică în timpul istoric al duratei semnificative $(0 \leqslant t \leqslant T)$, se poate exprima printr-o serie Fourier astfel:

$$a(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t), \tag{7.48}$$

unde

$$\omega_k = k\Delta\omega = \frac{2\pi k}{T}.$$

În urma aplicării proprietăților de ortogonalitate ale funcțiilor armonice, rezultă pentru coeficienții seriei Fourier (7.48) expresiile:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T a(t)\,dt,$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T a(t) \cos \omega_k t\,dt,$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_0^T a(t) \sin \omega_k t\,dt.$$

Întrucît în cazul mișcărilor seismice atît viteza inițială, cît și cea finală sînt nule, rezultă $A_0 = 0$, astfel încît seria (7.48) se poate exprima în următoarea formă compactă:

$$a(t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin (\omega_k t + \varphi_k), \tag{7.49}$$

unde

$$C_k^2 = A_k^2 + B_k^2 = \frac{4}{T^2}\left[\left(\int_0^T a(t) \cos \omega_k t\,dt\right)^2 + \left(\int_0^T a(t) \sin \omega_k t\,dt\right)^2\right],$$

iar unghiul de fază

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{A_k}{B_k} = \frac{\int_0^T a(t) \cos \omega_k t\,dt}{\int_0^T a(t) \sin \omega_k t\,dt}.$$

Din exprimarea accelerației $a(t)$ prin intermediul formei (7.49), rezultă că noul coeficient C_k reprezintă amplitudinea componentei armonice a mișcării cu pulsația ω_k, iar φ_k unghiul de fază corespunzător pulsației respective.

Reprezentarea grafică a amplitudinilor C_k în funcție de pulsația ω_k (de frecvență sau de perioadă), corespunzătoare tuturor componentelor ($k = 1, 2 \ldots \infty$), prin segmente discrete în punctele $\omega = \omega_k = k\Delta\omega$, definește *spectrul Fourier al amplitudinilor accelerațiilor*. Variația acestor amplitudini, în funcție de pulsația sau perioada componentei respective, pune în evidență *conținutul de frecvențe* al funcției $a(t)$. Descompunerea unei funcții de tip $a(t)$, care a fost periodicizată pe intervalul $0 \leqslant t \leqslant T$, depinde de durata semnificativă a înregistrării. Dacă durata crește (teoretic tinde către infinit), prin transformarea sumelor în integrale, se poate folosi reprezentarea în domeniul frecvență prin intermediul *spectrului transformatei Fourier*.

În conformitate cu definițiile date în § 1.8.4, transformata directă Fourier a accelerației seismice are expresia

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} a(t)\, e^{-i\omega t}. \tag{7.50}$$

Spectrul Fourier al amplitudinilor accelerațiilor mai poate fi descris și prin intermediul transformatei (7.50) în funcție de frecvență $f = \omega/2\pi$.

Transformata Fourier este exprimată atît prin partea reală, cît și prin cea imaginară a termenilor în cosinus și sinus din seria (7.48), în conformitate cu formula (1.38)

$$F(\omega) = A(\omega) - iB(\omega) = C(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}, \tag{7.51}$$

unde

$$C^2(\omega) = A^2(\omega) + B^2(\omega) = \left[\int_0^{\infty} a(t) \cos \omega t\,dt\right]^2 + \left[\int_0^{\infty} a(t) \sin \omega t\,dt\right]^2,$$

iar unghiul de fază

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

Reprezentarea grafică a amplitudinilor $C(\omega)$ a transformatei Fourier în funcție de frecvențele corespunzătoare definește spectrul Fourier al amplitudinilor accelerațiilor.

Spectrul Fourier permite să se pună în evidență în afara componentelor dominante ale unui cutremur (compoziția spectrală) și domeniul de frecvență în care se manifestă cea mai mare energie conținută de mișcarea seismică. În figura 7.26 se prezintă comparativ spectrele Fourier ale vitezelor corespunzătoare mișcărilor seismice înregistrate în stațiile El Centro-California

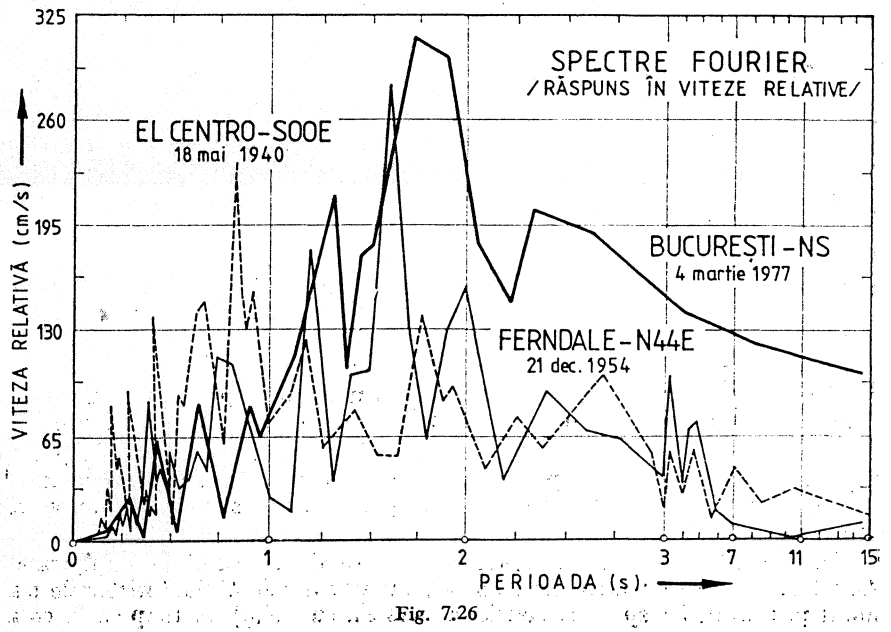


Fig. 7.26

1940 (componenta S00E din figura 7.11), Ferndale—California 197! (componenta N44E din figura 7.12) și INCERC—București 1977 (componenta N—S din figura 7.14). Se poate constata asemănarea conținutului de frecvență al cutremurelor înregistrate la Ferndale și București, ceea ce se va manifesta și în variația spectrelor de răspuns ale accelerațiilor absolute (v. cap. 8).

Dacă se cunoaște variația accelerațiilor $a_H(t)$ la nivelul suprafeței de separație dintre roca de bază și depozitul geologic superficial ($x = H$), se poate determina prin intermediul transformatei Fourier $F_H(\omega)$, transformata Fourier $F_0(\omega)$ a variației accelerațiilor de la nivelul suprafeței libere $F_0(\omega)$, folosind funcția de transfer $H(\omega)$, numită și funcție pondere, în conformitate cu relația (1.50)

$$F_0(\omega) = H(\omega)\, F_H(\omega). \tag{7.52}$$

Cunoașterea funcției de transfer a mediului de propagare, determinată pe baza aspectelor teoretice expuse în § 1.9, 1.10, 1.11, transformata Fourier inversă (1.40) furnizează variația accelerațiilor la suprafața liberă a terenului punînd astfel în evidență *filtrarea dinamică a mediului* prin componentele predominante conținute de spectrul Fourier. Se va obține deci:

$$a_0(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_0(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \tag{7.53}$$

unde transformata $F_0(\omega)$ mai poate fi exprimată similar cu (7.51)

$$F_0(\omega) = C_0(\omega)\, e^{i\varphi_0(\omega)}. \tag{7.54}$$

Aceste relații pun în evidență un proces tipic de *convoluție a accelerației seismice* de la roca de bază la suprafața liberă a terenului.

Procesul de *deconvoluție* constă în a determina variația accelerațiilor la nivelul rocii de bază, în funcție de accelerația înregistrată la suprafața liberă a terenului, prin intermediul funcției de transfer inverse (impedanța generalizată) astfel:

$$F_H(\omega) = H^{-1}(\omega)\, F_0(\omega), \tag{7.55}$$

rezultînd

$$a_H(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_H(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega. \tag{7.56}$$

Deconvoluarea unui eveniment seismic (înregistrat), de la suprafața liberă la nivelul rocii de bază, permite prin re-convoluarea acestuia, în orice amplasament din zona respectivă, să se stabilească caracteristicile specifice variațiilor accelerațiilor care ar fi posibil să se manifeste în amplasamentul respectiv.

Problema poate fi abordată în această concepție utilizînd și cutremure artificiale, definite prin accelerograme sintetice sau simulate prin descompunerea semnalului seismic în componente simple armonice cu frecvențe diferite.

Compararea efectelor seismice datorate influenței condițiilor locale poate fi pusă în evidență prin compararea spectrelor Fourier, corespunzătoare accelerației seismice, de la nivelul rocii de bază și accelerației seismice de la nivelul suprafeței libere.

În figura 7.27 este arătat modul de definire al factorului de amplificare. Astfel la cota $x = 0$ (suprafața liberă), variația accelerațiilor orizontale s-a notat prin $a_0(t)$, iar spectrul Fourier al acesteia cu $SF_0(t)$, în timp ce la cota

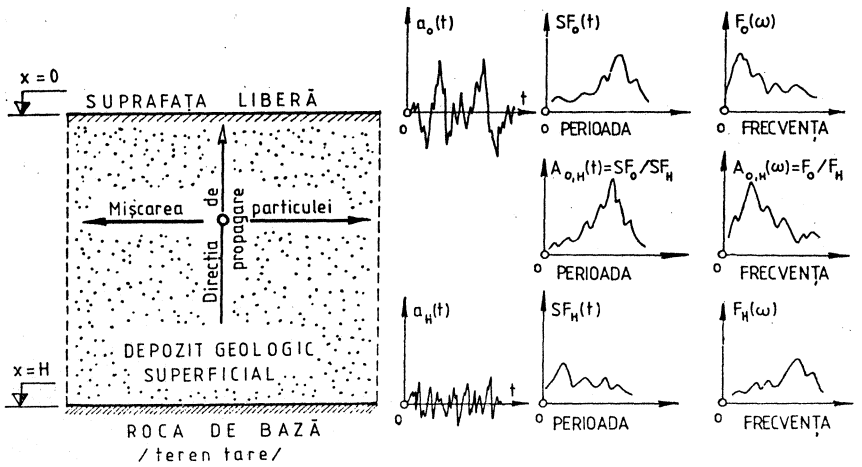


Fig. 7.27

$x = H$ (roca de bază), variația accelerațiilor orizontale este $a_H(t)$, iar spectrul Fourier corespunzător $SF_H(t)$. Spectrul amplificării sau *factorul de amplificare* (uneori de atenuare în anumite condiții particulare), de la roca de bază la suprafața liberă a terenului, se definește prin raportul

$$A_{0,H}(t) = \frac{SF_0(t)}{SF_H(t)} > 1, \tag{7.57}$$

care în marea majoritate a situațiilor este supraunitar.

Dacă se utilizează spectrul Fourier al amplitudinilor accelerațiilor exprimat prin transformata Fourier, factorul de amplificare al efectelor seismice de la roca de bază către suprafața liberă, rezultă din relația (7.52), prin intermediul funcției de transfer

$$A_{0,H}(\omega) = \frac{F_0(\omega)}{F_H(\omega)} > 1, \tag{7.58}$$

așa cum rezultă din figura 7.27.

Funcțiile de amplificare, exprimate fie prin relația (7.57), fie prin (7.58), pun în evidență proprietățile dinamice și seismice ale depozitului geologic superficial, precum și tendințele de amplificare sau focalizare a undelor seismice de la roca de bază, ceea ce caracterizează, din punct de vedere ingineresc, efectele distructive de suprafață ale cutremurelor puternice.

7.10.2. Atenuarea vîscoasă a mediului de propagare

Pentru evaluarea factorilor de transmisibilitate sau amplificare a undelor seismice de la roca de bază pînă la suprafața liberă a terenului mai intervin proprietățile de amortizare internă a mediului. Se va admite pentru modelul omogen și perfect elastic ca lege de atenuare internă modelul Newton, caracterizat prin amortizare liniar-vîscoasă.

Dacă se ține seama de prezența amortizării de tip vîscos, ecuația oscilațiilor libere ale mediului continuu (7.27) rezultă sub următoarea formă:

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + c \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t}, \qquad (7.59)$$

în care s-a notat prin c coeficientul de viscozitate al stratului geologic superficial. Amortizarea mediului s-a considerat proporțională cu variația în timp a deformației specifice unghiulare (viteză de deformație), adică $c\dot{\gamma}(x,t) = c\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$.

Prin transformări corespunzătoare, similare celor din § 7.9.1, în urma separării variabilelor, ecuația (7.59) se va exprima printr-o ecuație (cu variabilă de spațiu) identică cu (7.31) și prin altă ecuație (cu variabilă de timp) similară cu (7.30) în care intervine termenul corespunzător amortizării:

$$\ddot{\eta}(t) + \frac{c}{G}\omega^2 \dot{\eta}(t) + \omega^2 \eta(t) = 0. \qquad (7.60)$$

Din punct de vedere matematic ecuația (7.60) are aceeași formă cu ecuația (2.20), astfel încît prin utilizarea relațiilor (2.22) și (2.23) se obține direct expresia fracțiunii din amortizarea critică ν echivalentă astfel:

$$2\nu_i \omega_i = \frac{c_i}{G}\omega_i^2, \quad \nu = \frac{c_i}{r c_{r,i}} = \frac{c_i}{2G}\omega_i, \qquad (7.61)$$

de unde, ținînd seama de (7.34) și (7.21) se obține expresia coeficientului de viscozitate critică corespunzător modului propriu i de oscilație:

$$c_{i,cr} = \frac{2G}{\omega_i} = \frac{4H}{(2i-1)\pi}\sqrt{G\rho}, \qquad (7.62)$$

iar pentru primul mod de oscilație ($i = 1$)

$$c_{1,cr} = \frac{4H}{\pi}\sqrt{G\rho}.$$

Dacă se consideră că variația deplasării seismice la nivelul rocii de bază $u_B(t)$ are caracter armonic și staționar, factorul de amplificare maximă modală poate fi determinat cu formula (2.73) corespunzător fenomenului de rezonanță

$$A_i = \frac{1}{2\nu_i} = \frac{G}{\omega_i c_i} = \frac{1}{c_i} \cdot \frac{2H}{(2i-1)\pi}\sqrt{G\rho}. \qquad (7.63)$$

În cazul în care se admite că viscozitatea mediului este aceeași pentru toate modurile de oscilație și egală cu viscozitatea modului fundamental c_1, relația (7.63) are exprimarea următoare:

$$A_i = \frac{A_1}{2i-1}, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \infty. \qquad (7.64)$$

Variația amplificării în funcție de frecvența sursei armonice este dată în figura 7.28 de unde rezultă că *raportul frecvențelor de rezonanță ale mediului*

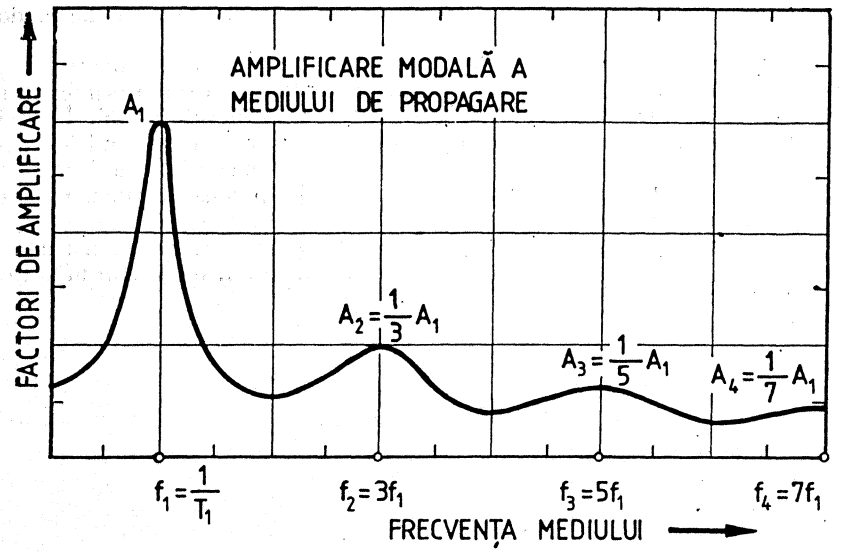


Fig. 7.28

este invers proporțional cu raportul amplificărilor maxime, deoarece $A_i f_i =$ = constant, ceea ce pune în evidență *sensibilitatea dinamică a mediului la frecvențe de rezonanță joase* (perioade predominante lungi). În acest caz efectele seismice de suprafață sînt deosebit de violente, așa cum s-a întîmplat pe teritoriul municipiului București la cutremurul din 4 martie 1977, deoarece perioadele fundamentale predominante ale majorității amplasamentelor au fost destul de lungi ($T_0 > 0{,}9$ s).

Capacitatea de amortizare a mediilor este relativ ridicată, în funcție de proprietățile fizico-mecanice, fracțiunea din amortizarea critică variind în general între valorile $\nu = 0{,}10 \ldots 0{,}50$.

7.10.3. Rezonanță tranzitorie — amplificare seismică

Spectrele Fourier ale amplitudinilor, care pun în evidență compoziția spectrală a unei mișcări seismice, prin conținutul de frecvență al înregistrării, precum și componentele semnificative, permit identificarea perioadelor predominante ale fenomenului seismic.

Caracteristicile perioadelor predominante ale mișcării terenului în timpul evenimentelor seismice depind în principal de magnitudinea cutremurului, distanța epicentrală, configurația topologică a zonei, mecanismul de focar (în special adîncimea acestuia), precum și de condițiile geologice locale ale amplasamentului. Cu cît distanța epicentrală și durata semnificativă a mișcării seismice sînt mai mari, cu atît fenomenul seismic va fi caracterizat de componente cu frecvență joasă, adică cu perioade predominante lungi. S-a constatat că în cazul cutremurelor normale sau intermediare puternice (de magnitudine $M > 6{,}5$) mecanismul de focar generează perioade predominante relativ lungi ($T_0 > 1$ s), iar în cazul cutremurelor slabe (normale) sau chiar

mai puternice (superficiale), mecanismul de focar generează perioade predominante scurte ($T_0 < 0{,}5$ s).

O importantă influenţă asupra apariţiei perioadelor predominante lungi o au condiţiile geologice locale ale terenului, corespunzătoare amplasamentului, mai ales cînd depozitele sedimentare aparţin cuaternarului [176]. Întrucît în depozitele sedimentare şi aluvionare vitezele de propagare ale undelor seismice secundare sînt mai reduse, ca urmare a scăderii modulului de elasticitate transversală, conform formulelor (7.25) şi (7.37), perioadele predominante (în special cele fundamentale) rezultă mult mai ridicate. Asemenea situaţii, în care perioade predominante lungi au caracterizat componentele distructive ale mişcării seismice, s-au semnalat în depozitele sedimentare moi afînate şi de dată relativ recentă, în unele zone din Chile, Iugoslavia, Japonia, Mexic, România, S.U.A. (California, Alaska), Venezuela etc.

Existenţa unor componente intensive cu perioade fundamentale predominante T_0 mari au condus la avarii importante şi chiar la distrugerea completă a unor structuri mai zvelte în timpul multor cutremure, dintre care se menţionează: Fukui—Japonia, 1948 ($T_0 = 0{,}5 \ldots 1{,}5$ s), Mexico City, 1957 ($T_0 > 2$ s), Nagoya—Japonia, 1963 ($T_0 = 1{,}2$ s), Anchorage—Alaska ($T_0 > 0{,}6$ s), Niigata—Japonia 1964 ($T_0 = 0{,}5 \ldots 1{,}0$ s), Caracas—Venezuela, 1967 ($T_0 > 0{,}6$ s), Bucureşti—România, 1977 ($T_0 = 0{,}9 \ldots 1{,}7$ s), Montenegro—Iugoslavia, 1979 ($T_0 = 0{,}7 \ldots 1{,}4$ s). Acest fapt este datorat unui fenomen de *rezonanţă tranzitorie* sau de *amplificare seismică*, întrucît perioadele proprii ale construcţiilor se află în vecinătatea perioadelor predominante ale componentelor intensive ale cutremurului. Efectele seismice înregistrate în timpul cutremurelor menţionate au fost majore, amplificările seismice fiind generate, în afara mecanismelor specifice de focar, în mod decisiv de caracteristicile geologice superficiale ale amplasamentelor, deşi distanţele epicentrale au fost variabile (295 km—Mexico City, 55 km — Caracas, 165 km — Bucureşti).

Cercetările de seismologie pură şi inginerească au identificat existenţa unor *„zone de umbră"* în care efectele seismice de suprafaţă au fost minime, chiar în situaţiile în care distanţele epicentrale erau reduse. Aceste fenomene particulare se datoresc caracteristicilor globale şi locale ale mediului de propagare, *filtrării componentelor intensive, atenuărilor interne, existenţei unor ecrane de reflexie* sau *refracţie* etc.

Indiferent de perioadele predominante, condiţiile geologice locale ale amplasamentelor au un rol primordial în privinţa efectelor seismice înregistrate la suprafaţa liberă a terenului. Terenurile cu *sensibilitate seismică* ridicată (depozitele sedimentare aluvionare, afînate, necoezive, neconsolidate, umpluturile, terenurile saturate) contribuie la majorarea efectelor seismice de 2—5 ori în raport cu straturile compacte, tari şi consolidate. Aşa se explică marile dezastre semnalate în timpul unor cutremure puternice, dintre care pot fi citate următoarele: San Francisco—California 1906, Messina—Italia 1908, Hansu şi Sansi—China 1920, Tokyo şi Yokohama—Japonia 1923, Fukui—Japonia 1948, Mexico City 1957, Agadir—Maroc 1960, Valdivia şi Conception Chile 1960, Scopje—Iugoslavia 1963, Anchorage—Alaska, 1964, Niigata—Japonia 1964, Caracas—Venezuela 1967, Konya—India 1967, Tokachi Oki—Japonia 1968, Lima—Peru 1974, Tangshan—China 1976, Mindanao—Filipine 1976, Khorasan—India, 1979, El Asnan—Algeria 1980 etc.

Influenţa proprietăţilor straturilor superficiale asupra configuraţiei şi intensităţii mişcării seismice este pusă în evidenţă în figura 7.29 [71], în care sînt redate înregistrările instrumentale obţinute la Arvin Tehachiapi în timpul cutremurului din Kern County-Taft din 21 iulie 1952. Astfel, în

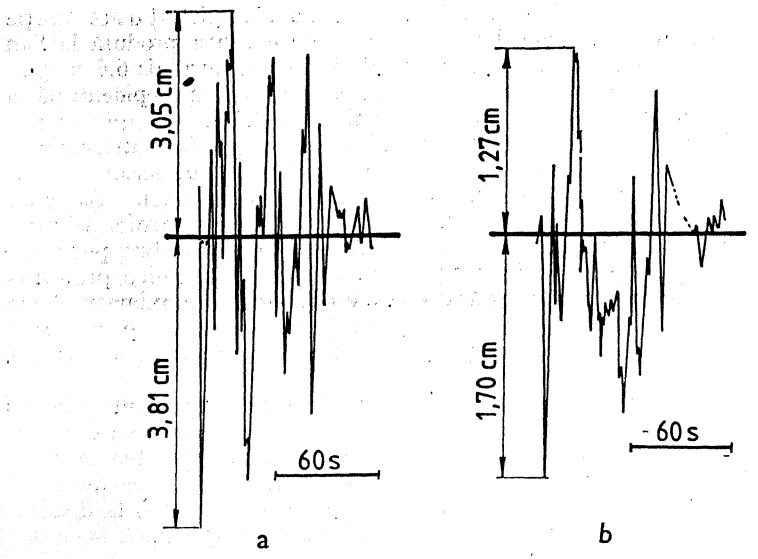


Fig. 7.29

figura 7.29, *a* este redată înregistrarea deplasărilor într-un teren aluvionar, iar în figura 7.29, *b* se prezintă înregistrarea deplasărilor într-un teren compact, stîncos, ambele fiind obţinute la suprafaţa liberă a terenului.

7.10.4. Focalizarea fenomenelor seismice

Focalizarea undelor seismice, în anumite zone relativ restrînse situate la suprafaţa terenului, reprezintă un proces de propagare şi amplificare locală extrem de complex, încă neelucidat în totalitate, care se manifestă uneori cu violenţă, independent de distanţa epicentrală. La generarea acestui fenomen seismic particular, un rol important îl au caracteristicile geologice globale ale mediului de propagare, precum şi condiţiile locale specifice straturilor superficiale.

Se admite că focalizarea fenomenelor seismice survine în acele zone în care există depozite sedimentare sau aluvionare adînci, sensibile din punct de vedere dinamic. Apariţia focalizării pe suprafeţe destul de limitate, poate fi atribuită şi procesului de reflexie şi refracţie a undelor seismice la contactul cu anumite discontinuităţi geologice existente în mediul de propagare. Acestor cauze li se asociază perioadele predominante ale depozitului geologic local, proprietatea de filtru dinamic a mediului de propagare, precum şi interacţiunea dintre stratele superficiale. S-a constatat că o influenţă importantă o are configuraţia topologică a zonelor în care se manifestă cutremurele puternice. Asemenea fenomene de focalizare a efectelor seismice de suprafaţă se înregistrează cu regularitate în timpul cutremurelor de mare intensitate. Dintre cazurile de excepţie pot fi menţionate focalizările puternice produse cu ocazia cutremurelor de la Fukui—Japonia 1948, Skopje—Iugoslavia 1963, Caracas—Venezuela 1967, precum şi de la San Fernando—California 1971, cînd staţia din munţii

San Gabriel situată în apropierea barajului Pacoima a înregistrat o accelerație maximă care a depășit 1 g. Focalizarea seismică de excepție produsă la San Fernando se datorește și parametrilor particulari ai cutremurului: 6,6 magnitudinea Richter, 13 km adîncimea focarului, 4 km distanța epicentrală a stației San Gabriel și 7 s durata șocului seismic (fig. 7.13).

În general, apariția fenomenelor de focalizare este specifică cutremurelor normale sau superficiale. În acest sens poate fi menționat șocul seismic produs în orașul marocan Agadir (29 februarie 1960) situat pe un teren aluvionar stratificat în apropierea oceanului Atlantic. Amploarea catastrofei seismice (distrugerea aproape completă a orașului și mai mult de o treime din populație dispărută), se explică prin focalizarea puternică a undelor seismice provenite din focarul aflat în imediata vecinătate, la o adîncime de aproximativ 3 km deși magnitudinea a fost destul de redusă ($M = 5{,}7$) și de asemenea prin durata (semnificativă) destul de ridicată pentru asemenea categorii de cutremure (15 s).

Cu toate că focalizarea seismică este influențată direct și de mecanismul de focar, caracteristic cutremurelor superficiale de faliere, cutremurul intermediar vrîncean din 4 martie 1977 a pus în evidență numeroase fenomene de focalizare și directivitate pronunțate ale undelor seismice. Asemenea fenomene s-au produs în București, Zimnicea, Turnu Măgurele și Craiova, la distanțe epicentrale apreciabile, ceea ce reprezintă o situație aproape unică în istoria seismologiei cu atît mai mult cu cît asemenea fenomene, chiar de mai mică amploare, nu s-au semnalat în zone apropiate de epicentru, deși condițiile geologiei locale erau favorabile în acest sens.

7.10.5. Comportarea terenului în timpul cutremurelor. Deformări cu caracter permanent

Principalii factori care influențează asupra comportării terenurilor, în timpul cutremurelor puternice, sînt:

— caracteristicile cutremurului (intensitate-accelerație maximă-magnitudine, durata mișcării, distanța epicentrală, adîncimea focarului etc.);

— caracteristicile geologice globale ale mediului de propagare cuprins între sursă și amplasament;

— caracteristicile geologice locale ale amplasamentului (geomorfologia, stratigrafia, grosimea depozitului superficial, nivelul apelor subterane etc.);

— caracteristicile fizico-mecanice și dinamice ale terenului (rezistență mecanică, unghi de frecare internă, porozitate, consistență, perioade predominante etc.).

Cele mai importante modificări care pot surveni în starea de echilibru a straturilor superficiale sînt:

— rupturi în scoarță (ascendente sau descendente) însoțite de prăbușiri sau procese de faliere;

— alunecări de terenuri care pot antrena deplasarea versanților;

— reactivarea unor falii existente;

— tasări, produse prin fenomenul de compactare, ale depozitelor granulare necoezive;

— lichefierea depozitelor nisipoase saturate.

Deformările permanente cu caracter tectonic sînt în general specifice cutremurelor cu focarul relativ superficial. În acest sens pot fi menționate efectele tectonice provocate de mișcări seismice puternice în orașele Fukui—Japonia (1948), Puerto Montt—Chile (1960), Agadir—Maroc (1960), Anchorage

—Alaska (1964), Niigata—Japonia (1964), San Fernando—California (1971), Managua—Nicaragua (1972), El Asnan—Algeria (1980) etc.

Fenomenele de lichefiere, ca urmare a creșterii presiunii apei din porii nisipurilor granulare aparent compacte, conduc la cedări instantanee ale terenului, însoțite de tasări diferențiate și presiuni laterale importante. Asemenea fenomene s-au manifestat la Puerto Montt și Valdivia (1960), la Niigata (1964), Anchorage (1964), Tokachi-Oki (1968), San Fernando (1971), Tangshan (1976) etc.

Terenurile cele mai sensibile la deformări cu caracter permanent sînt cele cu pronunțată neomogenitate, slab consolidate și de consistență redusă. Din această categorie fac parte depozitele aluvionare, alcătuite din materiale granulare (nisipuri fine, pietrișuri mărunte), afînate și saturate, definite prin compoziția granulometrică, densitatea aparentă, textură, rezistența la forfecare, nivelul apelor subterane etc.

Cutremurul vrîncean din 4 martie 1977, deși intermediar, a produs modificări morfologice destul de importante ale terenului, dar izolate ca răspîndire și amploare, mai ales în zonele de sud ale țării [131]. Astfel, s-au produs crăpături în scoarță și compactări de teren în zona subcarpatică (județele Focșani, Buzău și Prahova), precum și în unele locuri situate în Cîmpia Română (Slobozia, Giurgiu, Zimnicea, Turnu Măgurele) și în Oltenia (Craiova). Fenomene de lichefiere a depozitelor de nisip saturate au fost semnalate în special de-a lungul luncii Dunării (Giurgiu, Zimnicea și Turnu Măgurele), precum și în municipiul Iași.

În afara efectelor distructive pe care le are acțiunea dinamică produsă de mișcarea seismică asupra construcțiilor, deformările permanente ale terenurilor pot provoca uneori dezastre mult mai mari, așa cum s-a întîmplat în timpul cutremurelor din orașele Fukui (1948), Anchorage (1964) și Niigata (1964). Cele mai afectate sînt construcțiile situate pe falii active sau potențiale (în cazul cînd acestea sînt identificate). Caracteristicile de deformare ale terenului constituie unii din parametrii de bază în activitatea de elaborare a hărților de micro/macrozonare seismică a teritoriului.

7.11. SEISMICITATEA TERITORIULUI ROMÂNIEI

7.11.1. Caracteristicile cutremurelor din România

România este una din țările lumii supusă unui regim seismic persistent, periodic și sever, provenind din surse cu caracter tectonic de mare diversitate. Astfel, pe teritoriul țării noastre se manifestă activități seismice cu caracter particular datorită diversității categoriilor de cutremure: superficiale ($H \leqslant 5$ km), crustale (normale) cu focar ascendent ($5 \leqslant H \leqslant 30$ km) și intermediare ($70 \leqslant H \leqslant 170$). Cutremurele cele mai intensive care se produc în România sînt de tip intermediar (cu focare persistente), fiind localizate în cotul munților Carpați în zona Vrancea. Cutremurele care se produc în Vrancea, numite și *cutremure moldave*, reprezintă fenomene seismice singulare pe plan mondial prin caracteristicile geometrice, cinematice și dinamice ale focarelor și prin mecanismul de generare al acestora. După B. Gutenberg și Ch. F. Richter, [66] cutremurele vrîncene sînt asimilate, ca mecanisme de focar, cu cele care se produc în munții Hindu Kush (Afganistan) și Bucaramanga (Columbia). Efectele acestor cutremure sînt neînsemnate întrucît se produc în zone slab urbanizate și industrializate. Cutremurele vrîncene

au în general focarele situate la adîncimi $H = 70...170$ km, dar cele mai frecvente şi violente au poziţia focarului la $H = 130...150$ km [161].

Tectonica generală a teritoriului României pune în evidenţă un conglomerat de plăci şi subplăci convergente în zona Vrancea (fig. 7.30). Centura alpino-carpato-caucaziană, cu structură geologică extrem de complexă, situată la extremitatea vestică a plăcii gigantice euroasiatice, cuprinde subplăcile din Mediterana de vest, din aria panonică şi transilvană, precum şi din Marea Egee, fiind delimitată prin munţii Carpato-Balcanici. Subplăcile situate în sudul munţilor Carpaţi, conectate cu cele balcanice, definesc global subplaca (sau platforma) Moesică. Aceste conglomerate de subplăci caracterizează zone tectonice cu seismicitate ridicată şi activă în care se produc cutremure generate de focare superficiale, crustale (normale) şi subcrustale (intermediare), prin procese de faliere sau de subducţie a plăcilor. La confluenţa extremităţii estice a plăcii euroasiatice, subplăcilor intra-alpină şi moesică este situat teritoriul României, caracterizat prin tectonică neomogenă şi activitate seismică pronunţată în curbura Carpaţilor orientali (definită de zona Vrancea), prin cutremure de frecvenţă şi intensitate variabile. În afara acestei zone, bine precizată seismic, care generează cutremure subcrustale (intermediare), pe teritoriul României se mai produc cutremure superficiale şi crustale cu energii moderate. Localizarea cutremurelor în zona Vrancea, în lungul depresiunii Focşani—Odobeşti, a permis identificarea genezei mişcărilor seismice puternice care se manifestă la intervale de timp destul de mari, caracterizate prin energii eliberate în focar imense şi distribuite radial neuniform.

Cutremure superficiale şi crustale, generate prin mecanisme de faliere au fost localizate în Banat, Crişana, Maramureş, Bucovina, zonele Făgăraşului şi Tîrnavelor, precum şi în Cîmpia Română şi sudul Dobrogei. Cele mai recente cutremure superficiale semnificative s-au produs în lungul faliilor Videle—Roşiorii de Vede (20 aprilie 1977) şi Ploieşti—Fierbinţi—Călăraşi (28 iunie 1977).

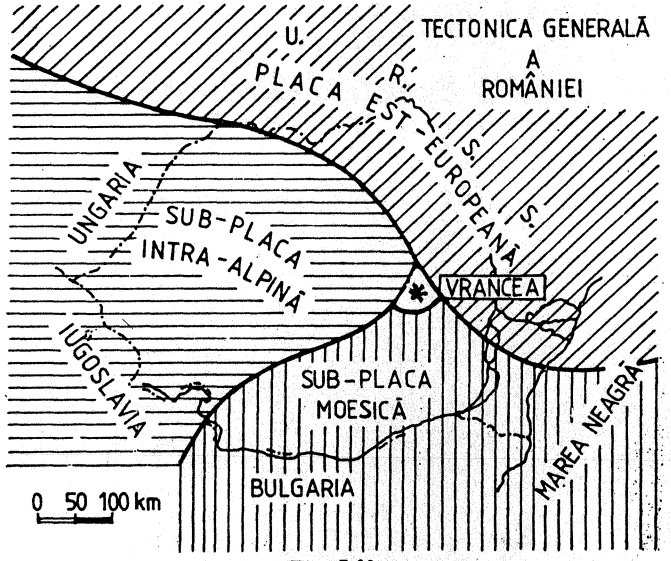


Fig. 7.30

Avînd în vedere totalitatea surselor seismice generatoare de mişcări tectonice superficiale, rezultă că peste 50% din teritoriul României este afectat de cutremure puternice sau moderate.

7.11.2. Scurt istoric

Documentele istorice menţionează că pe teritoriul ţării noastre s-au manifestat de-a lungul secolelor cutremure puternice, provenite în special din zona Vrancea, care au produs victime omeneşti şi importante pagube materiale.

Dintre cutremurele cele mai violente, cu efecte distrugătoare deosebite, istoriografia a reţinut următoarele date semnificative: 29 august 1471 (avarierea Mănăstirii Neamţ), 8 noiembrie 1620, 12 iunie 1701, 11 iunie 1738 (distrugerea turnului de la Curtea Domnească), 26 octombrie 1802 (prăbuşirea Turnului Colţei), 1 iulie 1829 (produs în zona Crişana), 13 noiembrie 1868 etc. În acest secol, cele mai importante mişcări seismice s-au produs la 6 octombrie 1908, 25 mai 1912, culminînd cu dezastrele înregistrate la 10 noiembrie 1940 şi 4 martie 1977.

Cutremurul vrîncean din 1940, unul dintre cele mai puternice după 1802, a provocat numeroase victime şi imense pagube materiale pe o suprafaţă mare a teritoriului ţării [15]. Distrugerea completă a blocului Carlton din Bucureşti, construcţie cu 12 etaje avînd structura de rezistenţă din cadre de beton armat, a constituit pentru acea epocă cea mai mare catastrofă din tehnica betonului armat. Epicentrul acestui cutremur a fost localizat în zona Vrancea prin coordonatele 45°8′ latitudine nordică şi 26°7′ longitudine estică. Focarul cutremurului a fost situat la o adîncime de circa 133 km, iar ca severitate s-a apreciat ca fiind de magnitudine $M = 7{,}4$ şi de intensitate seismică maximă $MM = IX$. În figura 7.31 se prezintă harta cu izoseistele acestui cutremur [158].

Ultimul cutremur de amploare, generat de un focar situat tot în curbura munţilor Carpaţi (Vrancea) s-a manifestat cu deosebită violenţă în seara zilei de 4 martie 1977.

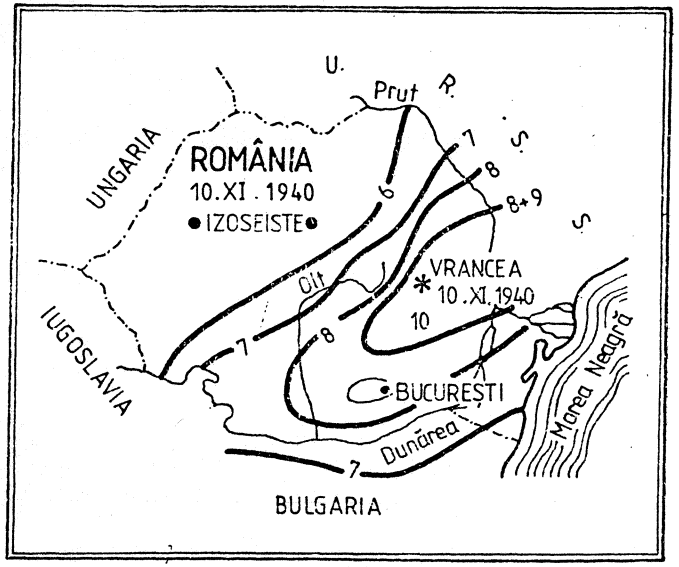


Fig. 7.31

Prin dimensiunile pagubelor materiale, atît în mediul urban, cît şi rural, acest cutremur poate fi considerat ca cel mai dezastruos din istoria României, avînd în vedere dezvoltarea socială şi industrială pe care au cunoscut-o în ultimele decenii zonele afectate de seism. Date de natură seismologică asupra cutremurului din 4.III.1977 vor fi prezentate în continuare, iar cele referitoare la comportarea construcţiilor în capitolul 8.

În tabelul 7.7 se prezintă o sinteză a cutremurelor cu magnitudinea $M \geq 5{,}5$ produse pe teritoriul României în perioada 1901—1984, pe baza cercetărilor efectuate de C. Radu [165].

TABELUL 7.7

CUTREMURELE CU MAGNITUDINEA $M \geq 5{,}5$ PRODUSE PE TERITORIUL ROMÂNIEI ÎN PERIOADA 1901—1984

Nr. crt.	DATA	ORA (GMT)	LATIT. N (grade)	LONG. E (grade)	ADÎNC. H (km)	I (MSK)	M RICHTER	ZONA
1	1903.IX.13	08:02	45,7	26,6	60—163	VI—VII	6,3	Vrancea
2	1904.II.06	02:49	45,7	26,6	60—163	VI	5,7	Vrancea
3	1908.X.06	21:39	45,5	26,5	150	VII—VIII	6,75	Vrancea
4	1912.V.25	18:01	45,7	27,2	80	VII	6,0	Vrancea
5	1916.I.26	07:38	—	—	5—60	VIII	6,5	C împulung
6	1917.VII.11	03:23	45,7	26,6	60—163	VI	5,5	Vrancea
7	1929.XI.01	06:57	45,9	26,5	160	VI—VII	5,75	Vrancea
8	1934.III.29	20:06	45,8	26,5	90	VII	6,25	Vrancea
9	1940.VI.24	09:57	45,9	26,6	115	V—VI	5,5	Vrancea
10	1940.X.22	06:37	45,8	26,4	122	VII	6,5	Vrancea
11	1940.XI.08	12:00	45,5	26,2	145	VI	5,5	Vrancea
12	1940.XI.10	01:39	45,8	26,7	133	IX	7,4	Vrancea
13	1940.XI.11	06:34	46,0	26,8	150	VI	5,5	Vrancea
14	1945.III.12	20:52	45,6	26,4	125	VI	5,5	Vrancea
15	1945.IX.07	15:48	45,9	26,5	75	VII—VIII	6,5	Vrancea
16	1946.XI.03	18:47	45,6	26,3	140	VI	5,5	Vrancea
17	1948.V.29	04:49	45,8	26,5	140	VI—VII	5,75	Vrancea
18	1950.VI.20	01:08	45,9	26,5	160	VI	5,5	Vrancea
19	1960.X.13	02:21	45,7	26,4	160	VI	5,5	Vrancea
20	1966.X.02	11:21	45,7	26,5	140	VI	5,5	Vrancea
21	1973.VIII.20	15:18	45,7	26,5	73	VI	5,5	Vrancea
22	1976.X.01	17:50	45,7	26,5	146	V—VI	5,5	Vrancea
23	1977.III.04	19:21	45,78	26,78	93	—	5,5	Vrancea
24	1977.III.04	19:22	45,72	26,94	79	—	6,5	Vrancea
25	1977.III.04	19:22	45,48	26,78	93	—	6,5	Vrancea
26	1977.III.04	19:22	45,34	26,30	109	VIII—IX	7,2	Vrancea

7.11.3. Cutremurul din 4 martie 1977

Datorită modului particular de generare, mecanismului de focar şi compoziţiei spectrale, cutremurul din 4 martie 1977 reprezintă o experienţă seismologică unică pe plan mondial prin violenţa acţiunii şi prin implicaţiile de ordin seismologic, geofizic, ingineresc, economic şi social. Aproape 30% din teritoriul României a fost puternic afectat, înregistrîndu-se pierderi de vieţi omeneşti şi imense pagube materiale, în special în zonele din sudul ţării (Bucureşti, Vălenii de Munte, Cîmpina, Zimnicea, Turnu Măgurele, Craiova etc.).

Din datele oficiale a rezultat că în urma cutremurului, 1570 de persoane şi-au pierdut viaţa, 11 300 au fost accidentate, iar circa 32 900 de construcţii au fost distruse sau grav avariate, cele mai mari daune fiind înregistrate în Bucureşti.

Aria de manifestare a mişcării seismice a fost deosebit de extinsă, cutremurul resimţindu-se din Sicilia pînă la Moscova şi Leningrad şi de asemenea în sud pînă în Grecia, aşa cum reiese şi din harta distribuţiei intensităţilor macroseismice elaborată de N. V. Shebalin [112] în anul 1977 (fig. 7.32).

Magnitudinea medie a cutremurului s-a apreciat la valoarea $M = 7{,}2$ (căreia îi corespunde o energie eliberată de aproximativ $4 \cdot 10^{22}$ ergi), iar adîncimea focarului $H \simeq 100$ km (există mai multe păreri în acest sens). Deşi magnitudinea siesmului din 4.III.1977 a fost mai mică decît cea a cutremurului din 10.XI.1940 ($M = 7{,}4$), datorită adîncimii relativ mai mici a focarului (faţă de 133 km) efectele produse la suprafaţa liberă a terenului au fost mai ample.

Cea mai semnificativă înregistrare instrumentală s-a obţinut în staţia seismică INCERC-Bucureşti cu un accelerograf tip SMAC-B (de construcţie japoneză). Accelerogramele obţinute, şi apoi corectate, sînt reprezentate în figurile 7.14, 7.15 şi 7.16.

Cutremurul din 4 martie 1977 a fost definit ca un *eveniment seismic multiplet* cu caracter de *multişoc*, care pune în evidenţă complexitatea particulară a focarului şi a mecanismului de generare [32], [112], [138], [163]. Întrucît poziţia epicentrului este aproximativ identică cu cea a cutremurului din 1940, se presupune că există o tendinţă de „migrare" a focarului către suprafaţă. Directivitatea efectelor seismice importante (implicit a energiei eliberate în focar) s-a manifestat către S—W, în timp ce în anul 1940 către N—E, ceea ce justifică fenomenele de amplificare şi focalizare pe direcţia Bucureşti — Zimnicea—Svistov (Bulgaria).

Cutremurul din 10 noiembrie 1940 s-a caracterizat printr-un şoc unic, în timp ce mecanismul de focar al cutremurului din 4 martie 1977 a fost definit prin trei şocuri multiple, de natură tectonică diferită, succedate pe o durată de 19,2 s de la iniţierea seismului. Caracterul multişoc al evenimentului seismic din 4.III.1977 a fost identificat pentru prima dată de E. Peterschmitt [138], [157], stabilindu-se în cadrul CSEM principalii parametri geometrici prezentaţi în tabelul 7.8, cărora li s-au asociat şi magnitudinile determinate de C. Radu şi I. Apopei [163].

4 MARTIE 1977 • IZOSEISTE GENERALIZATE
/ propunere V.N.Shebalin /

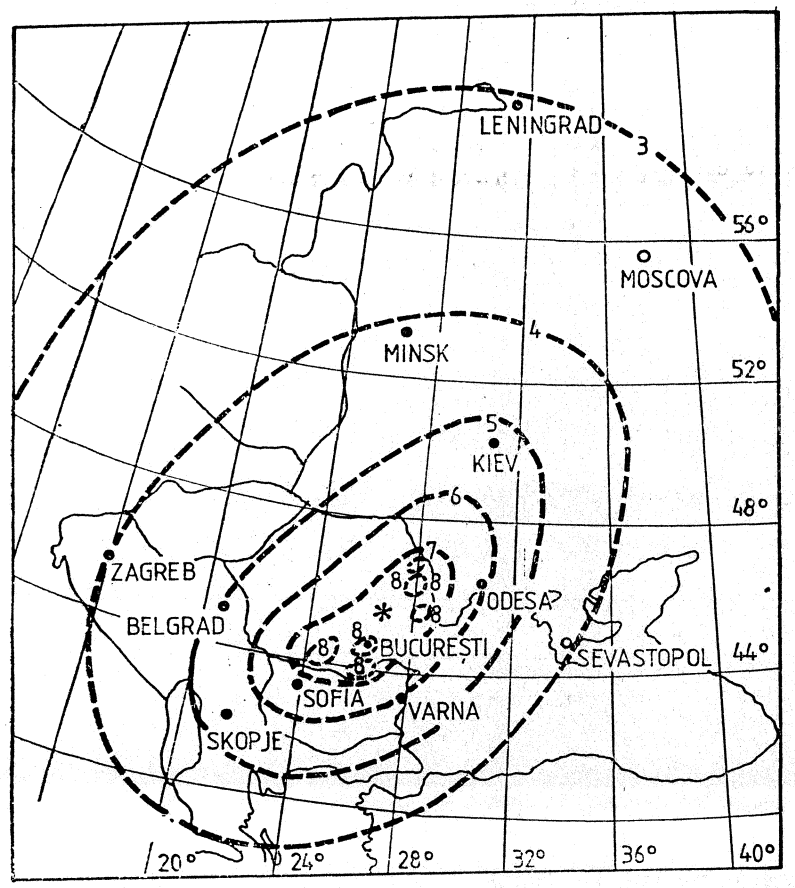


Fig. 7.32

TABELUL 7.8

4 MARTIE 1977	LATIT. N (grade)	LONG. E (grade)	ADÎNC. H (km)	ORA (GMT)	DIF. TIMP (s)	MAGNIT. M
PREȘOC F	45,78	26,78	93	19:21:56,2	0	5
ȘOCUL S_1	45,72	26,94	79	19:22:00,9	4,7	6,5
ȘOCUL S_2	45,48	26,78	93	19:22:08,5	12,3	6,5
ȘOCUL S_3	45,34	26,30	109	19:22:15,4	19,2	7,2

Asupra valorii magnitudinii celui de al treilea șoc S_3 s-au elaborat numeroase studii, rezultatele obținute fiind aproape identice. Dintre aceste rezultate se menționează următoarele:

$M = 7{,}2$ — National Earthquake Information Service, Colorado (Pasadena Station) — U.S.A. (NEIS);

$M = 7{,}3$ — Institut Fiziki Zemli, Moskva — S.S.S.R. (IFZ);

$M = 7{,}2$ — United States Geological Survey — U.S.A. (USGS);

$M = 7{,}1$ — Centrul de Fizica Pămîntului și Seismologie, București — România (CFPS);

$M = 7{-}7{,}25$ — Centre Séismologique Europeo-Méditerranéen, Strasbourg — France (CSEM).

Prin analizele multiple efectuate ulterior, C. Radu [164] a stabilit în mod definitiv valoarea $M = 7{,}2$ pentru șocul principal S_3 care s-a produs după 19,2 s de la preșoc F, numit și foreshock. În figura 7.33 este reprezentată distribuția epicentrelor corespunzătoare preșocului F și celor trei șocuri succesive S_1, S_2, S_3.

Cu privire la energia seismică eliberată în focar, în lucrarea [59] s-a aplicat relația dintre energie E (exprimată în ergi) și magnitudine M, și anume $\log E = 11{,}8 + 1{,}5\,M$, stabilită de Ch. F. Richter, pentru cutremurele intermediare vrîncene. Pe baza acestei relații s-au evaluat energiile seismice ale unor cutremure semnificative produse în perioada 1940—1977. Se face mențiunea că și celelalte caracteristici geometrice și de magnitudine, date în tabelul 7.9, sînt conținute în studiul citat anterior.

Compararea poziției epicentrelor cutremurelor din tabelul 7.9 (fig. 7.34) cu situația din 4.III.1977 (fig. 7.33), pune în evidență persistența și stabilitatea unei suprafețe epicentrale restrînse, independent de magnitudine și adîncimea focarului.

Cercetările efectuate de D. Enescu împreună cu E. Crișan și R. Plaviță [59] au condus la corectarea relației de legătură $E{-}M$ (fig. 7.35) obținîndu-se:

$$\log E = 12{,}51 + 1{,}5M.$$

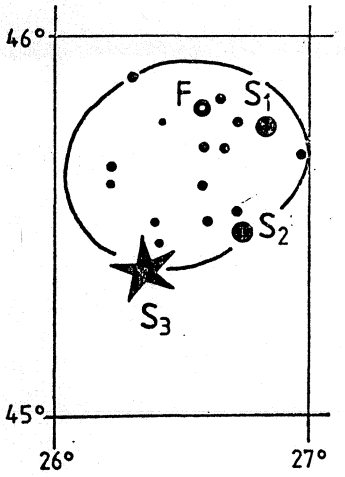


Fig. 7.33

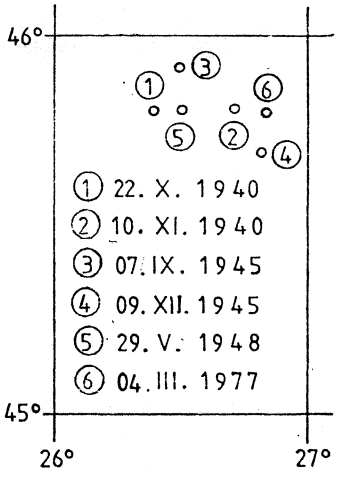


Fig. 7.34

TABELUL 7.9

Nr. crt.	CUTREMUR (data)	ORA (GMT)	COORD. EPICENTRU LATIT. N	COORD. EPICENTRU LONG. E	ADÎNCIME H (km)	MAGNIT. M	ENERGIE (ergi)
1	22.X.1940	06:37	45°8′	26°4′	125	6,5	$3,55 \times 10^{21}$
2	10.XI.1940	01:39	45°8′	26°7′	133	7,4	$7,94 \times 10^{22}$
3	07.IX.1945	15:48	45°9′	26°5′	80	6,3 6,5	$1,78 \times 10^{21}$ $3,55 \times 10^{21}$
4	09.XII.1945	06:08	45°7′	26°8′	80	6,0	$6,31 \times 10^{20}$
5	29.V.1948	04:48	45°8′	26°5′	130	5,8	$2,70 \times 10^{20}$
6	04.III.1977	19:22	45°8′	26°8′	~100	7,2	$3,98 \times 10^{22}$

Efectele de suprafață observate, asociate unor înregistrări instrumentale, au permis trasarea izoseistelor cutremurului din 4.III.1977 de forma prezentată în harta din figura 7.36, elaborată de T. Iosif și S. Iosif [112]. Rezultă că intensitatea maximă s-a manifestat în zone destul de limitate situate pe direcțiile N—E și S—W de epicentru (izoseista $I = 7$), precum și în anumite perimetre restrînse în care efectele seismice au fost focalizate și amplificate: Huși și Iași (către N—E) și București, Zimnicea și Craiova (către S—W). În același timp, forma asimetrică a izoseistei $I = 7$, datorată rolului de ecranare al munților Carpați, definește propagarea neuniformă a energiei eliberate în focar, iar conturul eliptic (marcat cu linii întrerupte în figura 7.36) evidențiază fenomenul de directivitate accentuată a efectelor seismice de suprafață. Amplificările macroseismice înregistrate în zonele menționate se datoresc în special sensibilității seismice a straturilor geologice specifice depozitelor superficiale, precum și mecanismului de focar, deși distanțele epicentrale au fost relativ mari (Huși 140 km, Iași 160 km, București 165 km, Zimnicea 260 km, Craiova 290 km).

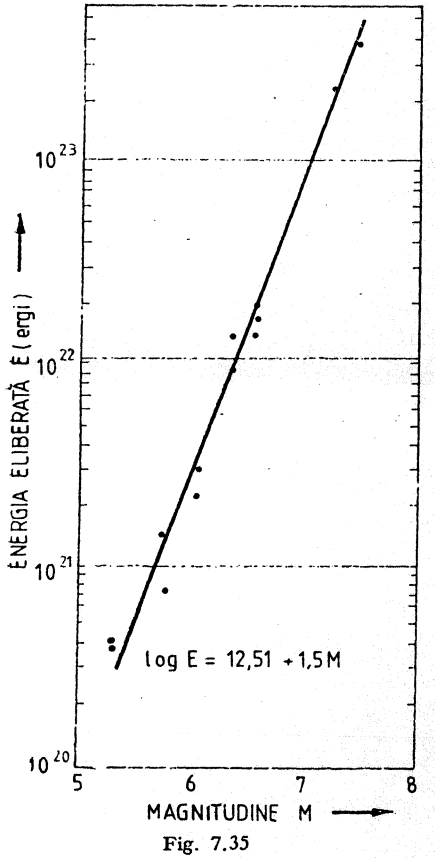


Fig. 7.35

În urma unui program de cooperare cu centre seismologice din Albania, Austria, Bulgaria, Cehoslovacia, Finlanda, R.D.G., Grecia, Iugoslavia, Polonia, Ungaria și U.R.S.S. a fost elaborată harta cu izoseistele cutremurului din 4 martie 1977 (fig. 7.37) din care rezultă imensa arie de răspîndire a fenomenului seismic ($2 \cdot 10^6$ km^2—grade de intensitate seismică MSK $\geq$ IV).

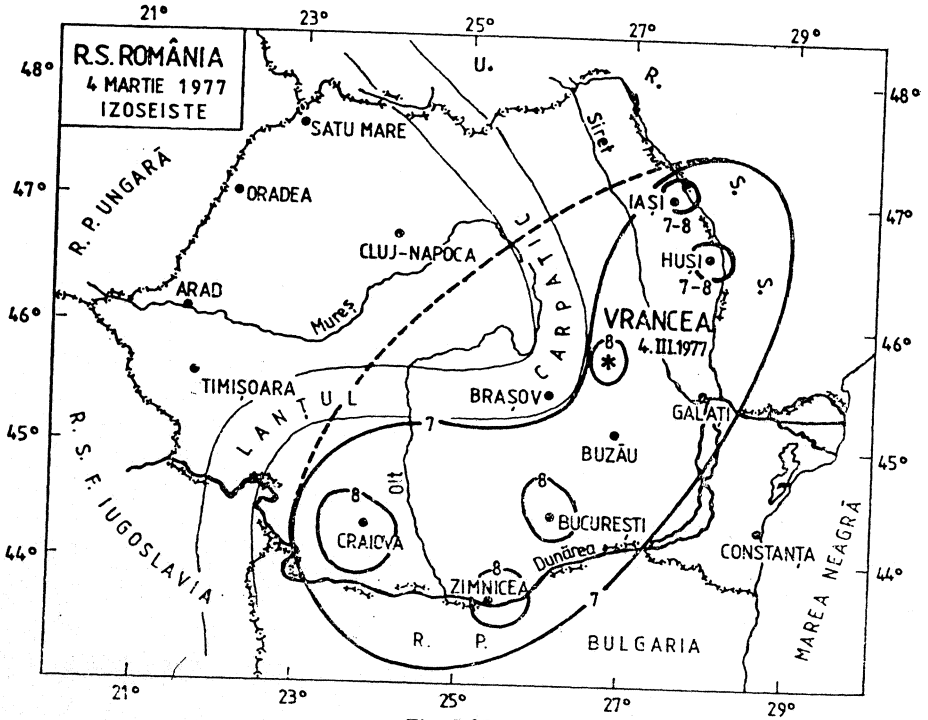


Fig. 7.36

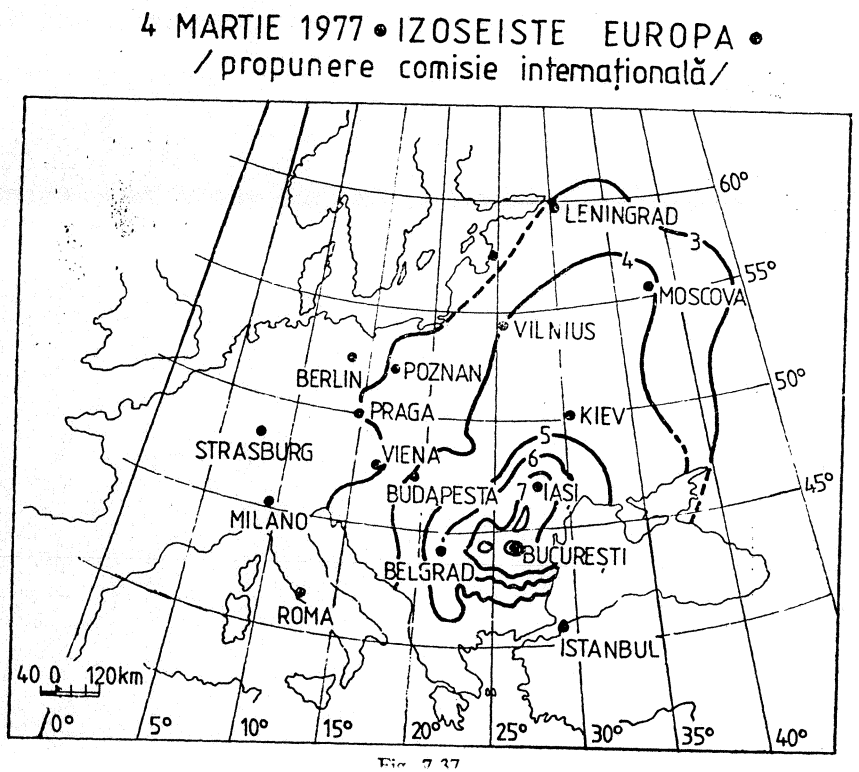


Fig. 7.37

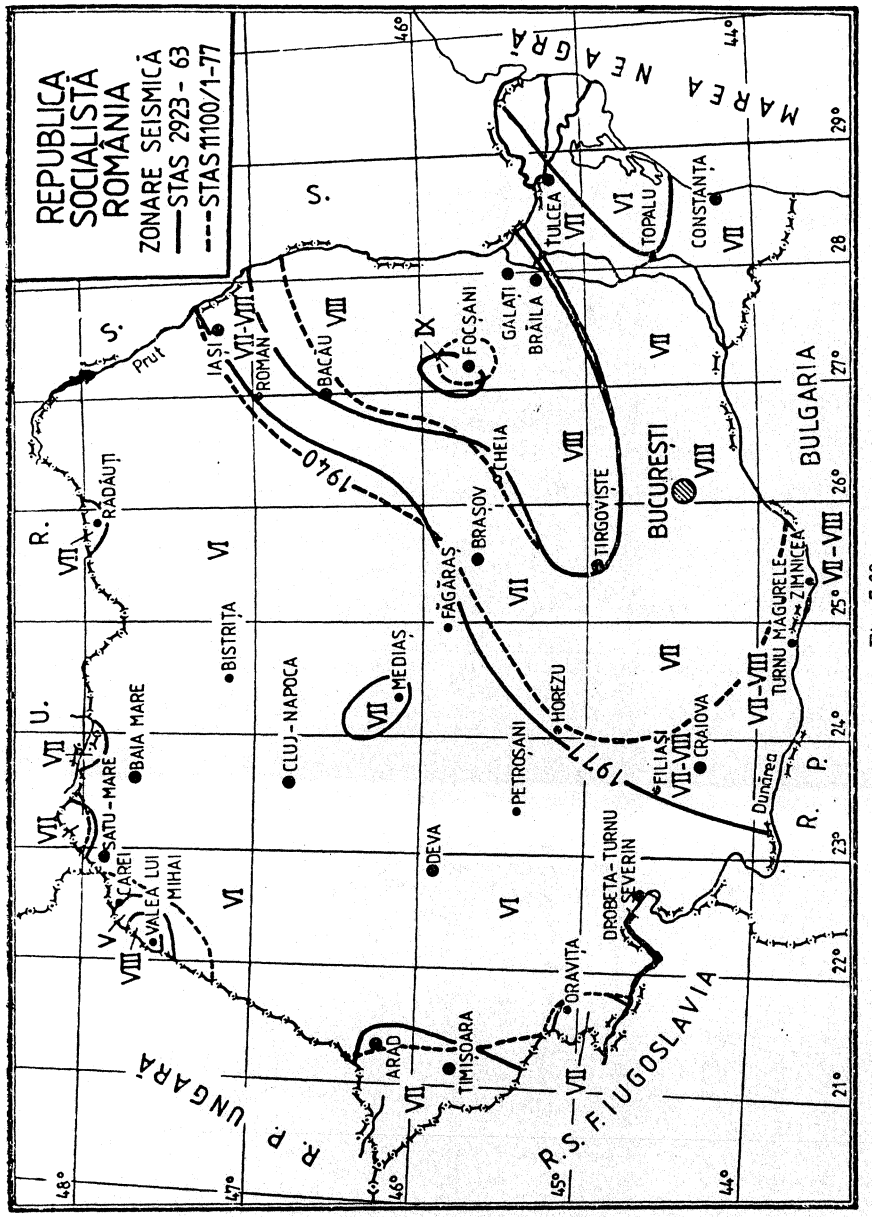


Fig. 7.38

Zonarea seismică a teritoriului țării noastre a suferit modificări și îmbunătățiri în urma seismului din 4.III.1977. Harta din figura 7.38 prezintă (comparativ) zonarea seismică oficială a României înainte și după acest cutremur.

* * *

Din succinta prezentare a seismicității teritoriului României rezultă că cele mai puternice cutremure produse în ultimele două secole au fost următoarele:

— 26 octombrie 1802, $M \simeq 7{,}5$,
— 10 noiembrie 1940, $M = 7{,}4$,
— 4 martie 1977, $M = 7{,}2$,

toate provenind din focarele intermediare situate în Munții Vrancea. S-a estimat că perioada de revenire a cutremurelor vrîncene cu magnitudinea $M = 7$ este de circa 33 ani, iar cu $M = 7{,}5$ de circa 81 ani.

Datorită particularităților mecanismului de producere (multișoc), a situației singulare pe care o reprezintă focarul intermediar vrîncean, precum și consecințelor sociale și economice produse, cutremurul din 4 martie 1977 a suscitat un deosebit interes pe plan internațional atît din punct de vedere seismologic, cît și ingineresc. El a fost analizat din toate punctele de vedere de specialiști români și străini; multe din studiile consacrate acestui eveniment seismic sînt citate pe parcursul lucrării și în lista bibliografică.

În această privință, celebrul seismolog american prof. Charles F. Richter (creatorul scării magnitudinilor) se exprima astfel, după 4 martie 1977, asupra cutremurelor care își au originea în zona Vrancea: . . . *„nowhere else in the world is a center of population so exposed to earthquake originating repeatedly from the same source“* . . . (. . . „de altfel, nu există nicăieri în lume o concentrare de populație atît de expusă la cutremure generate în mod repetat de aceeași sursă“ . . .).

7.12. PREDICȚIA CUTREMURELOR

Cercetările cu privire la predicția cutremurelor puternice, prin precizarea magnitudinii, momentului și locului, deși sînt de dată recentă au înregistrat pînă în prezent unele progrese semnificative.

Predicția cutremurelor poate contribui la evitarea pierderilor de vieți omenești și limitarea pagubelor materiale.

Dintre aspectele fundamentale care intervin în *predicția cutremurelor* se menționează:

- Localizarea zonelor potențiale sau active care pot genera cutremure puternice.
- Supravegherea acestor zone prin observații instrumentale sau de altă natură care să permită evidențierea unor elemente specifice premergătoare mișcărilor seismice.
- Identificarea calitativă și cantitativă a parametrilor caracteristici fenomenelor premergătoare cutremurelor.
- Investigarea, pe baza unor modele sau scenarii corespunzătoare, a informațiilor furnizate de fenomenele premergătoare.

Majoritatea cercetărilor în predicție au constatat că înaintea unui cutremur puternic anumite fenomene fizice devin variabile. Se apreciază că în general fenomenele premergătoare cutremurelor (fizice, mecanice, topologice sau biologice) sînt în număr foarte mare și numai prin asocierea și interpretarea tururor informațiilor pot fi exprimate concluzii cu privire la un viitor seism.

Seismologii din Japonia, S.U.A. și U.R.S.S. au reușit să prevadă pînă acum unele cutremure de slabă intensitate însă cel mai mare succes în predicția unor cutremure puternice l-au înregistrat seismologii din China. În acest sens, seismologii chinezi au reușit să prevadă distrugătorul cutremur din provincia Haicheng de la 4 februarie 1975 ($M = 7{,}3$), care a distrus peste 90% din construcții, precum și suita cutremurelor de mare intensitate din provincia Szechuan produse în zilele de 16, 22 și 23 august 1976 cu magnitudini $M = 7{,}2$, $M = 6{,}7$ și respectiv $M = 7{,}2$. Datorită avertizării din partea autorităților, s-a înregistrat o reducere substanțială a victimelor și pagubelor materiale.

În continuare, se prezintă o sinteză a principalelor metode de investigare, care pot conduce la definirea predicției cutremurelor.

7.12.1. Metode statistice

Metodele statistice se bazează pe interpretarea și extrapolarea informațiilor achiziționate din documentele istorice, sau prin observații de lungă durată, asupra cutremurelor, care în multe țări au început să fie catalogate pe perioade seculare. Principalele aspecte luate în considerare sînt următoarele:

- Cercetarea în teren a apariției unor crăpături, dislocări sau goluri de-a lungul marginilor unor falii sau plăci. Asemenea observații se întreprind mai ales în acele regiuni în care nu s-au semnalat cutremure în ultimul timp. Totdeauna o liniște temporară a unei astfel de regiuni poate prevesti evenimente seismice puternice. În această situație se află falia San Andreas — California care nu s-a mai reactivat din anul 1906.
- Urmărirea migrării epicentrelor, în special a acelora de la extremitățile plăcilor.
- Posibilitatea declanșării unor cutremure prin cauze neseismice (astronomice).

7.12.2. Metode geofizice

Metodele geofizice au în vedere modificarea sau variația unor parametri geometrici sau fizici măsurabili, într-un interval de timp dinaintea producerii cutremurului. Acești parametri, specifici fenomenelor seismice premergătoare, caracterizează comportarea rocilor înaintea declanșării unui cutremur puternic atunci cînd începe procesul de fracturare și de degradare a zonei focarului. Seismologii au identificat următoarele situații semnificative premergătoare:

- Modificarea configurației scoarței terestre. Acest fenomen este urmărit prin rețele de triangulații, extinse pe suprafețe imense, în zonele seismice active sau potențiale, sau prin detectoare cu laser amplasate pe sateliți staționari sau pe lună.
- Variația tensiunilor superficiale din scoarța terestră.
- Anomalii în privința vitezelor de propagare a undelor seismice P și S și de asemenea în conținutul spectral al semnalelor înregistrate. În anul 1971 seismologii sovietici au comunicat, după 25 ani de observații intensive, că într-o anumită perioadă înaintea unui cutremur raportul v_P/v_S scade cu circa 10% în comparație cu valoarea normală a acestui raport. Studiind acest aspect important în activitatea de predicție, seismologii americani au ajuns însă la concluzia că modificarea raportului v_P/v_S poate avea loc cu 25—75 ani înaintea unui cutremur de magnitudine $M = 8$, cu 6—10 ani înaintea unui cutremur cu $M = 7$, cu 1—2 ani cînd $M = 6$ și numai cu cîteva zile în cazul unui cutremur cu $M = 3$.
- Anomalii în cîmpul geomagnetic.
- Anomalii în rezistivitatea electrică, care poate crește înaintea unui seism cu 10 ... 20%, prin generarea de potențial electric în mediul de propagare.
- Variații în emisia și concentrația radonului (gaz cu proprietăți radioactive) sau altor gaze subterane.
- Variații pronunțate ale nivelului apelor subterane care în general crește brusc înaintea producerii șocului seismic.
- Abundența unor cutremure slabe sau moderate și apariția unor șocuri de prevenire.
- Manifestări de zgomote puternice ca urmare a inițierii proceselor de degradare a rocilor în focar (fisurări, ruperi) și producerii undelor de dilatație P.

Urmărirea instrumentală a tuturor fenomenelor menționate, precum și interpretarea lor corectă, pot conduce în mod eficient la predicția cutremurelor puternice.

Fenomene de tipul celor descrise s-au semnalat cu ocazia diferitelor mișcări seismice cum ar fi:

Anchorage—Alaska, 27 martie 1964. Cu cîteva ore înaintea declanșării cutremurului s-a produs o importantă perturbare a cîmpului geomagnetic, precum și concentrări de tensiuni și deformații în straturile superficiale ale crustei.

Niigata—Japonia, 16 iunie 1964. Cu 5 ani înainte s-a observat o ridicare cu circa 5 cm a scoarței terestre.

Taşkent—U.R.S.S. 26 aprilie 1966. S-au înregistrat mari variații în concentrația de radon cu 4 zile înaintea cutremurului.

San Fernando—California, 9 februarie 1971. Prin reinterpretarea înregistrărilor anterioare cutremurului, s-a constatat că raportul v_P/v_S scăzuse simțitor, pentru ca numai cu cîteva luni înaintea cutremurului să revină la normal. De asemenea s-au identificat anumite modificări ale configurației suprafeței terenului.

Tangshan—China, 28 iulie 1976. S-au observat puternice emanații de radon cu mult înaintea șocului seismic. Același fenomen a fost sesizat (pe lîngă altele) și înaintea cutremurelor prognozate din 16, 22 și 23 august 1976 din provincia Szechuan.

Imensa falie San Andreas din California, care ar putea genera în viitor cutremure de magnitudine $M = 7—8$, este urmărită instrumental la suprafață și în adîncime prin tehnici interferometrice cu laser, cu magnetometre și gravimetre, precum și cu înregistratoare de radon și rezistivitate electrică, în vederea detectării fracturilor și a tuturor modificărilor tectonice care ar putea interveni. Numai în zona Los Angeles există în dotarea USGS (United States Geological Survey) peste 150 de stații seismice de avertizare. Din 1973 USGS și USCGS (United States Coast and Geodetic Survey), cu sprijinul Fundației Naționale de Știință, au stabilit o rețea imensă pentru cercetări de predicție și de avertizare pe întreg teritoriul S.U.A.

Seismologii din China, prin organisme guvernamentale, desfășoară o puternică activitate de predicție a cutremurelor bazați pe circa 20 de stații operaționale de observare, primind informații de la peste 300 de stații seismice și peste 5000 de puncte de observație, la care se mai adaugă și contribuția cîtorva mii de seismologi amatori.

Cercetări de anvergură asupra predicției se efectuează cu succes și în U.R.S.S. și Japonia prin mari rețele seismice și de observare.

7.12.3. Metode biologice

Metodele biologice sînt bazate pe comportamentul şi reacţiile animalelor pe intervalul premergător cutremurelor intensive. Manifestarea neobişnuită a unor animale se datoreşte în special schimbării cîmpului electrostatic şi magnetic, mirosului gazelor emanate, sunetelor şi vibraţiilor imperceptibile pentru oameni etc.

Dintre cele mai sensibile animale se menţionează reptilele, peştii, cîinii, caii, şoarecii, păsările, insectele etc. În vederea urmăririi modului de comportare s-au creat staţii seismice „biologice" în cadrul reţelelor naţionale de observaţie şi avertizare. În această privinţă cea mai mare experienţă (milenară) o au chinezii. Fenomene biologice de excepţie s-au constatat înaintea cutremurelor din Italia (1976), China (1976) şi Guatemala (4 februarie 1976).

7.12.4. Implicaţii sociale şi economice

Activitatea de predicţie a cutremurelor puternice, precum şi identificarea zonelor cu risc seismic ridicat reprezintă o problemă fundamentală în ceea ce priveşte protejarea oamenilor şi conservarea bunurilor materiale. Procesele geologice care generează cutremure fiind extrem de lente, este necesar ca observaţiile şi investigaţiile să se desfăşoare pe perioade lungi de timp pentru a putea stabili anumite legi care guvernează mişcările seismice ale terenului.

În această privinţă experienţa pozitivă a cutremurului prevăzut de la Haicheng (1975) a condus la următoarele concluzii:

- Oamenii de ştiinţă pot obţine informaţii de mare valoare din evenimentele specifice premergătoare cutremurelor puternice.
- Pot fi definite şi ierarhizate principalele fenomene premergătoare.
- Populaţia poate fi educată astfel încît să se evite panica şi să se menţină disciplina în perioada de avertizare.

Seismologii se întreabă dacă predicţia unui eventual cutremur trebuie făcută publică sau ţinută în secret. În legătură cu prevenirea prin avertizare se ridică mai multe probleme, dintre care se menţionează:

— cum sînt oamenii educaţi pentru a reacţiona cu calm şi disciplină la un eventual semnal de avertizare a unui cutremur puternic;

— cine îşi asumă responsabilitatea asigurării evacuării populaţiei şi a întreruperii anumitor activităţi economice, printre care unele de vîrf cum ar fi: golirea barajelor, oprirea funcţionării reactoarelor atomice, întreruperea gazelor şi a reţelelor de înaltă tensiune, suspendarea traficului feroviar etc.;

— ce se va întîmpla dacă alarma este falsă, ceea ce devine posibil datorită incertitudinilor şi inexactităţii interpretării evenimentelor premergătoare.

Este evident că numai un organism oficial, guvernamental, va putea decide pe baza predicţiei seismologilor, asupra avertizării populaţiei şi să preia responsabilitatea tuturor consecinţelor. În afară de China, în nici o ţară din lume, cu regim seismic ridicat şi frecvent, nu s-a găsit încă un răspuns la multiplele aspecte ale problemei, dintre care numai cîteva au fost semnalate mai sus.

În orice caz, previziunea şi avertizarea vor contribui la salvarea multor vieţi omeneşti deoarece majoritatea victimelor se datoresc panicii, neprevăzutului şi prăbuşirii clădirilor.

În concluzie, trebuie reţinut faptul că pînă în prezent nu există nici o metodă care să prezinte suficientă garanţie cu privire la predicţia momentului, locului şi magnitudinii unui viitor cutremur puternic.

8

RĂSPUNSUL SEISMIC LINIAR AL STRUCTURILOR

Evaluarea cît mai corectă a efectelor cu caracter dinamic pe care le generează cutremurele de pămînt asupra construcţiilor reprezintă o problemă extrem de complexă şi dificil de abordat analitic, avînd în vedere multitudinea factorilor care intervin în descrierea şi definirea structurii de rezistenţă, acţiunii seismice şi geologiei amplasamentului. Analiza unei structuri rezistente la cutremure severe comportă în general următoarele aspecte fundamentale:

- Modelarea din punct de vedere geometric, fizic, mecanic şi matematic a structurii de rezistenţă (materiale, elemente componente, substructuri şi conexiuni).
- Modelarea geologică, geotehnică şi dinamică a condiţiilor locale de teren corespunzătoare amplasamentului construcţiei.
- Modelarea cinematică şi parametrică a istoriei în timp (time-history) a mişcării seismice.
- Estimarea prin analiză numerică a răspunsului instantaneu sau maxim descris de structură în timpul istoric al cutremurului.
- Interpretarea şi extrapolarea rezultatelor obţinute în urma întregului proces de operaţii calitative şi cantitative, desfăşurat şi elaborat prin intermediul unor modele de calcul convenţionale.
- Proiectarea şi realizarea efectivă a construcţiei în limitele unui nivel de asigurare prestabilit, în concordanţă cu seismicitatea zonei amplasamentului şi importanţa obiectivului implementat.

Toate aspectele descrise sînt supuse (mai mult sau mai puţin) aproximărilor care stau la baza modelării şi rezolvărilor analitice în care pot interveni erori în schematizările admise şi în estimarea datelor primare şi, de asemenea, elementelor subiective (uneori chiar arbitrare) pe baza cărora poate fi elaborat actul de decizie. Toate aceste elemente, la care se adaugă şi alte fenomene obiective, contribuie de multe ori la alterarea nivelului de risc acceptabil, precum şi la amplificarea incertitudinilor. Chiar faptul că analizele seismice actuale se aplică pentru asigurarea unei construcţii la un viitor cutremur necunoscut reprezintă un factor major de risc. În această ordine de idei, este evident că orice cutremur viitor real va reprezenta o adevărată surpriză pentru o construcţie proiectată şi executată în acord cu cunoştinţele dobîndite din cercetarea unor şocuri seismice anterioare.

Pe baza principiilor de modelare expuse în capitolele 1 şi 7, precum şi a dezvoltărilor teoretice conţinute în celelalte capitole, se va trata în continuare răspunsul seismic al sistemelor cu comportare elastică, iar în anumite situaţii şi cu comportare inelastică.

Răspunsul dinamic al structurilor produs de cutremurele puternice poate fi investigat prin trei metode distincte (sau variante ale acestora) care pot fi sintetizate astfel:

- *Metoda forţelor seismice static-echivalente.* Această metodă este convenţională şi aproximativă, fiind prevăzută în regulamente sau normative de

proiectare. Este o metodă simplificată, specifică analizelor globale, în care este prescris nivelul de asigurare seismică în funcție de seismicitatea zonei, de caracteristicile dinamice proprii ale structurilor (perioade proprii și capacitate de disipare), precum și de un anumit nivel de ductilitate acceptat.

● *Metoda spectrelor seismice de răspuns.* Este tot o metodă cu caracter aproximativ utilizată în proiectarea directă a structurilor rezistente la cutremure. Metoda este formulată în asemenea manieră încît permite separarea caracteristicilor dinamice ale structurii (de cele ale mișcării seismice) definite prin „spectre seismice de răspuns". Acest mod de abordare este curent utilizat în proiectarea structurilor antiseismice și poate constitui un instrument de analiză în proiectarea preliminară în vederea efectuării unui calcul mai exact. În afara importanței pe care o prezintă în proiectarea structurilor, spectrele seismice furnizează informații importante în legătură cu definirea caracteristicilor intrinseci ale mișcării seismice înregistrate. În acest sens, pot fi identificate proprietățile de amplificare ale terenului, compoziția spectrală a accelerogramelor, precum și componentele (inclusiv perioadele) predominante ale mișcării. Teoria spectrelor de răspuns poate fi abordată atît în cazul sistemelor cu comportare elastică, cît și în cazul celor cu comportare inelastică (elasto-plastică).

● *Metoda integrării directe.* Rezolvarea în această metodă bazată pe procedeul „pas cu pas" (step-by-step) permite reprezentarea răspunsului seismic pe timpul istoric al cutremurului. Metoda este laborioasă și formal are un caracter exact, fiind specifică analizelor numerice automate.

8.1. RĂSPUNSUL SEISMIC AL SISTEMELOR CU UN SINGUR GRAD DE LIBERTATE DINAMICĂ

8.1.1. Răspuns seismic instantaneu

Se consideră sistemul cu 1GLD din figura 8.1 cu comportare liniară, a cărui bază rigidă este supusă unei mișcări seismice caracterizată prin variația deplasărilor $u_0(t)$. Ecuația de condiție care guvernează mișcarea de translație a sistemului, în conformitate cu aspectele teoretice expuse în capitolul 2, are forma generală

$$m(AAI) + c(VRI) + k(DRI) = 0, \tag{8.1}$$

sau

$$m[\ddot{u}_0(t) + \ddot{x}(t)] + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0. \tag{8.2}$$

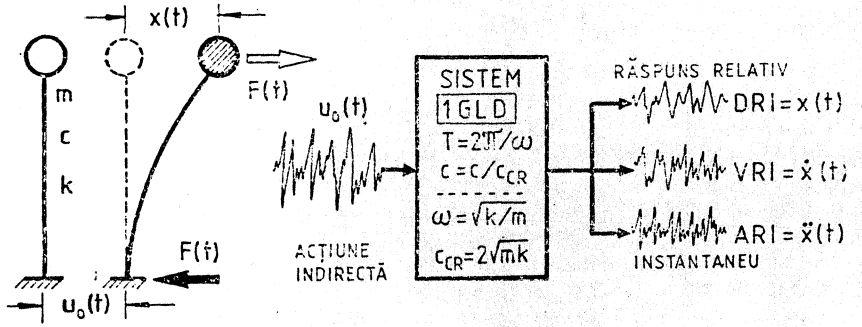


Fig. 8.1

Constantele care intervin în ecuațiile (8.1) sau (8.2) reprezintă elementele de definire ale sistemului dinamic-liniar, și anume: *caracteristica inerțială m, caracteristica disipativă c* și *caracteristica elastică* introdusă prin coeficientul de rigiditate *k*.

În vederea integrării, ecuația (8.2) care este identică cu (2.128) se transformă astfel:

$$\ddot{x}(t) + 2\nu\omega\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -\ddot{u}_0(t), \tag{8.3}$$

în care ν este fracțiunea din amortizarea critică ($\nu = c/c_{cr}$), iar ω pulsația proprie a sistemului dinamic în absența amortizării ($\omega^2 = k/m$). Semnificația acestor noi constante a fost descrisă în § 2.1.

Deoarece acțiunea produsă de mișcarea seismică imprimată bazei sistemului dinamic are caracter indirect, variabilele $x(t)$, $\dot{x}(t)$ și $\ddot{x}(t)$ din ecuația (8.3) definesc *răspunsul seismic instantaneu* exprimat în mărimi relative.

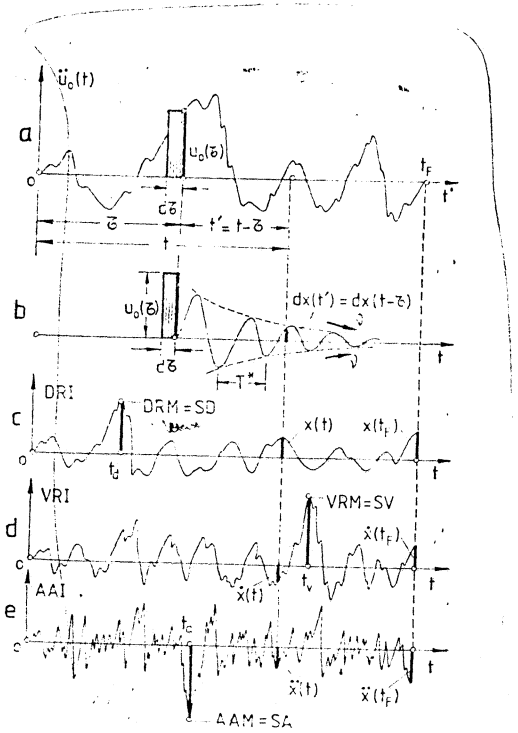


Fig. 8.2

Soluția generală a ecuației (8.3), în condiții inițiale nule, se obține prin discretizarea variației accelerațiilor seismice (accelerograma efectivă înregistrată) într-un număr nelimitat de impulsuri (fig. 8.2, *a* și *b*). În aceste condiții, se poate determina răspunsul impulsului (a se vedea § 1.11), iar prin superpoziția acestora se evaluează răspunsul total instantaneu în orice moment cuprins pe durata unui cutremur, astfel încît problema se reduce la exprimarea răspunsului liber al sistemului cu 1GLD supus acțiunii unui impuls de forma $m\ddot{u}(\tau)d\tau$ (în condiții inițiale date).

Avînd în vedere figura 8.2, *b* și soluția (2.31) demonstrată în capitolul 2, rezultă expresia răspunsului instantaneu al impulsului la momentul t'

$$dx(t') = e^{-\nu\omega t'}\left(\frac{\Delta v_0 + \nu\omega\Delta x_0}{\omega^*}\sin\omega^* t' + \Delta x_0\cos\omega^* t'\right).$$

Se consideră că pe durata de timp $d\tau$ se produce pe direcția GLD numai o variație a vitezei, variația deplasărilor fiind nesemnificativă încît $\Delta x_0 = 0$. Prin aplicarea teoremei conservării impulsului se obține viteza inițială astfel

$$m\Delta v_0 = \int_0^{\tau} m\ddot{u}_0(\tau')d\tau' = m\ddot{u}_0(\tau)d\tau, \quad \Delta v_0 = \ddot{u}_0(\tau)d\tau.$$

Întrucît $t' = t - \tau$, răspunsul impulsului devine

$$dx(t-\tau) = \frac{1}{\omega^*}\ddot{u}_0(\tau)e^{-\nu\omega(t-\tau)}\sin\omega^*(t-\tau)d\tau, \tag{8.4}$$

iar prin aplicarea principiului superpoziției liniare, se determină răspunsul total exprimat în deplasările relative instantanee

$$x(t) = \int_0^t \mathrm{d}x(t-\tau), \quad 0 < \tau \leqslant t \quad \text{și} \quad 0 < t \leqslant t_F, \tag{8.5}$$

unde t_F reprezintă *timpul final* al mișcării seismice (durata cutremurului). Rezultate identice se pot obține și prin aplicarea transformatei Laplace pe baza analizei expuse în § 2.8.

Utilizarea directă a relațiilor (8.4) și (8.5), precum și a derivatelor succesive, permite determinarea răspunsului seismic instantaneu pe timpul istoric (time-history) în care se manifestă mișcarea seismică, obținîndu-se astfel expresiile analitice pentru

- *deplasarea relativă instantanee (DRI)*

$$x(t) = -\frac{1}{\omega^*}\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\mathrm{e}^{-\nu\omega(t-\tau)}\sin\omega^*(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{8.6}$$

- *viteza relativă instantanee (VRI)*

$$v(t) = \dot{x}(t) = \int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\mathrm{e}^{-\nu\omega(t-\tau)}[-\cos\omega^*(t-\tau) + \nu^*\sin\omega^*(t-\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{8.7}$$

- *accelerația absolută instantanee (AAI)*

$$a(t) = \ddot{u}_0(t) + \ddot{x}(t) = \omega^*\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\mathrm{e}^{-\nu\omega(t-\tau)}[(1-\nu^{*2})\sin\omega^*(t-\tau) + 2\nu^*\cos\omega^*(t-\tau)]\mathrm{d}\tau, \tag{8.8}$$

în care intervin notațiile

$$\omega^* = \omega\sqrt{1-\nu^2}, \quad \nu^* = \nu/\sqrt{1-\nu^2}.$$

Se poate constata că expresia (8.8), care definește variația forțelor de inerție (pe direcția GLD) generate de mișcarea seismică, poate fi dedusă direct din ecuația (8.4) dacă se ține seama și de relațiile (8.6) și (8.7):

$$a(t) = AAI = -2\nu\omega(VRI) - \omega^2(DRI).$$

Din (8.6), (8.7) și (8.8) rezultă că răspunsul seismic exprimat prin *DRI*, *VRI* și *AAI* pe durata mișcării depinde de configurația înregistrării seismice (descrisă prin variația accelerațiilor) și caracteristicile dinamice proprii ale sistemului (exprimate prin perioada $T = 2\pi/\omega$ și fracțiunea din amortizarea critică ν). Reprezentarea grafică a variației răspunsului sistemului cu 1GLD, în timpul istoric $0 < t \leqslant t_F$, este redată formal în figurile 8.2, *c*, *d* și *e*. Valorile $x(t_F)$ și $\dot{x}(t_F)$ devin condiții inițiale în vibrația liberă a sistemului dinamic după încetarea mișcării seismice.

Din expresiile *DRI*, *VRI* și *AAI*, în care intervine integrala de superpoziție sau de convoluție (numită și integrala Duhamel), este pusă în evidență importanța înregistrării accelerogramelor cutremurelor puternice în studiile de inginerie seismică.

Întrucît capacitatea de amortizare vîscoasă naturală a structurilor este relativ redusă pentru valori ale fracțiunii din amortizarea critică $\nu < 0{,}20$ ($\omega^* \simeq \omega$, $\nu^* \simeq \nu$) expresiile răspunsului devin

$$DRI = x(t) = -\frac{1}{\omega}\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\,\mathrm{e}^{-\nu\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{8.9}$$

$$VRI = v(t) = -\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\,\mathrm{e}^{-\nu\omega(t-\tau)}\cos\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{8.10}$$

$$AAI = a(t) = \omega\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\,\mathrm{e}^{-\nu\omega(t-\tau)}\sin\omega(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{8.11}$$

Consecințele imediate ale răspunsului instantaneu evaluat prin caracteristicile cinematice fundamentale ale mișcării pe direcția GLD, le reprezintă forța de inerție instantanee generată de *AAI* (numită și *forță seismică instantanee FSI*) și *energiile potențială* și *cinetică instantanee* (*EPI*, respectiv *ECI*).

Se poate constata că forța seismică este o forță convențională (aparentă) care acționează pe direcția GLD, reprezentînd consecința mișcării seismice ce se manifestă indirect asupra sistemului la nivelul bazei de fixare. Rezultă deci

$$FSI = m(AAI) \quad \text{sau} \quad F(t) = ma(t), \tag{8.12}$$

iar dacă se admit expresiile (8.9), (8.10) și (8.11)

$$FSI \simeq m\omega(VRI) \simeq m\omega^2(DRI)$$

sau

$$F(t) \simeq m\omega v(t) \simeq m\omega^2 x(t), \tag{8.13}$$

și în final, făcînd substituția $\omega = \sqrt{k/m}$,

$$F(t) \simeq \sqrt{mk}\,v(t) = kx(t). \tag{8.14}$$

Energiile potențială și cinetică instantanee, acumulate de sistem (*EPI*, respectiv *ECI*), au expresiile

$$EPI = E_x(t) = \frac{1}{2}kx^2(t), \quad ECI = E_C(t) = \frac{1}{2}mv^2(t), \tag{8.15}$$

în care $kx(t)$ reprezintă și forța elastică instantanee a sistemului.

Energia totală instantanee (*ETI*) rezultă

$$E_T(t) = E_I(t) + E_C(t) = \frac{1}{2}kx^2(t) + \frac{1}{2}mv^2(t),$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\sqrt{\frac{2E_T(t)}{m}} = [\omega^2x^2(t) + v^2(t)]^{\frac{1}{2}}. \tag{8.16}$$

8.1.2. Răspuns maxim — valori spectrale

Pe timpul istoric al desfășurării unui eveniment seismic, din totalitatea răspunsurilor care se manifestă pe direcția GLD, exprimate în *DRI*, *VRI* și *AAI*, valorile maxime se numesc *valori spectrale*. Avînd în vedere relațiile (8.6), (8.7) și (8.8) rezultă:

- *deplasarea relativă maximă DRM* sau *deplasarea relativă spectrală SD*

$$SD = SD[\ddot{u}_0(t),\ T,\ \nu] = DRM = |\,x(t)\,|_{max}, \tag{8.17}$$

- *viteza relativă maximă VRM* sau *viteza relativă spectrală SV*

$$SV = SV[\ddot{u}_0(t),\ T,\ \nu] = VRM = |\,v(t)\,|_{max}, \tag{8.18}$$

- *accelerația absolută maximă AAM* sau *accelerația absolută spectrală SA*

$$SA = SA[\ddot{u}_0(t),\ T,\ \nu] = AAM = |\,a(t)\,|_{max}. \tag{8.19}$$

Dacă se iau în considerație expresiile particulare (8.10) și (8.11) în care s-a făcut abstracție de cel de-al doilea termen din relațiile (8.7) și (8.8), valorile maxime ale vitezelor relative și accelerațiilor absolute se numesc *valori pseudospectrale* și se notează cu *PSV*, respectiv *PSA*. Valorile maxime ale *DRI*, corespunzătoare relațiilor (8.4) și (8.6), sînt identice și vor caracteriza *SD*. În cazul în care $\nu = 0$ rezultă $PSA = SA$.

Pentru aplicațiile practice inginerești, D.E. Hudson [84] a demonstrat că se poate admite următoarea aproximare:

$$PSV = \left|\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\, e^{-\nu\omega(t-\tau)} \cos\omega(t-\tau)\, d\tau\right|_{max} =$$

$$= \left|\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\, e^{-\nu\omega(t-\tau)} \sin\omega(t-\tau)\, d\tau\right|_{max}, \tag{8.20}$$

care prezintă avantajul că permite exprimarea tuturor valorilor maxime ale răspunsului, prin intermediul aceleiași integrale astfel

$$PSV = \omega SD = \frac{2\pi}{T} SD, \quad PSA = \omega^2 SD = \frac{4\pi^2}{T^2} SD,$$

și deci

$$PSA = \omega PSV = \omega^2 SD. \tag{8.21}$$

Cunoscînd răspunsul spectral, se poate determina *forța seismică maximă* (*FSM*) cu relația

$$F_{max} = FSM = |\,F(t)\,|_{max} = m\,|\,a(t)\,|_{max} = mPSA, \tag{8.22}$$

iar dacă se ține seama de expresia (8.14)

$$F_{max} = k\,|\,x(t)\,|_{max} = kSD. \tag{8.23}$$

Energiile potențială și cinetică maxime (*EPM*, respectiv *ECM*), rezultînd direct din (8.15), se obțin cu relațiile

$$E_{P,\,max} = EPM = \frac{1}{2} k(SD)^2, \quad E_{C,\,max} = \frac{1}{2} m(PSV)^2,$$

încît energia totală maximă (în absența energiei de disipare) se poate exprima astfel

$$E_{T,\,max} = \frac{1}{2} k(SD)^2 = \frac{1}{2} m(PSV)^2. \tag{8.24}$$

Notațiile utilizate aici pentru valorile spectrale și pseudospectrale sînt unanim acceptate în ultimii ani pe plan internațional. Pentru simplificarea nomenclaturii, se acceptă denumirea de valori spectrale pentru toate valorile maxime ale răspunsului (*DRM*, *VRM* și *AAM*), indiferent de aproximările introduse, încît în continuare se vor folosi simbolurile *SD*, *SV* și *SA*. Notațiile anterioare, prin care se defineau aceste valori maxime, erau S_d, S_v și respectiv S_a care se mai folosesc și în prezent în unele lucrări de specialitate.

8.1.3. Spectre seismice de răspuns ale sistemelor cu comportare elastică

Prin *spectre seismice de răspuns* se înțelege reprezentarea grafică a valorilor maxime (valori spectrale) ale răspunsului (exprimat în *DR*, *VR* și *AA*), corespunzător unui set de sisteme cu caracteristici dinamice proprii diferite (T și ν), în funcție de perioada proprie neamortizată $T = 2\pi/\omega$ și fracțiunea din amortizarea critică $\nu = c/c_{cr}$. Fiecare spectru de răspuns corespunde unei anumite mișcări cunoscute (unice) a terenului (obținută pe cale naturală sau artificială) și este specific amplasamentului la care se referă înregistrarea.

Dacă pentru un cutremur unic, caracterizat prin accelerograma $\ddot{u}_0(t)$, se consideră un număr limitat de sisteme cu 1GLD (avînd perioadele proprii neamortizate T_i și fracțiunea din amortizarea critică ν_i ($i = 1, 2, \ldots n$), ordonatele spectrelor seismice de răspuns se obțin prin aplicarea relațiilor (8.17), (8.18), (8.19) care au la bază expresiile (8.6), (8.7), (8.8) sau (8.9), (8.10), (8.11). Rezultă deci

- *spectrul deplasărilor relative* (*SD*)

$$SD(T,\ \nu) = DRM(T_i,\ \nu_i),$$

- *spectrul vitezelor relative* (*SV*)

$$SV(T,\ \nu) = VRM(T_i,\ \nu_i),$$

- *spectrul accelerațiilor absolute* (*SA*)

$$SA(T,\ \nu) = AAM(T_i,\ \nu_i),$$

unde $i = 1, 2, \ldots n$ reprezintă în acest caz numărul total de puncte discrete prin care se definesc ordonatele spectrului.

Spectrele de răspuns se pot obține direct, prin discretizarea accelerogramei cutremurului, iar exactitatea rezultatelor va depinde de intervalul de timp în care a fost discretizată înregistrarea. Rezultă deci că stabilirea spectrelor de răspuns se bazează pe un proces de operare numerică aproximativ întrucît valorile maxime se determină numai în anumite puncte discrete prestabilite deși pot exista asemenea valori și între aceste puncte. În general, erorile pe care le introduc metodele numerice de rezolvare sînt acceptabile în condițiile în care intervalul de timp este în mod corespunzător ales.

Deoarece spectrele seismice descriu numai valorile maxime ale răspunsului, independent de istoria mișcării terenului $\ddot{u}_0(t)$ în timp (așa cum rezultă printr-o analiză de tip time-history), caracterul lor este aproximativ static și nu fac posibilă evidențierea desfășurării procesului de acumulare energetică pe durata cutremurului.

În figura 8.3 sînt reprezentate spectrele seismice de răspuns (*DR*, *VR*, *AA*), corespunzătoare cutremurului de la *El Centro — California* (18 mai 1940),

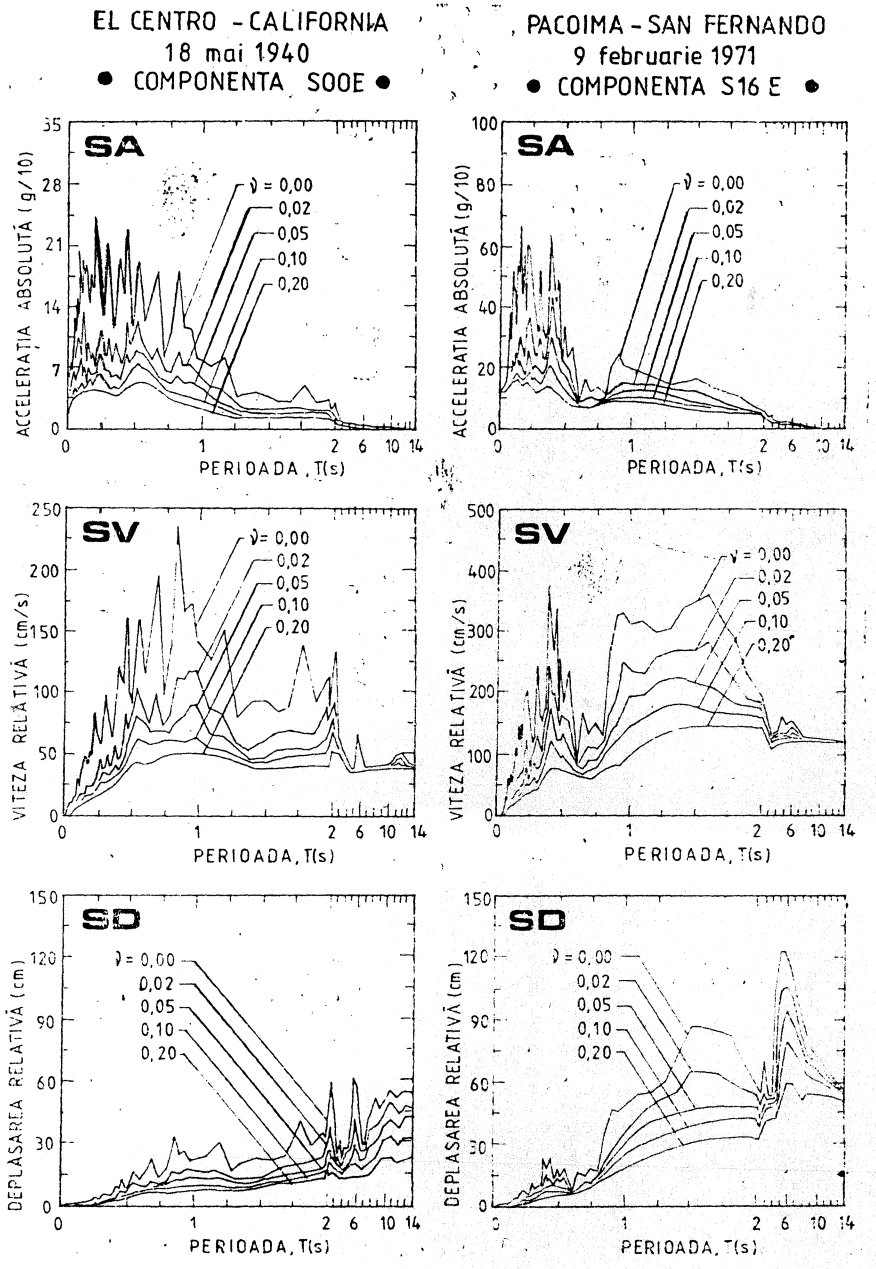


Fig. 8.3

Fig. 8.4

stabilite pe baza înregistrării componentei S00E (N—S) a accelerațiilor (fig. 7.11). Acest cutremur prezintă un interes deosebit în studiile de inginerie seismică, întrucît este primul cutremur înregistrat instrumental și prelucrat în conceptul modern al spectrelor seismice de răspuns. Concluziile teoretice și aplicative furnizate de analiza inginerească a cutremurului de la El Centro a marcat un punct de referință și un salt calitativ în ingineria seismică. În figura 8.4 sînt redate spectrele *DR*, *VR* și *AA* ale componentei S16E a accelerației înregistrate în stația seismică *Pacoima Dam* (fig. 7.13), în timpul cutremurului din *San Fernando—California* (9 februarie 1971). A fost reținută această înregistrare de excepție, obținută pe coronamentul barajului Pacoima, întrucît accelerația seismică maximă a depășit accelerația gravitațională [123].

În aplicațiile practice se folosesc *spectrele medii de răspuns* care au o semnificație efectivă în proiectarea structurilor rezistente la cutremur, întrucît pot să descrie o mișcare seismică medie care se poate produce într-o anumită zonă. Spectrele medii, numite și *spectre de proiectare* sau *spectre standard*, au caracter convențional (de referință) deoarece se obțin prin medierea spectrelor de răspuns (corespunzătoare mai multor cutremure înregistrate) normalizate la un nivel unic de intensitate. În figura 8.5 sînt prezentate spectrele medii normalizate ale celor două componente orizontale ale cutremurelor înregistrate la *El Centro* — California (30 decembrie 1934 și 18 mai 1940),

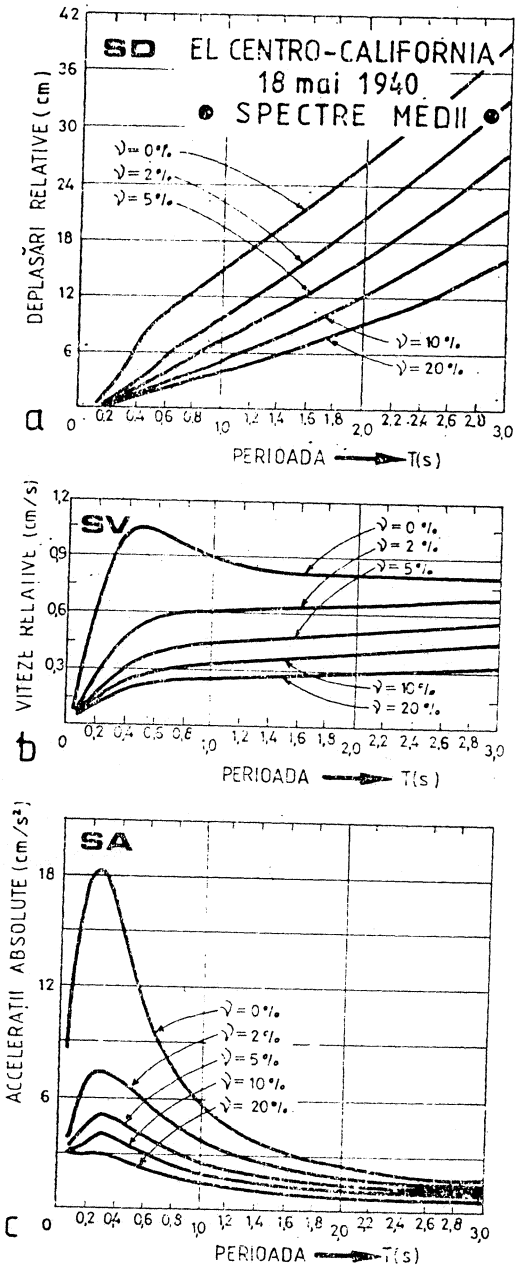


Fig. 8.5

Olympia—Washington (13 aprilie 1949), *Taft* (Kern County)—California (21 iulie 1952), Pe baza cercetărilor efectuate de G.W. Housner [79], calibrarea spectrelor medii cu mișcările seismice efective, corespunzătoare celor patru cutremure, se face prin multiplicarea ordonatelor spectrale cu următorii factori: 1,9/2,7 (El Centro — 1934), 1,0 (El Centro — 1940), 1,9/2,7 (Olympia — 1949) și 1,6/2,7 (Taft — 1952).

Un alt mod de reprezentare a celor trei spectre seismice de răspuns (SD, SV, SA) îl constituie *spectrul tripartit logaritmic*, numit și *spectrul seismic trilog*. Acesta este un spectru compact în care se reprezintă grafic, în scară logaritmică, variația răspunsului maxim. Un asemenea concept de reprezentare unică permite să se pună în evidență amplificarea răspunsului dinamic al sistemului cu 1GLD în raport cu caracteristicile cinematice maxime ale mișcării seismice de la suprafața terenului adică: $u_{0,max}$ (deplasarea maximă), $\dot{u}_{0,max}$ (viteza maximă) și $\ddot{u}_{0,max}$ (accelerația maximă). În figura 8.6 este reprezentat schematic conceptul de definire și utilizare a spectrului tripartit. Pe baza relațiilor (8.21), și considerînd ca mărime de referință log PSV, rezultă

$$SD = PSV/\omega, \quad PSA = \omega PSV,$$

și deci

$$\left.\begin{aligned} \log SD &= \log PSV/\omega = \log PSV - \log \omega, \\ \log PSA &= \log \omega PSV = \log PSV + \log \omega. \end{aligned}\right\} \tag{8.25}$$

Prin aplicarea acestor relații se obțin spectrele seismice trilog de tipul celui reprezentat în figura 8.6. Referitor la această figură se face precizarea că perioadele T_{01} și T_{02}, numite și „perioade de colț" depind de caracteristicile cutremurului și mecanismul de focar, precum și de proprietățile geologice și geotehnice ale mediului în care s-a obținut înregistrarea. Dacă perioada predominantă a mișcării terenului este T_0(7.37), se pot defini următoarele trei intervale caracteristice în spectrul tripartit:

— în intervalul $T_{01} \geqslant T_0$, $\quad \ddot{u}(t) = \ddot{u}_{0,\,max} = a_0$,
— în intervalul $T_{01} < T_0 < T_{02}$, $\quad \dot{u}(t) = \dot{u}_{0,\,max} = v_0$,
— în intervalul $T_0 \geqslant T_{02}$, $\quad u(t) = u_{0,\,max} = d_0$.

Perioadele de colț (T_{01} și T_{02}), precum și perioada predominantă T_0 caracterizează conținutul de frecvență al spectrului sau compoziția spectrală.

Se face precizarea că reprezentările grafice ale *PSV* și *PSA*, care definesc pseudospectrele vitezelor relative și accelerațiilor absolute, vor fi denumite în cuprinsul acestei lucrări tot spectre de răspuns și vor fi notate prin *SV* și *SA*.

Pentru cutremure puternice, cu focarul situat la distanțe epicentrale reduse sau intermediare, cercetările conținute în lucrările [28] și [147] au arătat că se pot admite pentru răspunsul maxim următoarele valori (în funcție de caracteristicile cinematice ale mișcării terenului): $DR = 2d_0$, $SV = 3v_0$ și $SA = 4a_0$ (corespunzătoare unei fracțiuni din amortizarea critică $\nu = 0{,}02$). Asociind aceste valori cu observația că $SA \to a_0$ cînd $T \to 0$ și $SD \to d$ cînd $T \to \infty$, a fost posibil să se stabilească configurația spectrului tripartit așteptat pentru sisteme caracterizate disipativ prin caracteristici de amortizare $\nu = 0{,}02 \ldots 0{,}10$ (fig. 8.7). Linia punctată din figurile 8.6 și 8.7 delimitează mișcarea specifică a terenului, exprimată în mărimi cinematice maxime, de cea care se produce pe direcția GLD a sistemului. Se poate face aproximarea [147] că linia punctată de demarcație, față de care se pune în evidență amplificarea răspunsului maxim al sistemului cu 1GLD, corespunde unui spectru seismic tripartit a cărui fracțiune din amortizarea critică are valoarea $\nu = 0{,}20 \ldots 0{,}25$.

În figurile 8.8 și 8.9 sînt reproduse [225] spectrele tripartite care corespund componentei S00E (fig. 7.11) a accelerogramei înregistrată la *El Centro* —

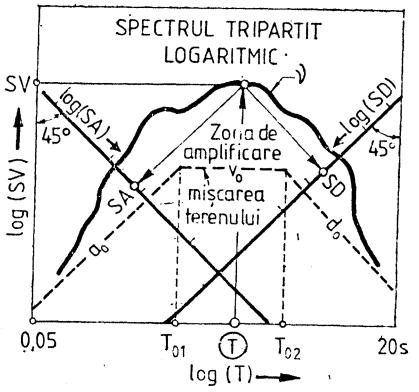


Fig. 8.6

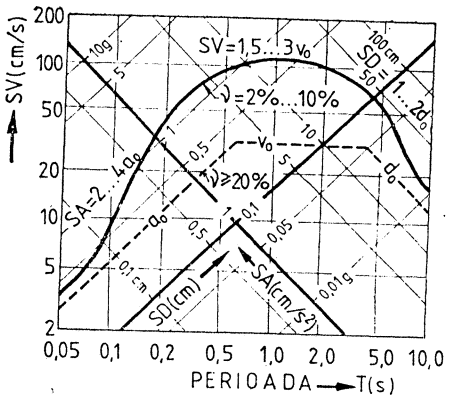


Fig. 8.7

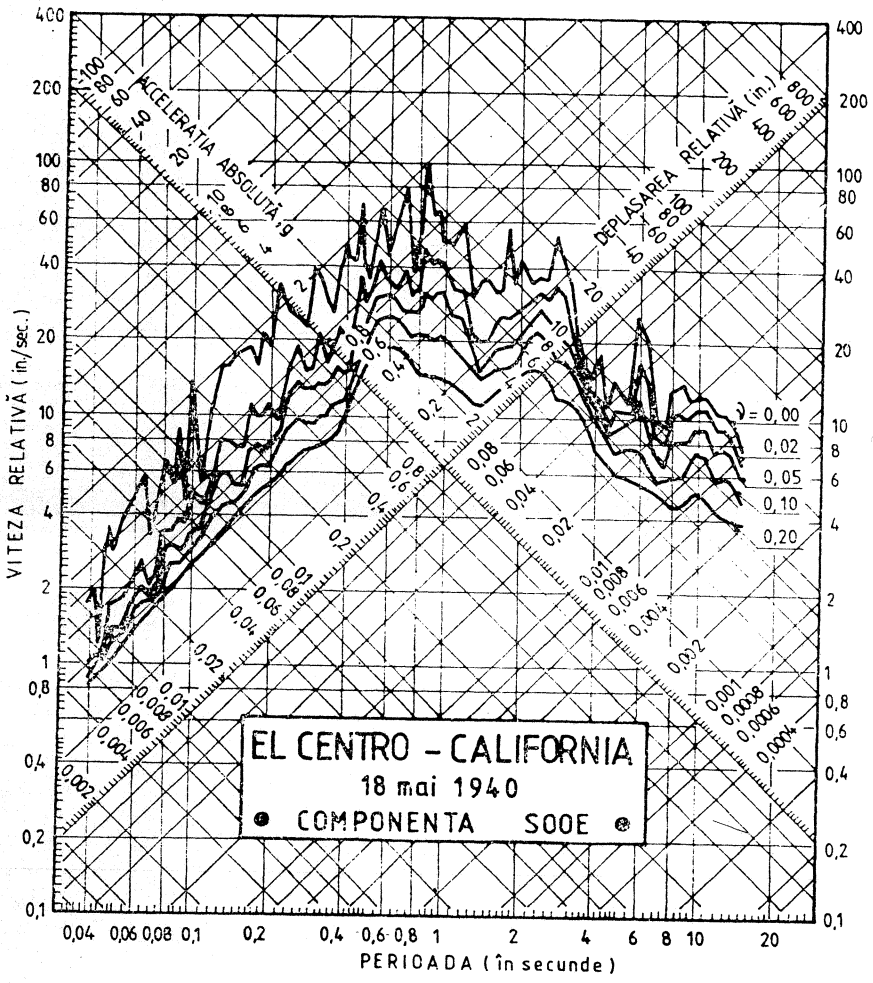


Fig. 8.8

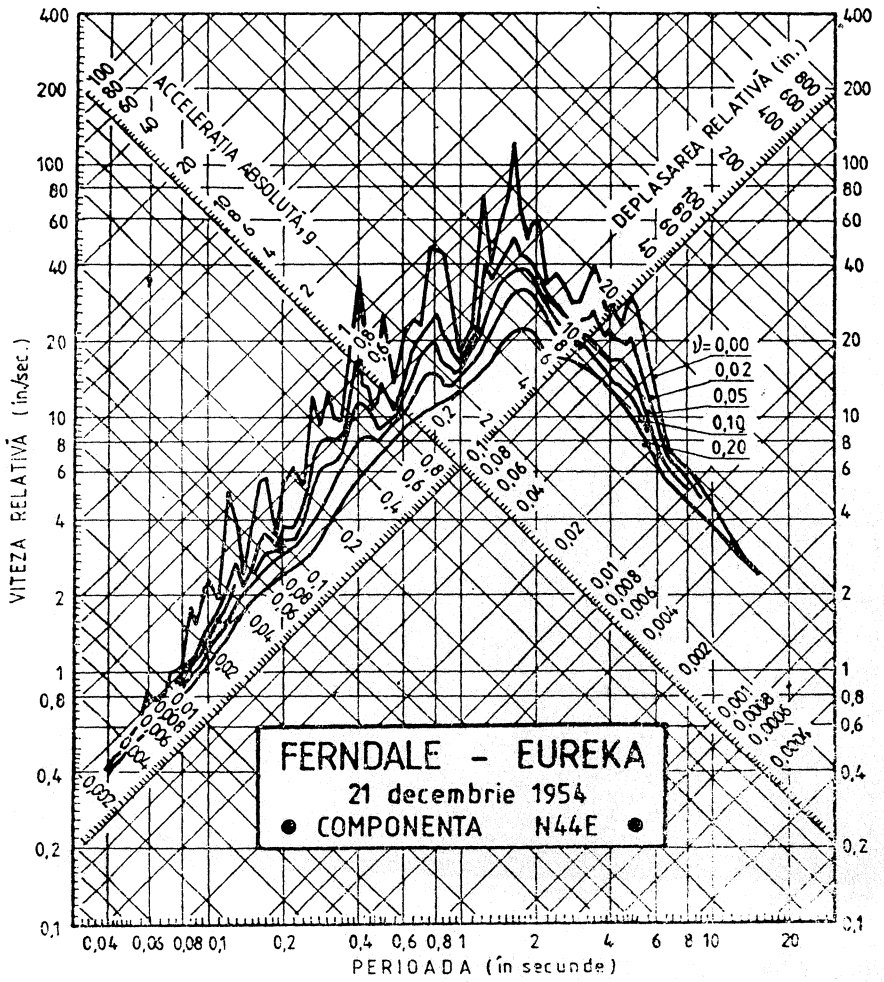


Fig. 8.9

California (18 mai 1940) și componentei N44E (fig. 7.12) a accelerogramei înregistrată la *Ferndale* (Eureka) — California (21 decembrie 1954).

Spectrele compacte în reprezentare logaritmică, pe lîngă faptul că oferă o imagine mai clară asupra fenomenelor de amplificare seismică, pun în evidență în mod sugestiv *conținutul de frecvență* al mișcării terenului, inclusiv *perioadele predominante*. Astfel, accelerograma înregistrată la El Centro se caracterizează prin componente dominante cu perioade joase ($T_0 < 0{,}8$s) în timp ce accelerograma înregistrată la Ferndale este dominată de componente cu perioade intermediare ($1{,}2\text{s} < T_0 < 1{,}6$s), așa cum se constată de altfel și din spectrul Fourier al amplitudinilor (fig. 7.26).

8.1.4. Spectre seismice de răspuns și spectre Fourier. Intensitate spectrală

După cum s-a menționat în partea introductivă, spectrele seismice de răspuns, în afara scopului principal pentru care au fost concepute și aplicate în tehnica proiectării structurilor antiseismice, permit, în anumite situații, să pună în evidență și să identifice *conținutul de frecvență* al unei accelerograme.

Conform definiției generale dată în capitolul 1, particularizată apoi în § 7.10.1, transformata Fourier directă a acțiunii seismice, caracterizată prin accelerograma $\ddot{u}_0(\tau)$ în intervalul $0 < \tau < t_F$, are expresia

$$F(\omega) = \int_0^{t_F} \ddot{u}_0(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau, \tag{8.26}$$

sau

$$F(\omega) = \int_0^{t_F} \ddot{u}_0(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau - i\int_0^{t_F} \ddot{u}_0(\tau) \sin\omega\tau\, d\tau = |F(\omega)|\, e^{i\varphi(\omega)}.$$

Spectrul Fourier al amplitudinilor $|F(\omega)|$, notat prin FS, este dat de rădăcina pătratică a pătratelor părților reală și imaginară din relația (8.26), adică

$$FS = |F(\omega)| = \left\{\left[\int_0^{t_F} \ddot{u}_0(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau\right]^2 + \left[\int_0^{t_F} \ddot{u}_0(\tau) \sin\omega\tau\, d\tau\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{8.27}$$

Dacă sistemul cu 1GLD se consideră fără amortizare ($\nu = 0$), relațiile (8.9) și (8.10) devin

$$x(t) = -\int_0^t \ddot{u}_0(\tau) \sin\omega(t-\tau)\, d\tau, \quad v(t) = -\int_0^t \ddot{u}_0(\tau) \cos\omega(t-\tau)\, d\tau, \tag{8.28}$$

iar în urma unor transformări elementare, energia totală a sistemului (8.16) va avea expresia

$$\sqrt{\frac{2E_T(t)}{m}} = \left\{\left[\int_0^t \ddot{u}_0(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau\right]^2 + \left[\int_0^t \ddot{u}_0(\tau) \sin\omega\tau\, d\tau\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{8.29}$$

Prin compararea relațiilor (8.27) și (8.29), se constată că prin intermediul spectrului Fourier al amplitudinilor accelerațiilor terenului, poate fi evaluată energia totală a sistemului cu 1GLD (fără amortizare) la sfîrșitul cutremurului ($t = t_F$); astfel

$$\sqrt{\frac{2E_T(t_F)}{m}} = FS, \quad E_T(t_F) = \frac{m(FS)^2}{2}. \tag{8.30}$$

Se poate stabili o legătură directă între FS și spectrul seismic al vitezelor relative neamortizate SV_0. În acest sens, prin dezvoltarea funcției trigonometrice din expresia (8.28) a vitezei relative se obține

$$v(t) = -\cos\omega t \int_0^t \ddot{u}_0(\tau) \cos\omega\tau\, d\tau - \sin\omega t \int_0^t \ddot{u}_0(\tau) \sin\omega\tau\, d\tau,$$

iar dacă se ține seama de definiția (8.18) rezultă

$$SV_0 = |v(t)|_{max} = \left\{\left[\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau\right]^2 + \left[\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\sin\omega\tau\,d\tau\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (8.31)$$

Relațiile (8.27) și (8.31) sînt similare, iar în situația limită cînd $t = t_F$ se constată că ele devin identice ($0 \leqslant t \leqslant t_F$). Rezultă deci că în cazul cînd valoarea maximă a vitezelor relative se produce la sfîrșitul cutremurului, spectrul de răspuns (neamortizat) al vitezelor relative SV_0 este identic cu spectrul Fourier FS al amplitudinilor accelerațiilor cutremurului. În concluzie

$$\left.\begin{aligned} &-\text{ cînd } t = t_F \qquad SV_0 = FS,\\ &-\text{ cînd } 0 < t < t_F, \quad SV_0 > FS, \end{aligned}\right\} \quad (8.32)$$

rezultat care prezintă un deosebit interes în ingineria seismică.

Din cuprinsul § 7.10.1 a rezultat că FS definește *conținutul de frecvență* (conținutul spectral sau compoziția spectrală) al unei accelerograme înregistrată într-un anumit amplasament (fig. 7.26). Determinarea FS are o importanță primordială în analizele de seismologie deoarece poate caracteriza mecanismul de producere al unui cutremur (din punct de vedere cinematic și dinamic), precum și condițiile geologice locale în care s-a obținut înregistrarea instrumentală. Relațiile (8.32) arată că SV_0 poate defini caracteristicile intrinseci ale mișcării terenului prin *componentele* și *perioadele predominante* care reprezintă o problemă centrală în ingineria seismică.

Spectrul vitezelor relative neamortizate SV_0 mai poate furniza informații importante asupra severității unui cutremur. În acest sens, G.W. Housner [70] a introdus noțiunea de *intensitate spectrală* notată cu SI (vezi și § 7.7.3). Intensitatea spectrală, pentru un anumit grad de amortizare ν, reprezintă suprafața definită de SV și abscisa T delimitată de valorile extreme 0,1s și 2,5 s:

$$SI_\nu = \int_{0.1\,s}^{2,5\,s} SV(\nu, T)\,dT. \quad (8.33)$$

Integrala (8.33) se evaluează printr-un număr real cu dimensiuni de lungime și caracterizează efectul mediu al mișcării seismice asupra structurilor a căror perioadă proprie este cuprinsă în intervalul 0,1 ... 2,5 s. Se consideră că intensitatea unui cutremur poate fi determinată aproximativ prin intermediul valorii SI corespunzătoare fracțiunii din amortizarea critică $\nu = 0{,}2$, cu relația

$$SI_{0,2} = 0{,}44(SI_0) - 0{,}012(SI_0)^2,$$

unde SI_0 corespunde valorii $\nu = 0$, adică spectrului neamortizat SV_0.

Accelerația maximă la nivelul terenului poate fi determinată în mod orientativ cu formula

$$\ddot{u}_{0,max} = a_0 = 0{,}1g(SI_{0,2}).$$

Conceptul intensității spectrale se află în corespondență directă cu solicitările maxime care se produc într-o structură însă nu poate caracteriza potențialul distructiv al unui cutremur. În conformitate cu definiția dată (8.33), structura se consideră perfect elastică, iar amortizarea liniar-vîscoasă și deci SI nu ia în considerare comportarea postelastică a sistemului dinamic și nici durata mișcării seismice.

8.1.5. Spectre seismice de torsiune

În timpul unui cutremur puternic se produc în majoritatea situațiilor efecte rotaționale generate de nesincronismul componentelor mișcării terenului, ca urmare a complexității propagării undelor seismice la nivelul suprafeței libere a unui anumit amplasament. Dacă se ține seama de posibilitatea apariției unei mișcări rotaționale, cu efecte de torsiune structurală, se pot defini și determina *spectre seismice de torsiune* în mod analog cu cele de translație [68].

Dacă se cunosc componentele accelerațiilor $\ddot{u}_{0,x}(t)$ și $\ddot{u}_{0,y}(t)$ ale mișcării terenului în raport cu două direcții orizontale ortogonale, precum și unghiul pe care îl face direcția undei incidente de suprafață (notat prin θ) cu axa x, variația accelerațiilor unghiulare (numite și de torsiune) are expresia

$$\ddot{\Phi}(t) = \frac{1}{2v_S}[\ddot{u}_{0,x}(t)\sin\theta - \ddot{u}_{0,y}(t)\cos\theta], \quad (8.34)$$

în care v_S este viteza de propagare a undelor secundare (transversale).

Răspunsul de torsiune, exprimat în valori instantanee sau maxime se obține prin integrarea ecuației de mișcare, a cărei formă este similară cu ecuația (8.3), corespunzătoare mișcării de translație. Rezultă

$$\ddot{\varphi}(t) + 2\nu_t\omega_t\dot{\varphi}(t) + \omega_t\varphi(t) = -\ddot{\Phi}(t), \quad (8.35)$$

unde $\varphi(t)$ reprezintă deplasarea unghiulară (de rotație sau de torsiune, în rad/s), ν_t și $\omega_t = 2\pi/T_t$ fracțiunea din amortizarea critică, respectiv pulsația proprie de torsiune a sistemului cu 1GLD.

În figura 8.10, *a* este redat *spectrul seismic de răspuns al vitezelor relative unghiulare* sau de torsiune (în realitate pseudoviteze) al cutremurului înregistrat la *El Centro* — California (18 mai 1940), iar în figura 8.10, *b* este trasat spectrul mediu de torsiune corespunzător aceluiași cutremur. Spectrele medii au rezultat prin medierea spectrelor de răspuns efective ale mișcărilor seismice înregistrate la *El Centro* — 1934 și 1940 (v_S = 174 m/s), *Olympia* — 1949 (v_S = 183 m/s) și *Taft* (Kern County) — 1952 (v_S = 163 m/s), adică aceleași înregistrări care au folosit la obținerea spectrelor medii de translație descrise în § 8.1.3.

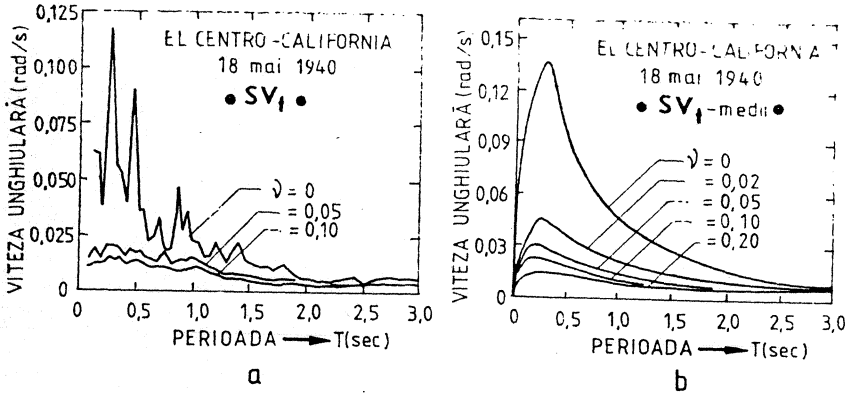


Fig. 8.10

Cunoscînd spectrul seismic de răspuns al vitezelor relative de torsiune SV_t se pot obține spectrele seismice de răspuns ale deplasărilor relative SD_t și accelerațiilor absolute SA_t de torsiune folosind relațiile de legătură

$$SA_t = \omega_t(SV_t) = \omega_t^2(SD_t), \tag{8.36}$$

de formă similară cu expresia (8.21).

Rezultă din aspectele teoretice expuse mai sus că fenomenul de torsiune, specific structurilor cu disimetrie pronunțată, devine semnificativ chiar și în cazul structurilor cu simetrie geometrică, elastică și inerțială, mai ales cînd una din dimensiunile în plan orizontal este mult mai mare decît cealaltă.

8.1.6. Unele observații și constatări privind spectrele seismice de răspuns

Spectrele seismice prin care se definește răspunsul maxim al unui sistem liniar cu 1GLD, exprimat în *DR*, *VR* și *AA*, sînt reprezentări grafice cu caracter aproximativ, obținute prin procedee de discretizare ale accelerogramelor corespunzătoare cutremurelor instrumentale. Aceste reprezentări pot fi independente, specifice caracteristicilor răspunsului, rezultînd *SD*, *SV* și *SA*, sau elaborate în formă compactă, unitară, prin intermediul spectrelor tripartite logaritmice.

Principalii parametri care influențează calitativ și cantitativ variația spectrelor seismice, sînt următorii:

— mecanismul producerii cutremurelor și caracteristicile geometrice, cinematice și dinamice ale focarelor;

— proprietățile geologice și fizico-mecanice ale mediului prin care se propagă undele seismice către suprafața liberă a Pămîntului;

— condițiile geologice, geotehnice și dinamice locale specifice straturilor și depozitelor superficiale care definesc amplasamentul în care s-a înregistrat variația accelerațiilor (accelerogramele);

— magnitudinea sau altă mărime care poate caracteriza severitatea cutremurului;

— distanța epicentrală a amplasamentului;

— caracteristicile dinamice proprii ale sistemului cu 1GLD (perioade proprii și grade de amortizare).

Se remarcă faptul că în observațiile și constatările care se expun în continuare, nu toți parametrii amintiți mai sus intervin în mod explicit în evaluarea valorilor spectrale (*DRM*, *VRM* și *AAM*).

● Spectrele seismice furnizează informații globale cu privire la răspunsul unui sistem cu 1GLD (avînd perioada proprie și amortizarea precizate) la un anumit cutremur dat (natural sau artificial), printr-o singură cantitate și anume valorile de vîrf (maxime) ale *DR*, *VR* și *AA*. Aceste valori nu conțin explicit istoria în timp a desfășurării evenimentului seismic înregistrat și nici durata acestuia.

● Întrucît analiza răspunsului seismic se referă la sistemele cu comportare liniară, spectrele „elastice" nu pot să evalueze posibilitatea apariției unor avarii așteptate la un cutremur viitor deoarece degradarea structurală implică dezvoltarea unor deformații inelastice (postelastice). Cu toate acestea se pot obține indicații generale cu privire la totalul de deformație elastică care se produce în timpul unui cutremur puternic.

● Se constată atît din spectrele independente, cît și din cele tripartite (trilog) că valorile limită ale răspunsului maxim corespund următoarelor situații:

— cînd $T \to 0$, $\quad AAM \to \ddot{u}_{0,max} = a_0$,

— cînd $T \to \infty$, $\quad DRM \to u_{0,max} = d_0$.

În privința intervalului cuprins între valorile de colț ale perioadelor proprii T_{01} și T_{02} (fig. 8.6) din spectrul tripartit, se precizează că în cazul în care raportul T_{02}/T_{01} este mare rezultă un spectru larg (întins) cu viteze relative aproximativ constante, iar cînd acest raport este mic se obține un spectru îngust. Specificul spectrului trilog (larg sau îngust), precum și configurația acestuia în raport cu delimitarea față de mișcarea terenului depind de magnitudinea cutremurului, distanța epicentrală și condițiile locale de teren ale amplasamentului.

● În general, compararea calitativă și cantitativă a particularităților unei accelerograme, înregistrată instrumental sau generată artificial (simulată sau sintetizată), se poate face prin compararea spectrelor de răspuns corespunzătoare. Un mod mai eficient de comparație îl constituie reprezentarea *spectrelor AA normalizate* în raport cu accelerația maximă $\ddot{u}_{0,max} = a_0$ a mișcării înregistrate la suprafața terenului, adică

$$SA_n = \frac{SA(T,\nu)}{SA(T=0)} = \frac{SA}{\ddot{u}_{0,max}} = \frac{SA}{a_0}. \tag{8.37}$$

Ordonatele spectrelor de răspuns ale accelerațiilor absolute SA_n sînt numere adimensionale și pun direct în evidență factorii de amplificare seismică ai răspunsului în raport cu accelerația maximă a terenului.

● Spectrele seismice, și în special cel al vitezelor relative *SV*, corespunzătoare amortizării nule ($\nu = 0$), conțin salturi pronunțate, ceea ce arată că răspunsul are variații sensibile la modificarea perioadei proprii. Prezența amortizării, chiar cu valori reduse ale fracțiunii din amortizarea critică, contribuie la reducerea substanțială a răspunsului, precum și la dispariția acestor salturi în curbele spectrale.

● Toate spectrele seismice reflectă, mai mult sau mai puțin, *conținutul de frecvență* (conținutul spectral sau compoziția spectrală) al accelerogramei. Spectrele vitezelor relative neamortizate SV_0 dau cea mai elocventă imagine asupra perioadelor sau frecvențelor predominante (implicit a componentelor predominante), deoarece pot fi coroborate cu spectrele Fourier de amplitudine *FS* prin relațiile (8.32), adică $SV_0 \geqslant FS$.

● Configurația spectrelor de răspuns, precum și fenomenele de amplificare seismică depind în mod decisiv de proprietățile geofizice și dinamice ale terenului din amplasamentul în care este situată structura. Astfel, în terenurile slabe, neconsolidate și compresibile, de grosime mare, componentele cu frecvențe înalte (perioade joase) sînt rapid atenuate, iar cele cu frecvență joasă devin predominante (perioadele predominante T_0 sînt cuprinse între 1,4 și 2,5 s) și în consecință efectele seismice maxime se vor manifesta asupra structurilor flexibile, a căror perioadă proprie fundamentală este situată în acest interval. În terenurile tari situația se inversează astfel încît compoziția spectrală a spectrului conține frecvențe predominante înalte (perioade predominante $T_0 \leqslant 0{,}6$ s) și deci structurile rigide vor fi mai solicitate deoarece perioada proprie fundamentală a acestora este situată în domeniul de

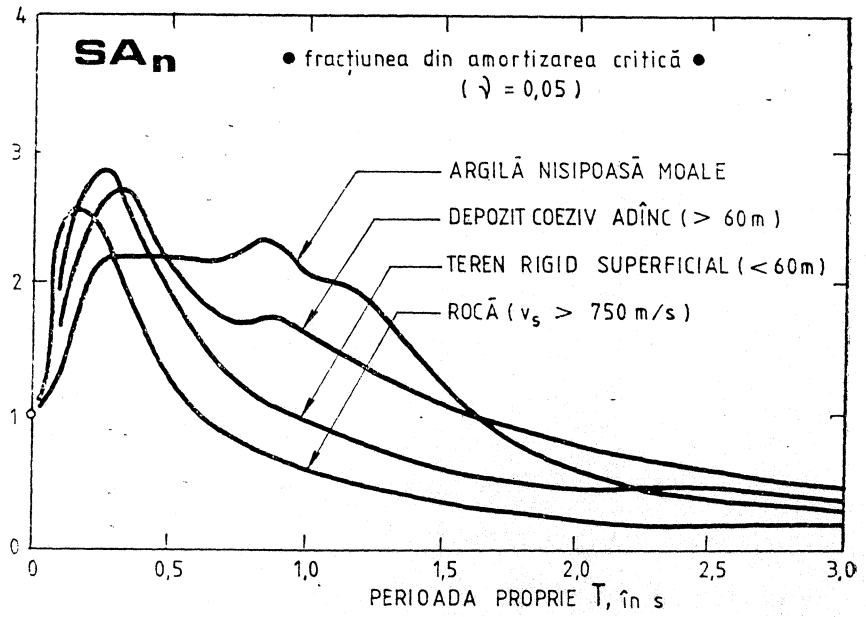


Fig. 8.11

amplificare seismică. Terenurilor cu caracteristici intermediare le corespund perioade predominante $0,6 < T_0 < 1,4$ s și prin urmare în această situație structurile semirigide (sau semiflexibile) vor fi cele mai afectate.

În acest sens, un studiu de amploare a fost efectuat de B. H. Seed [177], [234], bazat pe 104 înregistrări ale unor cutremure puternice (în special californiene) și în corelație directă cu natura stratului geologic superficial caracteristic amplasamentului. Aceste investigații au permis trasarea spectrelor medii ale AA normalizate (8.37) redată în figura 8.11, în funcție de patru categorii de terenuri. În figura 8.12 sînt date spectrele medii ale AA pentru o serie de cutremure din *Japonia* (Tokyo, Osaka și Nagoya), *Mexico* (Mexico-City), *România* (București) și *S.U.A.* (El Centro și Seattle), în care se remarcă influența decisivă pe care o au perioadele predominante T_0 asupra configurației spectrelor seismice. În reprezentarea grafică din figura 8.12 s-a admis normalizarea în raport cu valorile maxime ale răspunsului SA_{max} (corespunzătoare perioadei $T = T_0$) adică $SA^* = SA/SA_{max}$, iar pentru fracțiunea din amortizarea critică $\nu = 0,05$. Se poate constata importanța condițiilor locale de teren (clasa sau categoria de teren) asupra *fenomenului de amplificare seismică* sau de *„rezonanță tranzitorie"*, precum și asupra diferențierii sensibilității seismice a structurilor, în funcție de caracteristicile dinamice proprii T, ν. Perioada predominantă de excepție din Mexico-City ($T_0 = 2,5$s) se datorează terenului slab și neconsolidat definit printr-un depozit de argilă nisipoasă compresibilă cu intercalații de pietriș și nămol cu grosimea de peste 100 m.

Fenomene de amplificare spectrală se produc și între roca de bază (situată la adîncimea H) și suprafața liberă a terenului. Roca de bază fiind considerată rigidă ($v_S \geqslant 750$ m/s^2), spectrul accelerațiilor absolute SA_H va avea o con-

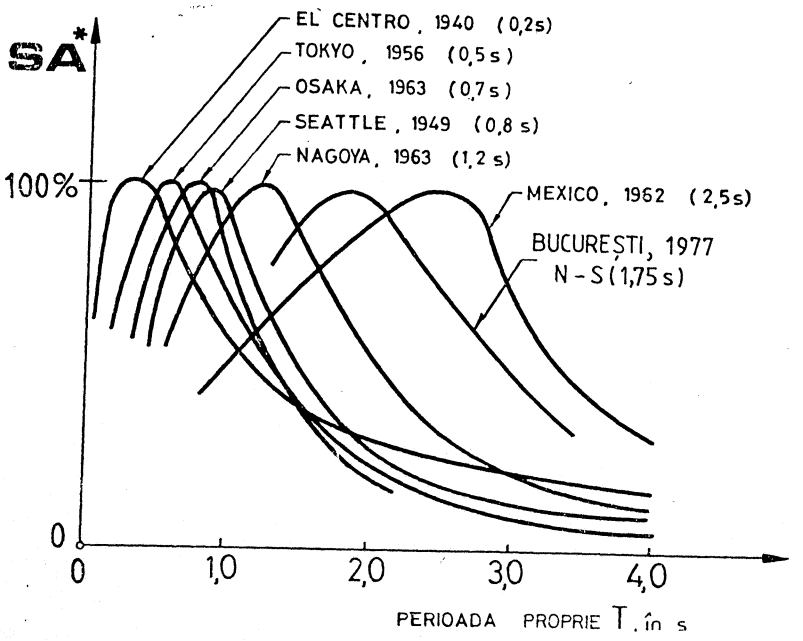


Fig. 8.12

figurație total diferită față de spectrul accelerațiilor absolute SA_0 a mișcării seismice înregistrate la suprafața liberă (fig. 8.13) .În această situație, factorii de care depind în principal modificările calitative și cantitative ale spectrului AA (corespunzător mișcării seismice de la roca de bază) sînt adîncimea depozitului superficial H, precum și viteza de propagare a undelor secundare v_S de forfecare (transversale). În privința perioadelor predominante și fenomenelor de amplificare generate de depozitele superficiale, în § 7.9 și 7.10 sînt expuse aspectele teoretice cele mai semnificative.

• Spectrele seismice sînt puternic influențate atît de intensitatea mișcării (exprimată în general prin magnitudine), cît și de distanța epicentrală D. Această constatare este evidențiată în figura 8.14 în care sînt reprezentate spectrele seismice ale vitezelor relative corespunzătoare următoarelor trei cutremure: *San Francisco* — California (22 martie 1957) avînd magnitudinea $M = 5,3$ și distanța epicentrală $D = 16$ km, *Port Hueneme* — California (18 martie 1957) pentru care $M = 4,7$ și $D = 8$ km și *Agadir* — Maroc (29 februarie 1960) cu $M = 5,75$ și $D = 3,5$ km. În general, componentele cu frecvențe înalte (perioade joase) se atenuează, în timp și în spațiu, mult mai repede decît componentele cu frecvențe joase (perioade înalte). Cu cît magnitudinea este mai mare sau distanța epicentrală crește, devin predominante perioadele înalte (structurile rigide fiind mai protejate, iar cele înalte mai expuse la solicitări seismice), în timp ce la magnitudini sau distanțe epicentrale relativ reduse perioadele joase sînt predominante (structurile flexibile avînd o protecție antiseismică relativ mai ridicată decît cele rigide).

Spectrele accelerațiilor absolute din figura 8.15 stabilite de K. Kanai [119] pun în evidență influența simultană a magnitudinii cutremurului M, distanței epicentrale D și perioadei predominante T_0, în funcție de perioadele compo-

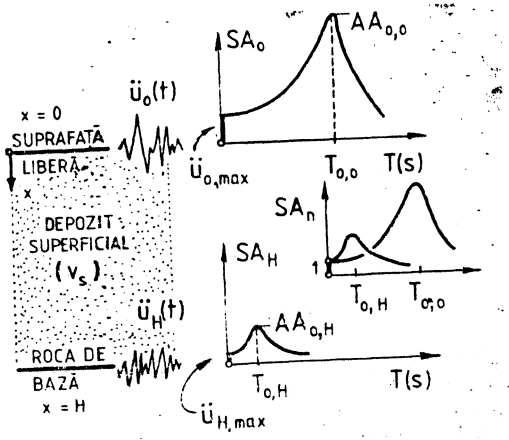


Fig. 8.13

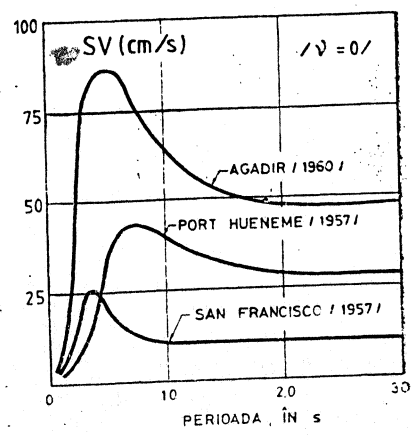


Fig. 8.14

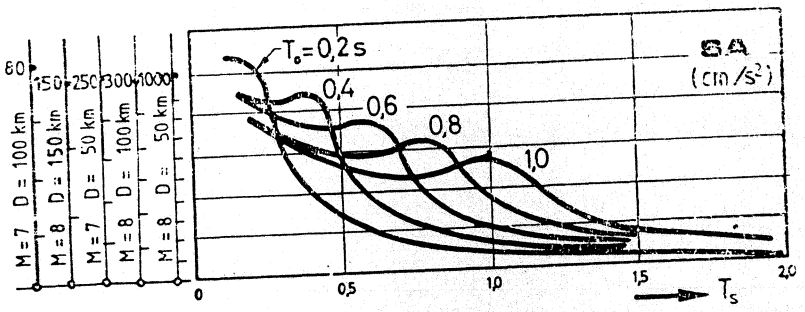


Fig. 8.15

nentelor T_s ale mișcării seismice caracterizată prin variația accelerațiilor $\ddot{u}_0(t)$. Din curbele spectrale reprezentate în figura 10.15, rezultă că un cutremur relativ moderat poate produce la distanțe epicentrale apropiate, efecte distructive mai importante asupra structurilor rigide (cînd $T = T_0$) decît un cutremur violent dar al cărui epicentru este mai depărtat. În multe situații se constată că și contrarul acestei constatări poate fi valabil.

8.1.7. Spectre seismice de răspuns ale sistemelor cu comportare inelastică

În majoritatea situațiilor reale se constată că în timpul unui cutremur puternic comportarea unei structuri nu este totdeauna perfect elastică. Datorită depășirii limitei elastice, energia indusă de mișcarea seismică va trebui să fie compensată prin deformații plastice, ca urmare a incursiunilor postelastice pe care le efectuează sistemul dinamic fără ca degradarea proprietăților sale inițiale să conducă la fenomenul de cedare integrală (colaps). În acest paragraf se vor analiza numai problemele care privesc comportarea

secțiunilor și elementelor, urmînd ca aspectele specifice structurilor, ansamblurilor structurale și conexiunilor dintre elementele asociative să se dezvolte în capitolul 9.

Cînd un element de rezistență, acționat în regim static sau dinamic, își epuizează capacitatea de rezistență în domeniul elastic sau pînă la limite de curgere, se consideră că *cedarea are un caracter casant* sau *fragil*, fără ca procesul de avariere să fie însoțit de fenomene specifice de avertizare. Dacă deformațiile continuă să crească și peste limita de curgere, pînă în momentul cedării totale, se consideră că *cedarea are un caracter ductil*, procesul de avariere fiind progresiv, desfășurîndu-se pe o perioadă de timp limitată. Fenomenul de cedare ductilă este mai puțin periculos decît cel de cedare fragilă întrucît apariția unor deformații mari, însoțite de degradări superficiale, constituie un indiciu de avertizare asupra evoluției procesului de alterare a proprietăților fizico-mecanice inițiale (fig. 8.16).

Ductilitatea unei secțiuni sau *unui element* de rezistență permite evaluarea globală a posibilității existente de adaptare postelastică la șocuri seismice severe. Concepția elastică de proiectare are un caracter pur convențional întrucît nu reflectă integral comportarea unei structuri la acțiunea cutremurelor puternice ci numai la șocuri slabe sau moderate. Privită din punct de vedere energetic, comportarea unei structuri pe timpul unui cutremur trebuie să asigure în condiții de rezistență și stabilitate consumul întregii energii induse (cu caracter cinetic) prin energia de disipare elastică (energie corespunzătoare deformațiilor elastice) și prin energie ductilă (energie corespunzătoare deformațiilor postelastice).

Pe baza modelului simplificat de comportare elasto-plastică din figura 8.17, de tip biliniar perfect elastic-perfect plastic (Prandtl), se poate defini *factorul de ductilitate secțională* sau *de element*. În acest sens, ductilitatea secțională se poate evalua prin intermediul relației moment M — curbură Φ, iar cea de element prin intermediul relației forță F — deplasare liniară x. Prin definiție, factorul de ductilitate μ reprezintă raportul dintre valorile maxime ale curburii Φ_m sau ale deplasării liniare x_m la limita de rupere (limita de cedare sau stadiul ultim), și valorile corespunzătoare limitei elastice (punctul de curgere) Φ_c, respectiv x_c, ale acelorași mărimi, rezultînd:

— ductilitatea secțională $\mu = \Phi_m/\Phi_c$,

— ductilitatea de element $\mu = x_m/x_c$.

Factorii de ductilitate μ sînt numere adimensionale, cu valori diferențiate de la element la element, care pot caracteriza comportarea inelastică a unei

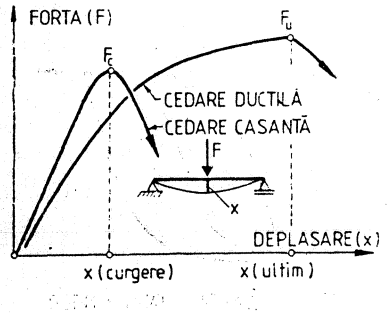


Fig. 8.16

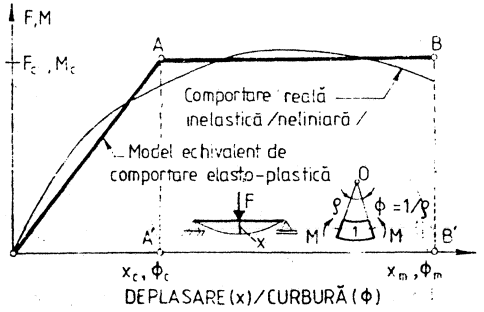


Fig. 8.17

secțiuni sau element (precum și a structurilor în general) la acțiuni statice și dinamice, depinzînd în principal de următorii factori:

— calitatea materialelor și proprietățile fizico-mecanice ale acestora (oțel, beton, zidărie, mortar etc.);

— forma secțiunii transversale, geometria elementelor, precum și tipul de alcătuire al ansamblului structural;

— conexiunile dintre elementele structurale (legături, îmbinări, rezemări etc.) și modul de realizare;

— cantitatea de armătură longitudinală și transversală în cazul elementelor de beton armat;

— eforturi dominante (de încovoiere, compresiune, forfecare), solicitări compuse etc.;

— dirijarea ruperilor (stările ultime) și natura mecanismelor de cedare (secțiuni, elemente, substructuri și structuri);

— distribuția efectivă a solicitărilor secționale;

— modul de aplicare al acțiunilor în procesul de încărcare-descărcare (statice, ciclice, aleatoare).

Contribuții importante la studiul răspunsului seismic al sistemelor cu comportare inelastică au fost aduse de J.A. Blume [28], [29] N.M. Newmark [146], [147], A.S. Veletsos [193], [194], V.V. Bertero [22], T. Pauley [156], R. Park [154] etc. Studiile în acest domeniu inițiate de cercetătorii americani au permis exprimarea spectrelor seismice elasto-plastice prin intermediul spectrelor seismice elastice, corespunzătoare aceluiași sistem cu 1GLD, în funcție de factorul de ductilitate. În acest sens, în figura 8.18 se prezintă o serie de modele de comportare, prin curbe schelet convenționale care permit

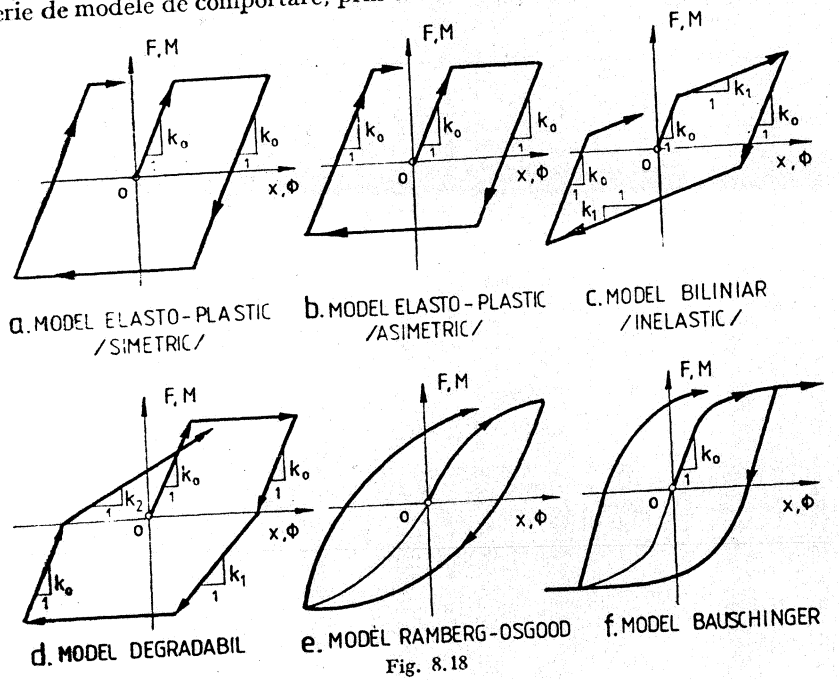


Fig. 8.18

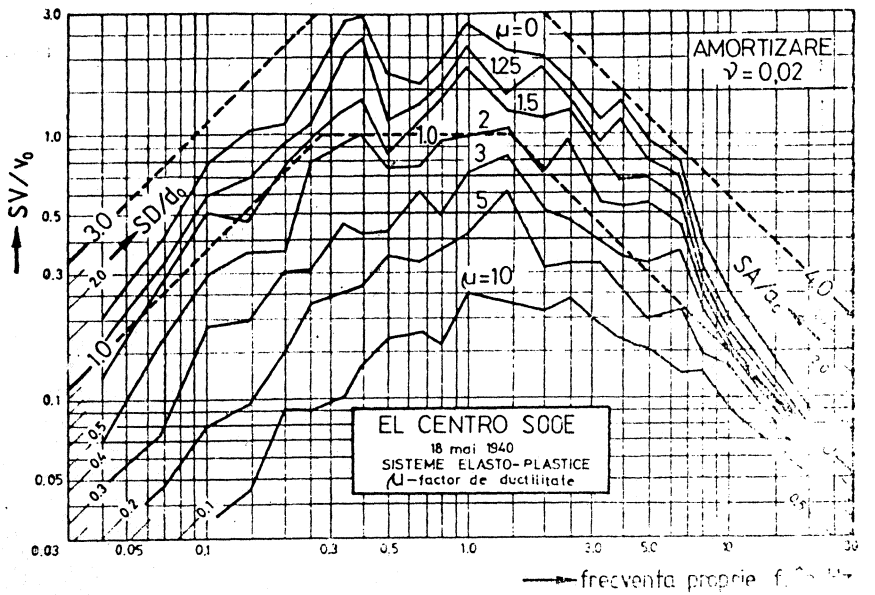


Fig. 8.19

definirea și evaluarea ductilității, precum și a degradării rigidității secționale sau de element, implicit a capacității de rezistență.

În figura 8.19 se prezintă spectrul seismic tripartit elasto-plastic, în funcție de frecvența proprie a sistemului cu 1GLD, corespunzător componentei S00E a accelerației cutremurului înregistrat la *El Centro* — California (18 mai 1940). Curbele spectrale sînt diferențiate în funcție de factorul de ductilitate μ și corespund unei fracțiuni din amortizarea critică liniar vîscoasă egală cu $\nu = 0{,}02$. Valorile spectrale sînt raportate la caracteristicile cinematice maxime ale mișcării terenului d_0, v_0, a_0, rezultînd amplificările relative (adimensionale) ale răspunsului elasto-plastic, în funcție de capacitatea sistemului de a efectua incursiuni postelastice.

În principiu, utilizarea spectrelor seismice elasto-plastice constă în a efectua o analiză similară celei elastice în care intervine factorul de ductilitate μ care introduce în calcul posibilitatea ca sistemul să depășească pe timpul istoric al mișcării seismice limita elastică (punctul teoretic de curgere sau de plastifiere al secțiunii). Pentru determinarea factorului de ductilitate este necesar să se urmărească comportarea secțiunii, elementului sau structurii de la inițierea deformațiilor elastice pînă în stadiul ultim de colaps, așa cum se indică în figura 8.17 în care palierul AB pune în evidență capacitatea de adaptare postelastică.

Întrucît prin deformații postelastice sistemul consumă o parte din energia totală indusă printr-un efect echivalent cu cel de amortizare (disipare energetică ductilă), răspunsul seismic corespunzător limitei elastice (sau punctului de curgere) se va reduce în funcție de factorul de ductilitate. *Coeficientul de reducere* R se poate evalua admițînd două modele de comportare pentru sistemul cu 1GLD din figura 8.1.

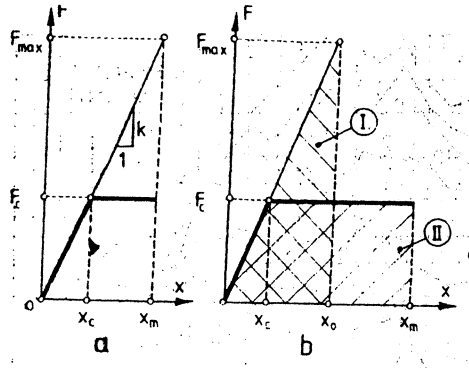


Fig. 8.20

Primul model se bazează pe *criteriul conservării deplasării maxime* sau *conservării rigidității* în stadiul elastic și postelastic. Pe baza notațiilor din figura 8.20, *a* rezultă

$$k = \frac{F_{max}}{x_m} = \frac{F_c}{x_c}, \quad \left(\mu = \frac{x_m}{x_c}\right),$$

de unde se obține

$$R = \frac{F_c}{F_{max}} = \frac{x_c}{x_m} = \frac{1}{\mu}. \qquad (8.38)$$

În cel de-al doilea model admis se aplică *criteriul energetic* în care se consideră că energia totală maximă indusă în sistem (8.24) se conservă în cele două stări de comportare elastică și postelastică. Prin egalarea energiilor potențiale maxime (suprafețele hașurate I și II din figura 8.20, *b*) se obține

$$E_{I,\,max} = \frac{1}{2} k x_0^2 = \frac{1}{2} F_{max} x_0,$$

$$E_{II,\,max} = \frac{1}{2} k x_c^2 + F_c(x_m - x_c) = \frac{1}{2} F_c x_c + F_c(x_m - x_c).$$

Deoarece rigiditatea în stadiul elastic, corespunzătoare celor două stări, nu se degradează, se poate scrie relația

$$k = \frac{F_{max}}{x_0} = \frac{F_c}{x_c}, \quad x_0 = \frac{F_{max}}{F_c} x_c,$$

iar prin înlocuirea în expresia $E_{II,\,max}$ și egalarea celor două energii

$$\frac{1}{2} \frac{F_{max}^2}{F_c} x_c = F_c\left(x_m - \frac{1}{2} x_c\right),$$

de unde se determină coeficientul de reducere

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\mu - 1}}. \qquad (8.39)$$

Disiparea ductilă a energiei totale prin deformații exclusiv plastice poate fi estimată prin raportul dintre energia consumată prin deformații postelastice E_{pe} și energia totală maximă

$$\frac{E_{pe}}{E_{T,max}} = \frac{F_c(x_m - x_c)}{F_c(x_m - x_c/2)} = \frac{2(\mu - 1)}{2\mu - 1}. \qquad (8.40)$$

Se poate constata din relația (8.40) importanța pe care o reprezintă factorul de ductilitate în ceea ce privește consumarea energiei induse de cutremur prin energie potențială de deformație postelastică. Într-adevăr, cu cît se asigură unei secțiuni sau unui element o comportare postelastică favorabilă, printr-o ductilizare corespunzătoare, cu atît energia ce urmează a fi consumată prin incursiuni postelastice va fi mai mare. În acest mod se asigură o adaptare postelastică, locală sau generală, rațională, evitîndu-se solicitările exagerate în domeniul elastic, precum și degradările cu caracter casant (fragil). Trebuie avut în vedere însă că ductilizarea exagerată intră în contradicție cu caracteristicile de elasticitate (flexibilitate sau rigiditate) și de rezistență ale secțiunilor elementelor componente, conexiunilor și ale structurilor.

Din analiza spectrelor seismice tripartite corespunzătoare sistemelor cu comportare postelastică, de tipul celui reprodus în figura 8.19, rezultă următoarele concluzii:

- În zona frecvențelor proprii joase (perioade proprii înalte), deplasările relative ale sistemului elasto-plastic sînt aproximativ egale cu cele ale sistemului cu comportare elastică.
- În zona frecvențelor proprii intermediare (cuprinse între 2 Hz și 8 Hz) energia totală absorbită este aceeași pentru cele două sisteme, elastic și elastoplastic.
- În zona frecvențelor proprii înalte (perioade proprii joase), accelerațiile sistemelor (inclusiv forțele de inerție) elasto-plastice și elastice sînt identice.

Se constată că *pentru frecvențele proprii curente deplasările relative cresc*, iar *accelerațiile absolute se reduc* simțitor în funcție de mărimea factorului de ductilitate. Avînd în vedere relațiile (8.38) și (8.39) se poate stabili raportul dintre răspunsul seismic al sistemului elasto-plastic și răspunsul seismic al sistemului elastic [194]. Astfel, în tabelul 8.1 sînt dați coeficienții de modificare ai răspunsului, care permit definirea spectrelor seismice ale sistemelor cu comportare inelastică (elasto-plastică) prin intermediul spectrelor seismice ale sistemelor cu comportare liniară (elastice). În continuare, operațiile de calcul se efectuează în aceeași manieră ca în analiza elastică. Figura 8.21, în care s-au reprezentat grafic coeficienții de modificare ai deplasărilor relative și accelerațiilor absolute, pune în evidență contradicția existentă între micșorarea accelerațiilor (implicit a forțelor de inerție) și amplificarea deplasărilor relative în funcție de creșterea ductilității. Acest fapt demonstrează că există o limită a ductilizării întrucît prin flexibilizarea sistemului pot surveni efecte de ordinul doi periculoase, cu consecințe mai grave asupra rezistenței și stabilității structurilor.

TABELUL 8.1

CANTITATEA CARE SE CONSERVĂ ÎN SPECTRU	RAPORTUL DINTRE RĂSPUNSUL ELASTO-PLASTIC ȘI RĂSPUNSUL ELASTIC	
	DEPLASAREA	ACCELERAȚIA
Deplasarea	1	$1/\mu$
Viteza sau energia	$\mu/\sqrt{2\mu - 1}$	$1/\sqrt{2\mu - 1}$
Accelerația sau forța	μ	1

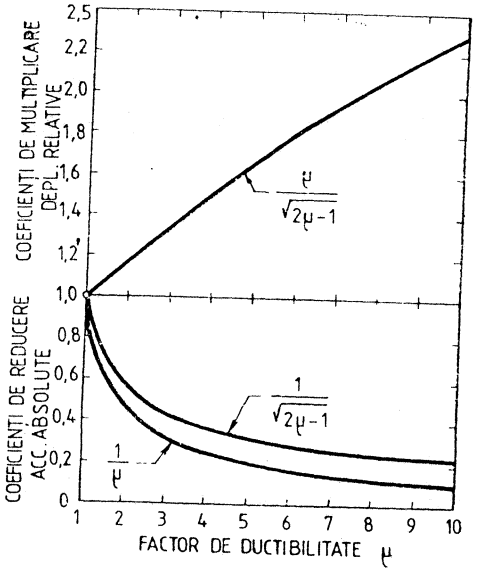


Fig. 8.21

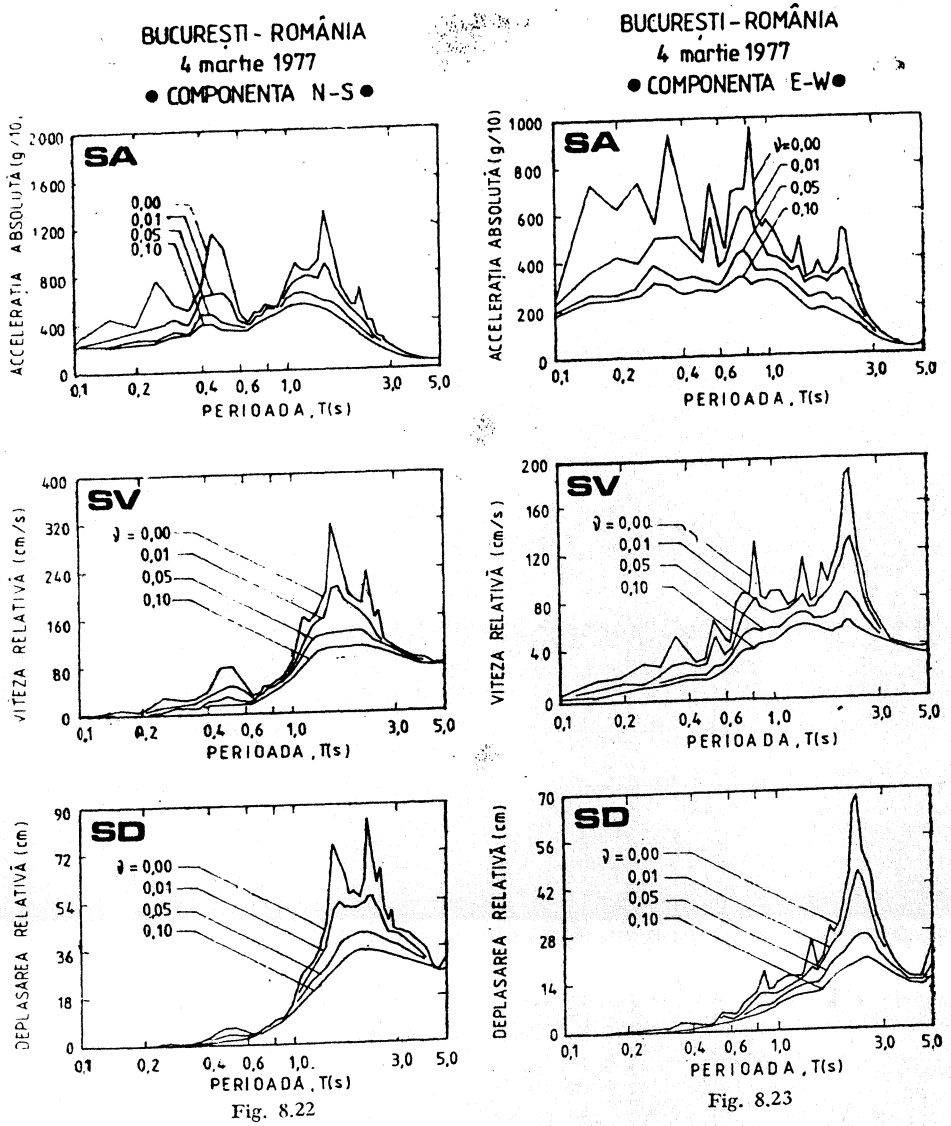


Fig. 8.22

Fig. 8.23

După cum s-a menționat și cum rezultă din relația (8.40), efectul ductilității poate fi asimilat cu un parametru disipator (atribuit absorbției de energie postelastică), exprimat printr-o amortizare ductilă echivalentă, fără a ține seama însă de majorarea deplasărilor. De aceea acest mod unilateral de a privi problema nu trebuie absolutizat în analiza inelastică a structurilor.

În concluzie, se poate constata importanța tehnică și economică pe care o are comportarea postelastică a structurilor rezistente la cutremure, în condiții de rezistență și siguranță satisfăcătoare. De altfel, realizarea unei structuri capabile să reziste unui cutremur puternic numai în domeniul elastic

ar constitui o imposibilitate dar și o eroare de concepție întrucît proprietățile și rezervele de rezistență ale materialelor, precum și dispunerea elementelor structurale nu ar fi valorificate integral. Din analiza răspunsului postelastic prezentată succint în acest paragraf, rezultă avantajul utilizării spectrelor seismice compacte (tripartite-logaritmice) corespunzătoare sistemelor cu comportare liniară, deoarece prin corectarea acestora, cu valori acceptabile ale factorului de ductilitate μ, operațiile numerice pot fi conduse în mod identic celor din domeniul elastic. În capitolul 9 se va reveni asupra tuturor aspectelor teoretice și practice specifice elementelor structurale, conexiunilor și structurilor.

8.1.8. Caracteristici spectrale ale cutremurului din 4 martie 1977 înregistrat în București

Din punct de vedere ingineresc, în timpul cutremurului din 4 martie 1977 s-au obținut informații instrumentale reduse, care să permită descrierea și interpretarea caracteristicilor intrinseci ale mișcării terenului pe întreaga arie semnificativă de manifestare. În această privință, unicele înregistrări pe trei direcții ortogonale sînt cele furnizate de accelerograful SMAC-B (de construcție japoneză) în stația seismică INCERC-București. În capitolul 7 au fost reproduse accelerogramele înregistrate în urma corectărilor corespunzătoare, precum și variațiile vitezelor și deplasărilor determinate prin integrare numerică [35], pentru durata semnificativă a evenimentului seismic evaluat la 15 s. Au fost reprezentate grafic componentele N-S sau S00W (fig. 7.14), E-W sau E00N (fig. 7.15) și verticală (fig. 7.16). Tabelul 7.3 conține valorile maxime ale caracteristicilor cinematice ale mișcării la suprafața liberă a terenului, rezultate din diverse surse bibliografice, în urma prelucrării înregistrărilor primare (necorectate).

Spectrele seismice de răspuns independente *SA*, *SV* și *SD* sînt trasate în figurile 8.22 (componenta N-S), 8.23 (componenta E-W) și 8.24 (componenta verticală) în funcție de fracțiunea din amortizarea critică $\nu = 0{,}00$, $\nu = 0{,}01$, $\nu = 0{,}05$

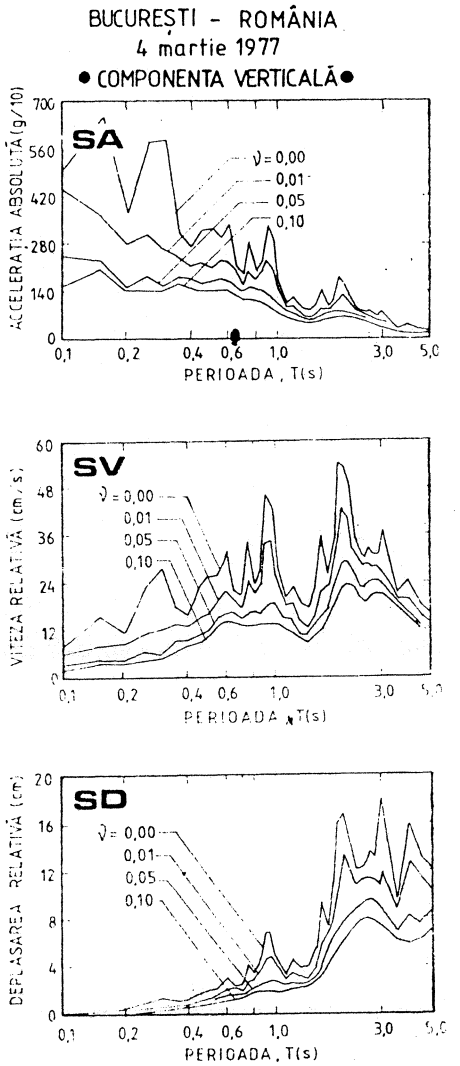


Fig. 8.24

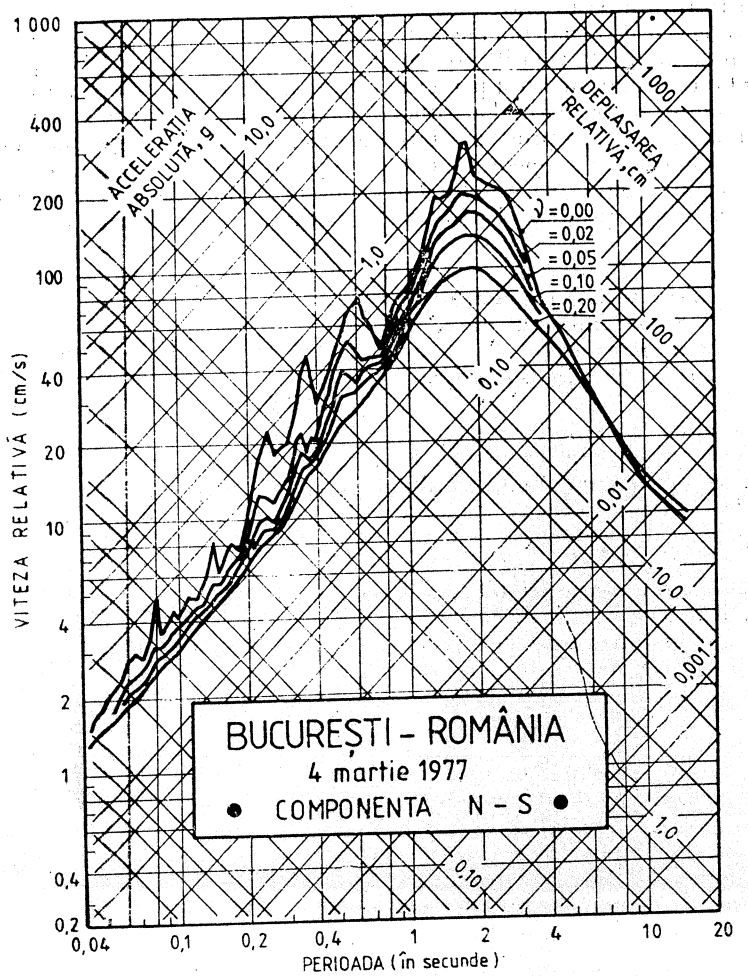


Fig. 8.25

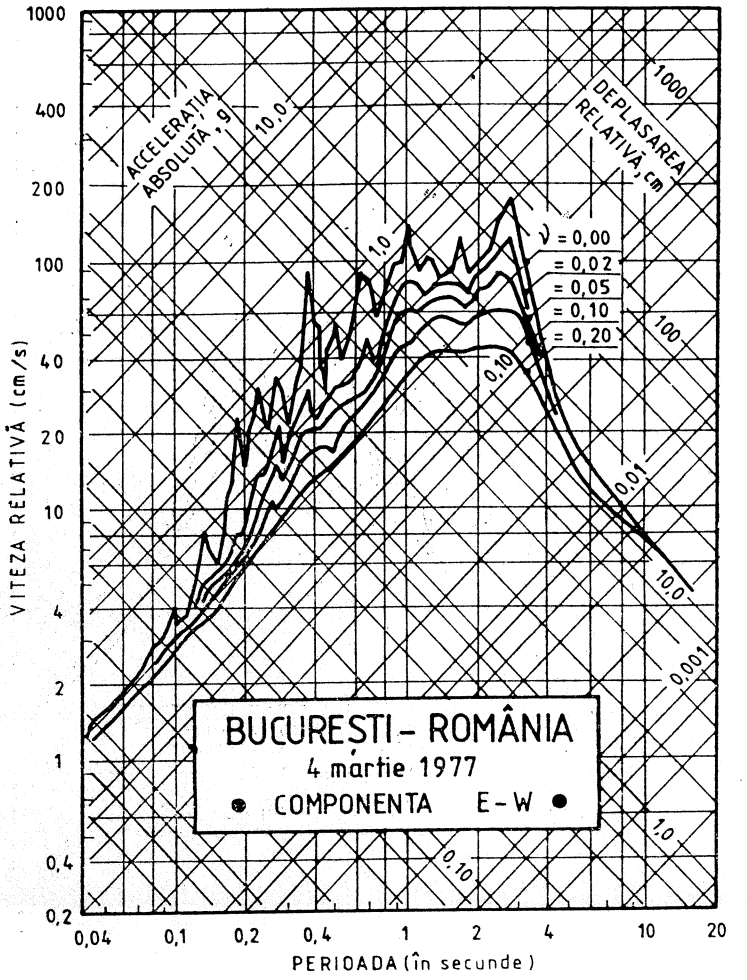


Fig. 8.26

și $\nu = 0{,}10$ și perioada neamortizată $T(s)$ exprimată în scară logaritmică [233]. În figurile 8.25, 8.26 și 8.27 sînt date spectrele tripartite (logaritmice) corespunzătoare acelorași componente [35].

Din analiza înregistrărilor și spectrelor seismice de răspuns, rezultă o serie de concluzii care se prezintă în continuare.

● *Perioadele predominante* T_0 de bază ale componentelor mișcării terenului au valorile: $T_0 \simeq 1{,}75$ s (N-S), $T_0 \simeq 0{,}95$ s (E-W) și $T_0 \simeq 0{,}25$ s (vertical). Componentele orizontale, caracterizate prin perioade proprii lungi, pun în evidență o mișcare seismică cu o configurație de excepție pe plan mondial.

● *Perioadele semnificative*, care definesc vîrfuri de amplificare relativă în spectre, se pot identifica cu aproximație astfel: 0,3 s, 0,5 s și 1,75 s (N-S), 0,3 s, 0,6 s, 0,95 s, 1,6 s și 2,3 s (E-W) și 0,25 s, 0,6 s, 0,9 s, 1,7 s și 3,0 s (vertical), ceea ce demonstrează compoziția spectrală complexă a mișcării terenului, cu bandă destul de largă de perioade.

● *Compoziția spectrală* (conținutul de frecvențe sau conținutul spectral) a componentei N-S, în care componenta predominantă ce guvernează toate spectrele de răspuns este cea mai lungă, este remarcată și în spectrul Fourier al amplitudinilor *FS* din figura 7.26, în comparație cu compozițiile spectrale ale cutremurelor înregistrate la *El Centro*—California, 18 mai 1940 (componenta S00E) și *Ferndale* (*Eureka*) — California, 21 decembrie 1954 (componenta N44E). Din figura 7.26 se poate constata similitudinea existentă între compozițiile spectrale ale înregistrărilor de la București (N-S) și Ferndale (N44E).

● *Compoziția spectrală particulară* și apariția unor perioade lungi pot fi atribuite în principal *mecanismului de focar* (magnitudinea, adîncimea sursei,

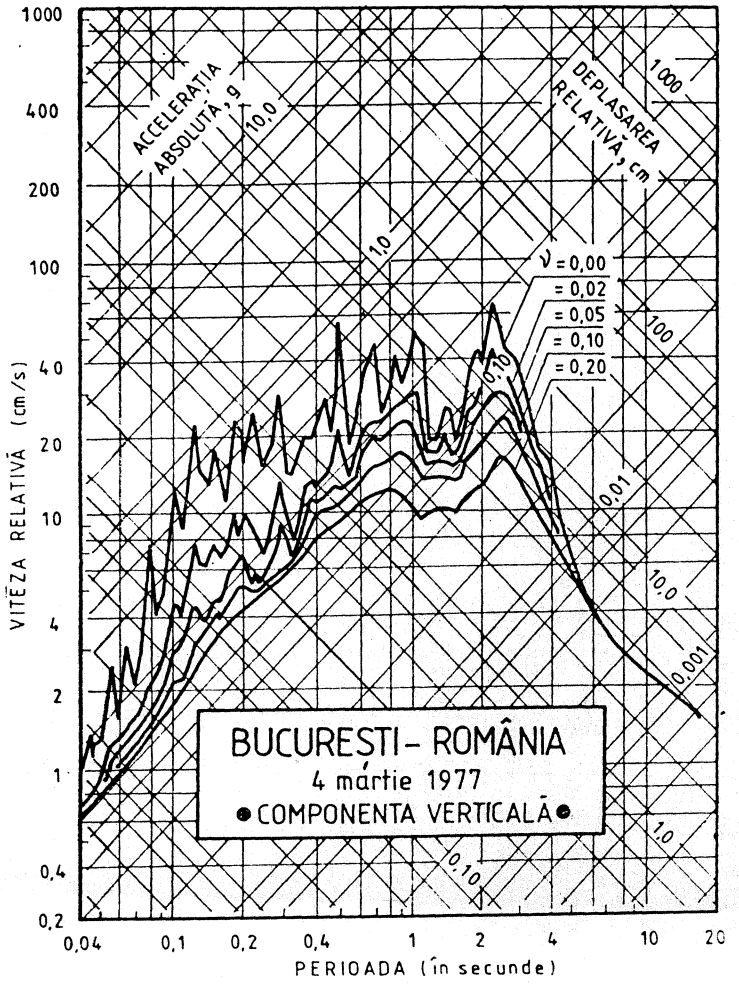


Fig. 8.27

caracterul multișoc al cutremurului etc.), *caracteristicilor geologice ale mediului de propagare*, precum și *proprietăților fizico-mecanice și dinamice ale depozitului superficial* caracteristice *condițiilor locale de teren* în care este situat Municipiul București. În privința ultimului aspect, care poate fi considerat de importanță majoră, trebuie menționat că terenul din zona Municipiului București este alcătuit dintr-un pachet de straturi neomogene și moi cu grosimi relativ mari, caracterizate prin viteze de propagare ale undelor secundare (transversale, de forfecare) reduse ($v_S < 500$ m/s), având proprietăți de filtrare a componentelor cu frecvențe înalte (perioade joase), precum și de amplificare seismică pronunțată de la roca de bază până la suprafața liberă a terenului.

Diferențierea compozițiilor spectrale ale componentelor N-S și E-W, ultima mult mai complexă, denotă existența unei pronunțate neomogenități

geologice în ceea ce privește orientarea stratelor superficiale pe teritoriul Municipiului București.

● *Spectrele seismice ale accelerațiilor absolute* (care caracterizează direct intensitatea forțelor seismice maxime) permit identificarea domeniilor de amplificare notabilă a răspunsului pe cele trei direcții. Se constată o atenuare rapidă a accelerațiilor absolute AA pentru $T > 2$s (N-S), $T > 1$ s (E-V) și $T > 0{,}5$ s (vertical) și de asemenea o descreștere suficient de pronunțată la amortizări destul de reduse. Amplificarea relativă a răspunsului, exprimat în AA în raport cu accelerația maximă la nivelul terenului $\ddot{u}_{0.max} = a_0$, este destul de mare, în special SA (N-S), chiar pentru valori ale fracțiunii din amortizarea critică ridicate.

Evidențierea directă a amplificărilor relative spectrale se obține prin reprezentarea grafică a spectrelor normalizate, în funcție de coeficientul de amortizare ν, definite prin relația (8.37), adică $SA_n = SA/a_0$. În figura 8.28 sînt reprezentate în comparație spectrele normalizate SA_n (în care rezultă și perioada predominantă a curbelor spectrale caracterizate de $\nu = 0{,}05$), corespunzătoare cutremurelor înregistrate la *El Centro* — California (18 mai 1940, $T_0 \simeq 0{,}5$ s), *Ferndale* (*Eureka*) — California (21 decembrie 1954, $T_0 \simeq 1{,}5$ s), *Mexico-City* (19 mai 1962, $T_0 \simeq 2{,}5$ s), *Niigata* — Japonia (16 iunie 1964, $T_0 \simeq 0{,}8$ s) și București (N-S) — România (4 martie 1977, $T_0 = 1{,}4$ s). Din variația SA_n, specifică particularităților fiecărei înregistrări și amplasamentului respectiv, rezultă importanța decisivă pe care o are acordarea caracteristicilor dinamice proprii ale structurilor cu configurația spectrelor de răspuns. Asupra acestei probleme, care necesită o analiză mai profundă, fiind fundamentală în proiectarea structurilor în concept dinamic, se va reveni cu precizări suplimentare în capitolul 9.

● Aspectul diferit al configurațiilor tuturor spectrelor (SA, SV și SD) corespunzătoare celor două componente, a fost influențat și de *directivitatea* NE-SW a energiei eliberate în focar (fig. 7.36).

● Studiul asupra unor seisme slabe sau moderate efectuat de D. Rădulescu [166] a confirmat caracterul persistent și izolat al macroseismelor generate de focarele intermediare situate în zona Vrancea, precum și configurația destul de stabilă a spectrelor seismice de răspuns. În figura 8.29 sînt reprezentate spectrele SA pentru trei seisme (componentele N-S) ale căror principale caracteristici (magnitudine și adîncime) sînt precizate direct pe figură. Se constată că perioadele dominante sînt situate în intervalul 0,2—0,5 s, astfel încît rezultă, față de spectrele seismice ale cutremurului din 4 martie 1977, o deplasare a amplificărilor spre stînga. În mod aparent se constată o contradicție între concluziile anterioare și aspectul SA din figura 8.29. Dacă însă se ține seama de influența magnitudinii șocului seismic, precum și de comportarea neliniară a terenului la acțiuni seismice puternice este de așteptat ca perioada predominantă să crească considerabil în cazul cutremurelor violente. Pe baza lucrării [175], elaborată de B. H. Seed referitoare la anticiparea perioadelor predominante, se poate estima că perioada predominantă corespunzătoare unei magnitudini $M = 7{,}2$ (cît a avut cutremurul din 4 martie 1977) poate deveni cel puțin de două ori mai mare decît perioada predominantă a unui cutremur de magnitudine $M = 5$ (așa cum este situația celor din figura 8.29), cînd distanța epicentrală este de circa 160 km. În acest context, se poate afirma că studiul microseismelor dintr-un anumit amplasament poate caracteriza amplificările locale probabile (inclusiv peri-

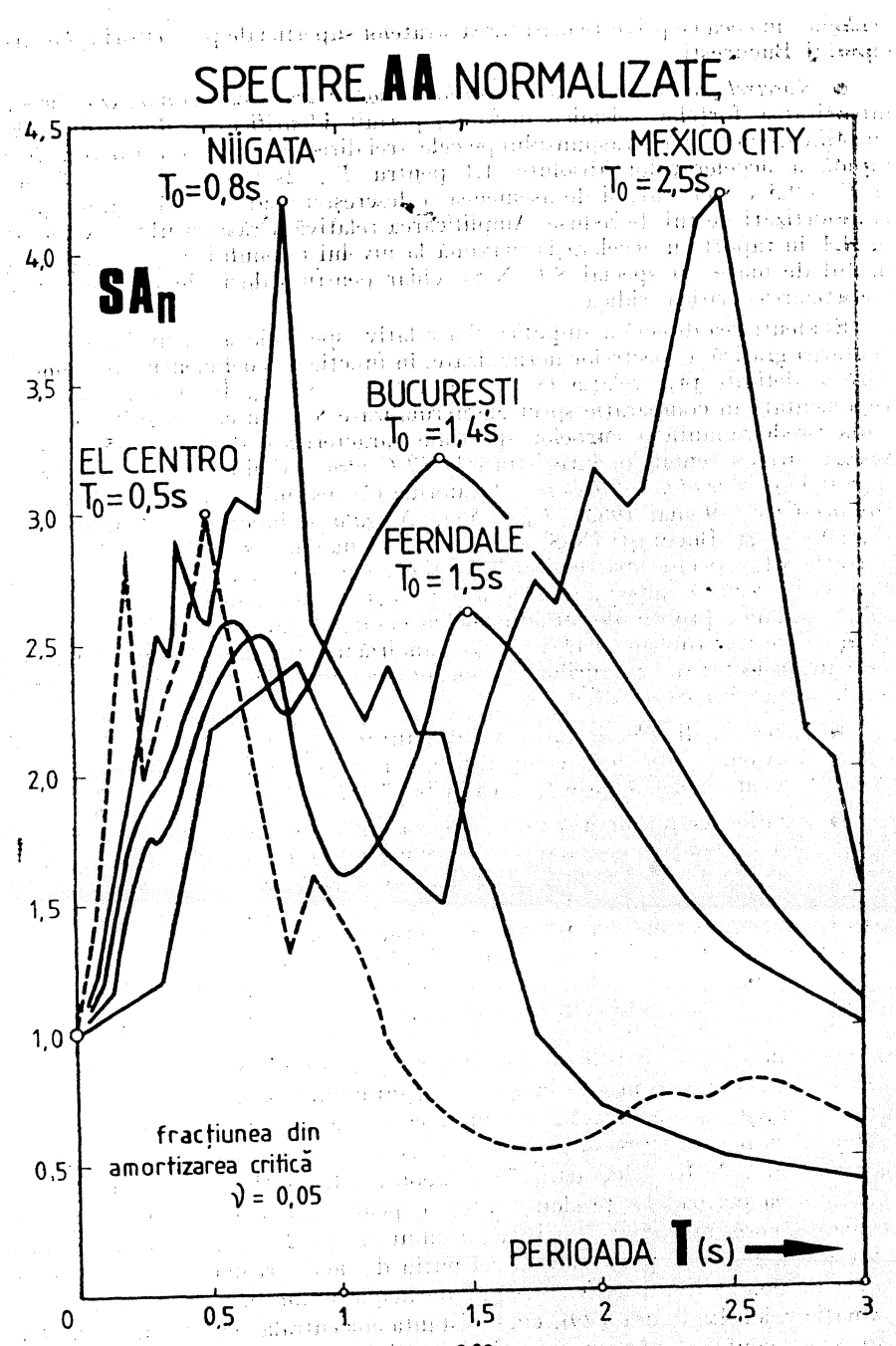


Fig. 8.28

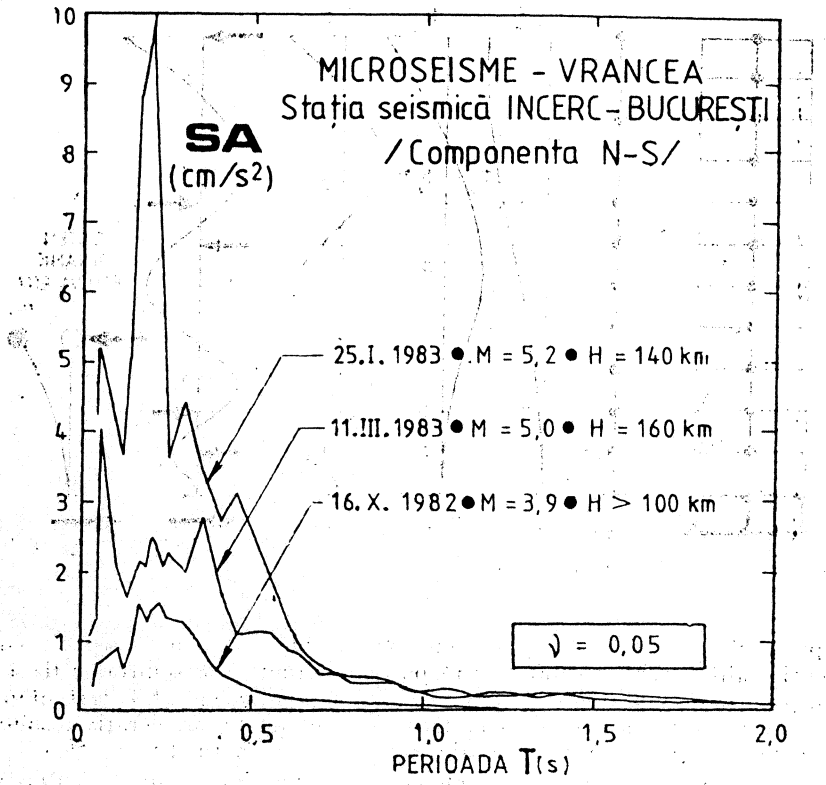


Fig. 8.29

oadele predominante) prin SA_n, fără a putea pune însă în evidență mecanismul de focar, modul de propagare al undelor seismice, identificarea unor parametri specifici geologiei locale, precum și directivitatea energiei eliberată de sursă.

8.2. RĂSPUNSUL SEISMIC AL SISTEMELOR DISCRETE PLANE. APLICAREA METODEI ANALIZEI MODALE

Se va admite în studiul seismic al sistemelor dinamice discrete cu nGLD modelul dinamic al unei structuri etajate de tipul celui reprezentat în figura 8.30, supus acțiunii mișcării seismice la nivelul bazei de fixare.

În vederea evaluării răspunsului seismic instantaneu sau maxim al sistemelor cu comportare liniară, se va aplica *metoda analizei modale*, numită și *metoda superpoziției modale* în maniera în care a fost descrisă în capitolul 4. De asemenea, se va utiliza noțiunea de spectru seismic de răspuns în sensul definit în § 8.1. Avantajele acestei metode sînt deja cunoscute însă ele devin de importanță majoră în ingineria seismică deoarece, prin decuplarea ecuațiilor de condiție, răspunsul seismic total poate fi exprimat prin superpoziția

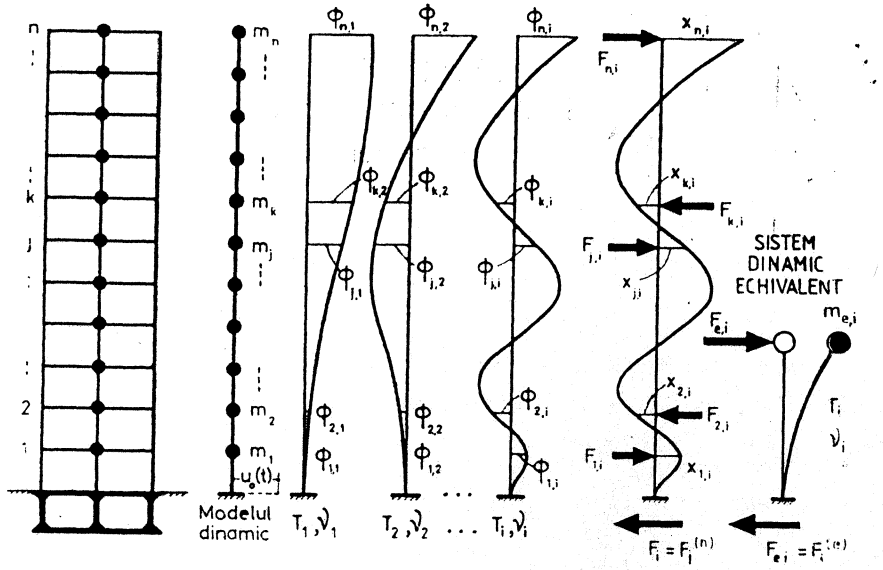


Fig. 8.30

răspunsurilor seismice modale. În acest fel se pune în evidență explicit contribuția calitativă și cantitativă a răspunsului seismic, corespunzător fiecărui mod propriu de vibrație $i = 1, 2, \ldots n$, asupra răspunsului total (instantaneu sau maxim) exprimat în deplasări relative, viteze relative, accelerații absolute, forțe de inerție, eforturi secționale, tensiuni sau deformații.

Datele de intrare, în analiza modală a răspunsului seismic, rezultă din cunoașterea următoarelor caracteristici fundamentale:

- Matricele de definire ale sistemului (modelului) dinamic cu nGLD, adică *matricea de inerție* $[M]$, *matricea de amortizare vîscoasă* $[C]$ și *matricea de rigiditate* $[R]$.
- Matricele dinamice proprii ale sistemului, și anume *matricea spectrală* $[\Omega]$ și *matricea modală* $[\Phi]$, obținute în urma rezolvării problemei specifice de valori și vectori proprii (vezi cap. 3 și 6).
- Vectorul forțelor laterale $\{F(t)\}$, care acționează pe direcția GLD, generate de *mișcarea seismică* $u_0(t)$ aplicată la baza sistemului.

Datorită particularității coordonatelor dinamice admise, sistemul este decuplat inerțial și în consecință matricea maselor rezultă diagonală. Decuplarea disipativă, care a condus la definirea unei matrice de amortizare diagonală, este valabilă în condițiile în care disiparea este de tip vîscos și se manifestă independent numai între etajele consecutive, iar forțele de amortizare sînt proporționale cu vitezele relative pe direcția GLD. Matricea de rigiditate, exprimată în coordonatele dinamice ale sistemului (GLD), se determină (ca acțiuni sau ca reacțiuni) pe baza aspectelor teoretice și aplicative expuse în capitolul 1.

Așa cum rezultă din capitolul 4, diferențierea aplicării metodei generale a analizei modale de la un caz la altul constă în definirea coordonatelor sistemului și a acțiunilor care se aplică pe direcția GLD.

Forțele perturbatoare laterale cu caracter indirect și convențional, de natura unor forțe de inerție, sînt generate de variația accelerațiilor seismice $\ddot{u}_0(t)$ în mișcarea de corp rigid a sistemului, și au expresia

$$F_k(t) = -m_k\ddot{u}_0(t), \quad (k = 1, 2, \ldots n), \quad \{F(t)\} = -[M]\{1\}\ddot{u}_0(t),$$

astfel încît *forța generalizată* (modală) corespunzătoare modului i de vibrație (4.21) devine

$$F^*(t) = \{\Phi\}_i^T\{F(t)\} = -\{\Phi\}_i^T[M]\{1\}\ddot{u}_0(t) = -P_i^*\ddot{u}_0(t), \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

unde P_i^* reprezintă *factorul de participare modal* care se determină cu relația (4.53)

$$P_i^* = \{\Phi\}_i^T[M]\{1\} = \sum_{k=1}^{n} m_k\Phi_{k,i}, \quad \{P^*\} = [\Phi]^T[M]\{1\}.$$

În final rezultă vectorul forțelor generalizate (4.20) sub forma

$$\{F^*(t)\} = [\Phi]^T\{F(t)\} = -[\Phi]^T[M]\{1\}\ddot{u}_0(t) = -\{P^*\}\ddot{u}_0(t)$$

în care intervine direct accelerograma efectivă înregistrată în timpul unui cutremur la suprafața liberă a terenului. Este evident că prin particularizarea acestor expresii generale se obține forța perturbatoare convențională $F(t) = -m\ddot{u}_0(t)$ corespunzătoare sistemului cu 1 GLD.

8.2.1. Răspuns seismic modal instantaneu și total instantaneu

Ecuația matriceală care guvernează răspunsul seismic decuplat în raport cu coordonatele modale (4.13) ... (4.16) are următoarea formă generală (4.54) integrabilă

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [2\nu\omega]\{\dot{\eta}(t)\} + [\Omega]\{\eta(t)\} = -[M^*]^{-1}\{P^*\}\ddot{u}_0(t),$$

din care se obține ecuația modală independentă, corespunzătoare modului i de vibrație, care permite evaluarea răspunsului modal instantaneu

$$(i) \quad \ddot{\eta}_i(t) + 2\nu_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = -\frac{P_i^*}{M_i^*}\ddot{u}_0(t). \tag{8.41}$$

Deoarece ecuația (8.41) are din punct de vedere matematic o formă similară cu (8.3), în baza condițiilor inițiale nule soluția generală va avea aceeași exprimare cu (8.6), adică

$$\eta_i(t) = -\frac{P_i^*}{M_i^*}\frac{1}{\omega_i^*}\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \sin\omega_i(t-\tau)\, d\tau, \tag{8.42}$$

obținîndu-se astfel expresia generală standard a coordonatei generalizate (coordonată modală) valabilă pentru toate modurile proprii de vibrație $i = 1, 2, \ldots n$. Prin derivări succesive se obțin funcțiile modale $\dot{\eta}_i(t)$ și $\ddot{\eta}_i(t)$ ale căror expresii sînt formal identice cu (8.7) și (8.8).

Revenirea la coordonatele dinamice originale se face prin intermediul relațiilor (4.13) ... (4.16) care au stat la baza transformării liniare (în coordonate modale) a ecuațiilor de mișcare ale sistemului cu nGLD. Se face mențiunea că în exprimarea răspunsului se va face abstracție de semnul algebric (toate

mărimile vor fi pozitiv definite), avînd în vedere caracterul alternant al mișcării excitației exterioare.

În consecință, rezultă *expresiile răspunsului seismic modal instantaneu*, caracterizat prin:

- *deplasări relative modale instantanee (DRMI)*

$$DRMI = x_{k,i}(t) = \Phi_{k,i}\eta_i(t), \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{8.43}$$

sau

$$DRMI = \{x(t)\}_i = \{\Phi\}_i\,\eta_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{8.44}$$

- *viteze relative modale instantanee (VRMI)*

$$VRMI = v_{k,i}(t) = \Phi_{k,i}\,\dot{\eta}_i(t), \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{8.45}$$

sau

$$VRMI = \{v(t)\}_i = \{\Phi\}_i\,\dot{\eta}_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{8.46}$$

- *accelerații absolute modale instantanee (AAMI)*

$$AAMI = a_{k,i}(t) = \Phi_{k,i}\,\ddot{\eta}_i(t), \quad k = 1, 2, \ldots n, \tag{8.47}$$

sau

$$AAMI = \{a(t)\}_i = \{\Phi\}_i\,\ddot{\eta}_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots n. \tag{8.48}$$

Din expresiile de mai sus se poate constata că variația răspunsului seismic modal instantaneu, exprimat în termenii cinematici ai mișcării sistemului (*DR*, *VR* și *AA*), are aceeași configurație geometrică cu formele proprii de vibrație (vectorii proprii staționari) în orice moment t cuprins pe durata aplicării acțiunii $t_F(0 < t \leqslant t_F)$.

Întrucît vectorii proprii $\{\Phi\}_i$ sînt pivotați printr-o ordonată unitară (vezi cap. 3), care în această situație se consideră pe direcția GLD n adică $\Phi_{n,i} = 1$, $i = 1, 2, \ldots n$, rezultă că funcțiile modale $\eta_i(t)$, $\dot{\eta}_i(t)$ și $\ddot{\eta}_i(t)$ au semnificația de deplasare relativă modală, viteză relativă modală, respectiv accelerație absolută modală corespunzătoare GLD specific ordonatei pivot (în situația de față coordonata n).

Cunoscînd *AAMI* se pot determina forțele de inerție modale instantanee, numite și *forțe seismice de nivel modale instantanee (FSNMI)* astfel

$$FSNMI = F_{k,i}(t) = m_k a_{k,i}(t) = m_k \Phi_{k,i}\,\ddot{\eta}_i(t), \tag{8.49}$$

sau

$$FSNMI = \{F(t)\}_i = [M]\,\{\Phi\}_i\,\ddot{\eta}_i(t), \tag{8.50}$$

precum și rezultantele *FSNMI*, corespunzătoare fiecărui mod de vibrație, denumite *forțe tăietoare de bază modale instantanee FTBMI*:

$$FTBMI = F_i(t) = \sum_{k=1}^{n} F_{k,i} = \left[\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,i}\right] \ddot{\eta}_i(t), \tag{8.51}$$

sau

$$FTBMI = F_i(t) = P_i^*\,\ddot{\eta}_i(t). \tag{8.52}$$

Totalitatea răspunsurilor modale instantanee definesc *matricele modale de răspuns*:

- *matricea deplasărilor relative modale instantanee*

$$[x(t)] = [\{x(t)\}_1 \ldots \{x(t)\}_i \ldots \{x(t)\}_n] = [\Phi]\,[\eta(t)], \tag{8.53}$$

- *matricea vitezelor relative modale instantanee*

$$[v(t)] = [\{v(t)\}_1 \ldots \{v(t)\}_i \ldots \{v(t)\}_n] = \{\Phi\}\,[\dot{\eta}_i(t)], \tag{8.54}$$

- *matricea accelerațiilor absolute modale instantanee*

$$[a(t)] = [\{a(t)\}_1 \ldots \{a(t)\}_i \ldots \{a(t)\}_n] = [\Phi]\,[\ddot{\eta}_i(t)], \tag{8.55}$$

- *matricea forțelor seismice de nivel modale instantanee*

$$[F(t)] = [\{F(t)\}_1 \ldots \{F(t)\}_i \ldots \{F(t)\}_n] = [M]\,[\Phi]\,[\ddot{\eta}_i(t)], \tag{8.56}$$

- *matricea forțelor tăietoare de bază modale instantanee*

$$[F(t)] = \begin{bmatrix} F_1(t) & & \text{ZERO} \\ & \ddots & \\ & F_i(t) & \\ & \ddots & \\ \text{ZERO} & & F_n(t) \end{bmatrix} = \{P^*\}\,[\ddot{\eta}_i(t)] = \{P^*\}\,\{\ddot{\eta}_i(t)\}. \tag{8.57}$$

Răspunsul seismic total instantaneu se obține printr-o operație de suprapoziție liniară a răspunsurilor modale (8.53) ... (8.57) astfel

- *deplasări relative totale instantanee (DRTI)*

$$\{x(t)\} = [x(t)]\,\{1\} = [\Phi]\,\{\eta(t)\}, \tag{8.58}$$

- *viteze relative totale instantanee (VRTI)*

$$\{v(t)\} = [v(t)]\,\{1\} = [\Phi]\,\{\dot{\eta}(t)\}, \tag{8.59}$$

- *accelerații absolute totale instantanee (AATI)*

$$\{a(t)\} = [a(t)]\,\{1\} = [\Phi]\,\{\ddot{\eta}(t)\}, \tag{8.60}$$

- *forțe seismice de nivel totale instantanee (FSNTI)*

$$\{F(t)\} = [F(t)]\,\{1\} = [M]\,[\Phi]\,\{\ddot{\eta}(t)\}, \tag{8.61}$$

- *forța tăietoare de bază totală instantanee (FTBTI)*

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n} F_i(t) = \{P^*\}^T\,\{\ddot{\eta}(t)\}. \tag{8.62}$$

Relațiile prin intermediul cărora se determină răspunsurile modale (8.43) ... ... (8.52) și totale (8.58) ... (8.62) instantanee permit reprezentarea variației acestora în timpul istoric al desfășurării evenimentului seismic prin diagrame de tip time-history ca în figura 8.2. Avînd în vedere că ordonatele vectorilor proprii corespunzători formelor superioare au sensuri opuse, spre deosebire de ordonatele primei forme proprii care are totdeauna același sens, rezultă că forța tăietoare de bază are semnificație numai în modul fundamental de vibrație. Din aceleași motive nici forța tăietoare totală (8.62) nu prezintă interes practic.

8.2.2. Răspuns seismic modal maxim și total maxim

Din expresiile răspunsului modal instantaneu (8.43) ... (8.48) se constată că răspunsul modal maxim se obține cînd integralele care intervin în funcțiile modale $\eta_i(t)$, $\dot{\eta}_i(t)$ și $\ddot{\eta}_i(t)$ ating valorile maxime pe timpul istoric al mișcării

seismice ($0 < t \leqslant t_k$). Dacă se admit pentru fracțiunea din amortizarea critică valori $\nu \leqslant 0{,}20$ ($\omega^* = \omega\sqrt{1-\nu^2} \simeq \omega$) și se ia în considerație aproximația (8.20)

$$\left|\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \sin\omega_i(t-\tau)\, d\tau\right|_{max} \simeq$$

$$\simeq \left|\int_0^t \ddot{u}_0(\tau)\, e^{-\nu_i\omega_i(t-\tau)} \cos\omega_i(t-\tau)\, d\tau\right|_{max} = PSV_i \simeq SV_i, \qquad (8.63)$$

relația (8.21) rămîne valabilă și în această situație, adică

$$SA_i = \omega_i SV_i = \omega_i^2 SD_i, \quad i = 1, 2, \ldots n, \qquad (8.64)$$

în care s-au utilizat notațiile SV_i și SA_i și pentru pseudospectrele PSV_i și PSA_i.

Se observă că SD_i, SV_i și SA_i reprezintă valorile maxime, exprimate în DR, VR și AA, ale răspunsului seismic al unui sistem cu 1 GLD (fig. 8.30) ale cărui caracteristici dinamice proprii coincid cu cele corespunzătoare modului i de vibrație ($T_i = 2\pi/\omega_i$, ν_i). Este evident că descrierea mișcării seismice prin accelerograma $\ddot{u}_0(t)$ rămîne aceeași în cele două situații. Rezultă deci că spectrele seismice de răspuns, așa cum au fost definite în § 8.1 pot fi folosite și în cazul exprimării răspunsului maxim al sistemelor cu nGLD. În aceste condiții, relația (8.64) se poate generaliza astfel

$$\{SA\} = \lceil\Omega\rfloor\,\{SV\} = \lceil\Omega^2\rfloor\,\{SD\}, \qquad (8.65)$$

sau

$$\begin{Bmatrix}\{SD\}\\ \{SV\}\\ \{SA\}\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}[0] & \lceil\Omega\rfloor^{-1} & \lceil\Omega^2\rfloor^{-1}\\ \lceil\Omega\rfloor & [0] & \lceil\Omega\rfloor^{-1}\\ \lceil\Omega^2\rfloor & \lceil\Omega\rfloor & [0]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\{SD\}\\ \{SV\}\\ \{SA\}\end{Bmatrix},$$

în care $\lceil\Omega\rfloor$ reprezintă *matricea spectrală* a sistemului dinamic definită în capitolul 3, iar

$$SD_i = SD(T_i, \nu_i),\ SV_i = SV(T_i, \nu_i),\ SA_i = SA(T_i, \nu_i).$$

Pe baza acestor observații și ținînd seama de relațiile (8.63) și (8.64) se va putea scrie

$$\left.\begin{aligned} |\eta_i(t)|_{max} &= \frac{P_i^*}{M_i^*}\frac{1}{\omega_i} SV_i = \frac{P_i^*}{M_i^*} SD_i,\\ |\dot{\eta}_i(t)|_{max} &= \frac{P_i^*}{M_i^*} SV_i,\\ |\ddot{\eta}_i(t)|_{max} &= \frac{P_i^*}{M_i^*}\omega_i SV_i = \frac{P_i^*}{M_i^*} SA_i. \end{aligned}\right\} \qquad (8.66)$$

Dacă se introduc notațiile (4.58) și (4.62)

$$A_i = \frac{P_i^*}{M_i^*}, \quad A_{k,i} = A_i\Phi_{k,i} = \frac{P_i^*}{M_i^*}\Phi_{k,i}, \qquad (8.67)$$

unde

$$P_i^* = \sum_{k=1}^{n} m_k\Phi_{k,i}, \quad M_i^* = \sum_{k=1}^{n} m_k\Phi_{k,i}^2, \qquad (8.68)$$

prin intermediul relațiilor (8.43) ... (8.48) se determină *expresiile răspunsului seismic modal maxim* pentru:

- *deplasări relative modale maxime* ($DRMM$)

$$DRMM = x_{k,i} = |x_{k,i}(t)|_{max} = \Phi_{k,i}|\eta_i(t)|_{max} = A_{k,i}SD_i, \qquad (8.69)$$

sau

$$DRMM = \{x\}_i = \{A\}_i SD_i, \quad i = 1, 2, \ldots n. \qquad (8.70)$$

- *viteze relative modale maxime* ($VRMM$)

$$VRMM = v_{k,i} = |v_{k,i}(t)|_{max} = \Phi_{k,i}|\dot{\eta}_i(t)|_{max} = A_{k,i}V_i, \qquad (8.71)$$

sau

$$VRMM = \{v\}_i = \{A\}_i SV_i, \qquad (8.72)$$

- *accelerații absolute modale maxime* ($AAMM$)

$$AAMM = a_{k,i} = |a_{k,i}(t)|_{max} = \Phi_{k,i}|\ddot{\eta}_i(t)|_{max} = A_{k,i}SA_i, \qquad (8.73)$$

sau

$$AAMM = \{a\}_i = \{A\}_i SA_i, \qquad (8.74)$$

- *forțe seismice de nivel modale maxime* ($FSNMM$)

$$FSNMM = F_{k,i} = |F_{k,i}(t)|_{max} = m_k|a_{k,i}(t)|_{max} = m_k A_{k,i}SA_i, \qquad (8.75)$$

sau

$$FSNMM = \{F\}_i = \lceil M\rfloor\,\{A\}_i SA_i \qquad (8.76)$$

- *forțe tăietoare de bază modale maxime* ($FTBMM$)

$$FTBMM = F_i = |F_i(t)|_{max} = \left[\sum_{k=1}^{n} m_k A_{k,i}\right] SA_i = \frac{(P_i^*)^2}{M_i^*} SA_i. \qquad (8.77)$$

Matricele modale ale răspunsului maxim exprimat în caracteristici cinematice fundamentale (8.70), (8.72) și (8.74) sînt date direct în figura 8.31.

Avînd în vedere relația (8.64), este evident că răspunsul modal maxim poate fi exprimat în funcție de oricare dintre spectrele seismice.

Întrucît *coeficienții de formă* $\{A\}_i$ sînt proporționali cu vectorii proprii $\{\Phi\}_i$, variația geometrică a $DRMM$, $VRMM$ și $AAMM$ va fi identică cu configurația formelor proprii corespunzătoare tuturor modurilor de vibrație $i = 1, 2, \ldots n$. Vectorii proprii fiind raportați la ordonata pivot $\Phi_{n,i} = 1$, rezultă că valorile maxime ale funcțiilor modale reprezintă $DRMM$, $VRMM$ și $AAMM$ pe direcția gradului de libertate dinamică n.

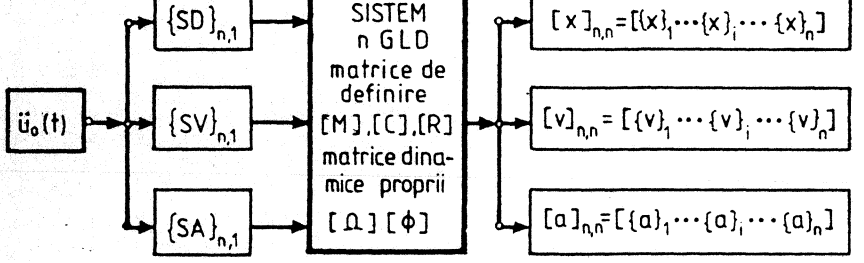


Fig. 8.31

Forțele seismice de nivel modale maxime mai pot fi calculate direct cu ajutorul matricei de rigiditate laterală $[R]$, definită în coordonatele dinamice GLD ale structurii, astfel

$$\{F\}_i = [R]\{x\}_i = [R]\{A\}_i S D_i. \tag{8.78}$$

Forțele tăietoare de etaj, precum și *momentele de etaj* se obțin cu relațiile

$$\{\mathcal{T}\}_i = [L_1]\{F\}_i, \quad \{M\}_i = [L_2]\{\mathcal{T}\}_i = [L_1][L_2]\{F\}_i, \tag{8.79}$$

unde $[L_1]$ și $[L_2]$ sînt două matrice operaționale, triunghiulare superior, de forma

$$[L_1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \dots 1 \dots 1 \\ 0 & 1 \dots 1 \dots 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \dots 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 \dots 1 \end{bmatrix}, \quad [L_2] = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 \dots h_k \dots h_n \\ 0 & h_2 \dots h_k \dots h_n \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots h_k \dots h_n \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 \dots h_n \end{bmatrix}, \tag{8.80}$$

în care prin h_k s-a notat înălțimea etajului situat sub nivelul k, adică $h_k = h_{k,k-1}$.

Dacă se determină inițial forța tăietoare de bază modală maximă, forțele seismice de nivel modale maxime pot fi obținute printr-o operație simplă de distribuție. În acest sens, din relațiile (8.75) și (8.77) prin eliminarea termenului SA_i se obține

$$F_{k,i} = d_{k,i} F_i, \tag{8.81}$$

unde, avînd în vedere că $m_k = Q_k/g$, precum și (8.68)

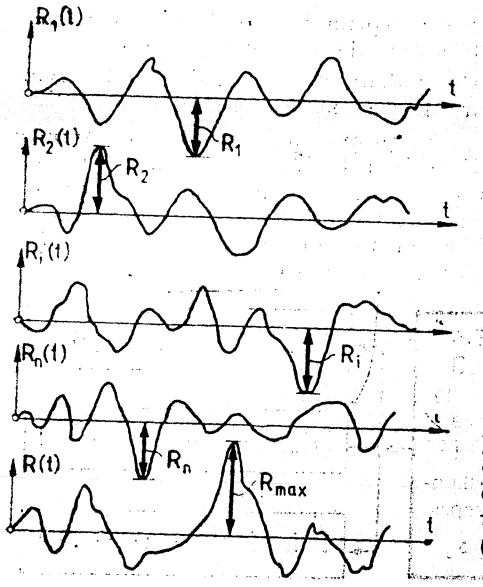


Fig. 8.32

$$d_{k,i} = \frac{m_k A_{k,i}}{\sum_{k=1}^{n} m_k A_{k,i}} = \frac{Q_k \Phi_{k,i}}{\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,i}},$$

$$\sum_{k=1}^{n} d_{k,i} = 1, \tag{8.82}$$

reprezintă *factorul de distribuție* al *FTBMM*, corespunzător modului de vibrație i, la nivelurile k și pe direcția GLD ale structurii etajate de tipul celei reprezentate în 8.30.

Răspunsul seismic total maxim nu poate fi evaluat prin sumarea directă a contribuțiilor modale, deoarece răspunsurile maxime corespunzătoare tuturor formelor proprii de vibrație $i = 1, 2, \dots n$ nu se produc simultan pe întreaga durată a timpului istoric al acțiunii seismice (fig. 8.32).

Dacă se notează cu $R_{i,max}$ răspunsul modal maxim corespunzător unui anumit parametru specific, valoarea maximă R_{max} a răspunsului de calcul (de proiectare) are expresia generală

$$R_{max} \leqslant \sum_{i=1}^{n} R_{i,max}.$$

Avînd în vedere nesimultaneitatea răspunsurilor modale (fig. 8.32) superpoziția acestora se va face pe considerente statistice, utilizîndu-se în acest scop rădăcina sumei pătratelor *RSS* (root sum square), rădăcina medie *RS* (root square) sau rădăcina medie pătratică *RMS* (root means square).

În literatura de specialitate, se consideră în mod unanim, că rădăcina sumei pătratelor *RSS* furnizează cele mai satisfăcătoare rezultate, deci

$$R_{max} = \left[\sum_{i=1}^{n} R_{i,max}^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{8.83}$$

După H. C. Merchant și D. E. Hudson [135], răspunsul maxim probabil poate fi estimat cu următoarele formule:

$$R_{max} = \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n} |R_{i,max}| + \left[\sum_{i=1}^{n} R_{i,max}^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}, \tag{8.84}$$

$$R_{max} = \frac{1}{2}\left(R_{1,max} + \sum_{i=1}^{n} |R_{i,max}|.\right). \tag{8.85}$$

În cazul în care răspunsul maxim este dominat de contribuția modului fundamental, cum este cazul structurilor de tip rigid și în unele situații și de tip semirigid, relația (8.85) devine $R_{max} = R_{1,max}$.

Cercetările efectuate de R. W. Clough [48] asupra unor structuri multietajate din California au condus la concluzia că răspunsul total maxim (de calcul) poate fi apreciat cu suficientă exactitate dacă se ia în considerație integral influența răspunsului maxim fundamental și numai o parte din contribuția răspunsului maxim al celui de-al doilea mod de vibrație. În acest sens, în urma prelucrării rezultatelor cercetărilor teoretice și experimentale [99], formula de superpoziție modală are expresia

$$R_{max} = R_{1,max} + \gamma R_{2,max},$$

în care γ este un coeficient numeric depinzînd de rigiditatea globală a structurii exprimată prin perioada fundamentală de vibrație T_1. Se disting următoarele două situații:

$$\begin{aligned} &T_1 \leqslant 0{,}8\text{s}, \quad \gamma = 0, \quad R_{max} = R_{1,max}, \\ &T_1 > 0{,}8\text{s}, \quad \gamma = 0{,}25, \quad R_{max} = R_{1,max} + 0{,}25 R_{2,max}. \end{aligned} \tag{8.86}$$

Din toate relațiile de superpoziție a răspunsurilor maxime modale, rezultă importanța și contribuția decisivă a modului fundamental de vibrație asupra răspunsului total maxim de calcul. Practic, se constată că influența modurilor superioare de vibrație asupra deplasărilor laterale ale structurilor curente sînt atît de reduse încît poate fi neglijată în analizele numerice. Numai în cazul structurilor cu flexibilitate ridicată ($T_1 > 2$s) pot interveni semnificativ și contribuțiile formelor superioare.

8.2.3. Evaluarea forțelor seismice. Sisteme dinamic echivalente

Forțele seismice de nivel *FSN* care acționează pe direcția GLD reprezintă acțiuni convenționale de natura unor forțe de inerție. Cunoscînd variația spectrelor seismice de răspuns, *FSN* se pot obține direct prin aplicarea relației (8.75) sau indirect prin intermediul forței tăietoare de bază *FTB* (8.81) și distribuția acesteia pe direcția fiecărui GLD al structurii. Toate aspectele teoretice și aplicative care vor fi dezvoltate în continuare se referă la valorile modale maxime ale forțelor seismice.

Operația de decuplare modală a răspunsului seismic total a condus la exprimarea condițiilor de mișcare prin n ecuații independente (8.41), fiecare descriind răspunsul seismic al unui sistem dinamic formal cu 1GLD, ale cărui caracteristici dinamice proprii T_i și ν_i sînt identice cu cele modale ($i = 1, 2, \ldots n$), datorită analogiei existente între ecuațiile (8.41) și (8.3). Această observație sugerează posibilitatea exprimării acțiunii seismice prin intermediul unor sisteme cu 1GLD, numite sisteme dinamic echivalente [9], [10], [11], [12], [13], [99]. Formularea problemei răspunsului seismic, prin utilizarea modelelor sau sistemelor dinamice echivalente cu 1GLD, conduce la simplificări importante în privința evaluării forțelor seismice și în special a FTB.

Expresia FTB modale maxime se poate obține direct cu ajutorul sistemelor dinamic echivalente (fig. 8.30) pe baza *condițiilor de echivalență* existente între caracteristicile proprii și de răspuns ale sistemelor cu nGLD și 1GLD. Pentru modul propriu de vibrație i, condițiile de echivalență care definesc sistemul dinamic echivalent e sînt următoarele:

— *echivalența caracteristicilor dinamice proprii*

$$T_i^{(n)} = T_i^{(e)} = T_i, \quad \nu_i^{(n)} = \nu_i^{(e)} = \nu_i, \tag{8.87}$$

— *echivalența caracteristicilor de răspuns*

$$F_i^{(n)} = F_i^{(e)} = F_i, \quad SA_i^{(n)} = SA_i^{(e)} = SA_i. \tag{8.88}$$

Ținînd seama de expresiile (8.22) și (8.77), rezultă

$$F_i = m_{e,i} SA_i = \frac{(P_i^*)^2}{M_i^*} SA_i, \tag{8.89}$$

de unde se obține expresia *masei echivalente*, numită și *masă modală*, a sistemului cu 1GLD

$$m_{e,i} = \frac{(P_i^*)^2}{M_i^*} = \frac{(\{\Phi\}_i^T [M] \{1\})^2}{\{\Phi\}_i^T [M] \{\Phi\}_i}, \tag{8.90}$$

sau

$$m_{e,i} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,i}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,i}^2}, \quad i = 1, 2, \ldots n \tag{8.91}$$

Deoarece $m_k = Q_k/g$, se poate determina *încărcarea gravitațională echivalentă* $Q_{e,i} = m_{e,i}\, g$ cu expresia

$$Q_{e,i} = \frac{(\{\Phi\}_i^T [Q] \{1\})^2}{\{\Phi\}_i^T [Q] \{\Phi\}_i} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,i}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,i}^2}. \tag{8.92}$$

Masa sau încărcarea echivalentă pot fi puse în evidență printr-un parametru adimensional, numit *coeficient de echivalență modal*, definit astfel

$$\varepsilon_i = \frac{m_{e,i}}{m} = \frac{Q_{e,i}}{Q}, \quad i = 1, 2, \ldots n, \tag{8.93}$$

în care m și Q reprezintă masa totală, respectiv rezultanta încărcărilor gravitaționale ale structurii

$$m = \sum_{k=1}^{n} m_k, \quad Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k, \quad Q = mg. \tag{8.94}$$

Prin asocierea relațiilor (8.68), (8.90), (8.92) și (8.94) se obține expresia generală a *coeficientului de echivalență modal*

$$\varepsilon_i = \frac{(P_i^*)^2}{m M_i^*} = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,i}\right]^2}{\left[\sum_{k=1}^{n} m_k\right]\left[\sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,i}^2\right]} = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,i}\right]^2}{\left[\sum_{k=1}^{n} Q_k\right]\left[\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,i}^2\right]}. \tag{8.95}$$

Expresia masei echivalente poate fi obținută și prin aplicarea condiției de conservare a energiei în cele două categorii de sisteme cu nGLD și 1GLD [18]. De asemenea, toate relațiile de mai sus mai pot fi exprimate și prin caracteristicile cinematice ale răspunsului modal maxim (8.70), (8.72) și (8.74) intervenind în final numai vectorul coeficienților de formă (8.67).

Utilizarea sistemelor dinamice echivalente în ingineria seismică face posibilă determinarea directă a *FTB* (modală maximă) în baza relațiilor (8.89) și (8.93), în locul expresiei (8.77), cu formula

$$F_i = m_{e,i} SA_i = \varepsilon_i m SA_i = \frac{SA_i}{g} \varepsilon_i Q. \tag{8.96}$$

Întrucît raportul SA_i/g definește *coeficientul seismic modal*

$$c_i^* = \frac{SA_i}{g} = c_i^*(\ddot{u}_{0,max}/g, T_i, \nu_i), \tag{8.97}$$

iar produsul

$$c_i = \varepsilon_i \frac{SA_i}{g} = \varepsilon_i c_i^*, \tag{8.98}$$

cocficientul seismic modal (total) al FTB, relația (8.96) devine

$$F_i = c_i Q, \tag{8.99}$$

care reprezintă formula de bază în normarea forțelor seismice (vezi cap. 9). Forțele seismice de nivel se obțin printr-o operație simplă de distribuție (repartiție) a *FTB* (8.81).

În lucrarea [13] se demonstrează următoarele proprietăți ale coeficienților de echivalență modali:

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_i > \ldots > \varepsilon_n, \quad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1, \tag{8.100}$$

care pun în evidență importanța modurilor de vibrație la evaluarea răspunsului seismic total. Se constată că cea mai importantă contribuție revine modului fundamental de vibrație care guvernează răspunsul seismic total al structurilor.

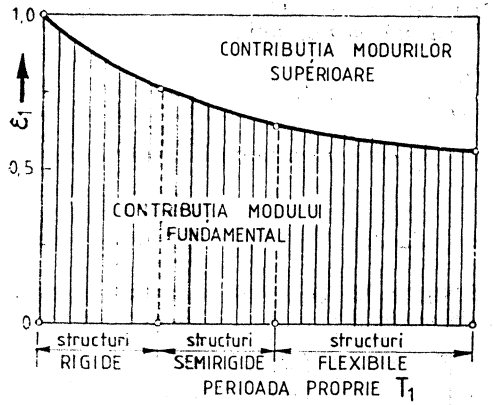


Fig. 8.33

Valoarea coeficientului de echivalență ε_i corespunzător modului fundamental depinde de rigiditatea globală a structurilor caracterizată cantitativ, din punct de vedere dinamic, prin perioada fundamentală T_1. În figura 8.33 este reprezentată grafic variația calitativă a coeficientului ε_1, de unde rezultă participarea modurilor superioare la definirea răspunsului total.

Se constată, atît din relațiile (8.96) și (9.100), cît și din graficul din figura 8.33, că semnificația coeficienților de echivalență ε_i poate fi interpretată ca *ordonate de distribuție modale* ale răspunsului total, întrucît evidențiază participarea cantitativă a modurilor superioare de vibrație.

* * *

În concluzie se poate aprecia că metoda analizei modale frunizează informații satisfăcătoare, din punct de vedere practic, asupra comportării liniare a structurilor la acțiuni seismice. Dintre numeroasele avantaje ale acestei metode se menționează faptul că analizele numerice necesare sînt mai puțin laborioase (decît în metoda „exactă" de integrare directă) și în același timp țin seama de principalele caracteristici dinamice ale structurii (valori și vectori proprii) și ale fenomenului seismic (spectre seismice de răspuns).

8.3. RĂSPUNSUL SEISMIC AL SISTEMELOR DISCRETE SPAȚIALE

Se vor analiza din punct de vedere seismic structurile cu comportare spațială, ca urmare a nesimetriei geometrice, elastice și inerțiale, ale căror baze de rezemare sînt supuse acțiunii simultane a mișcării terenului pe două direcții ortogonale. În acest sens, se va considera modelul structural tridimensional din figura 8.34, la care se presupune că toate elementele verticale de rezistență de la fiecare etaj au axele principale de rigiditate paralele cu o direcție unică, iar centrele de rigiditate C.R. ale planșeelor au o poziție determinată în raport cu centrele de greutate C.G (centre masice). În consecință, se va admite existența unui *cuplaj elastic* și *inerțial* între vibrațiile de translație și cele de rotație, generate de mișcarea seismică *.

Așa cum s-a arătat în § 8.1.5, se poate manifesta cuplaj elastic și inerțial semnificativ (deci mișcarea cu fenomene de torsiune importantă) chiar și în cazul structurilor simetrice datorită în special nesincronismului mișcării terenului produsă de cutremure. De aceea, în asemenea situații, normativele mo-

* Aspectele teoretice dezvoltate în acest paragraf fac parte dintr-un studiu mai amplu elaborat de Mihail Ifrim cu privire la analiza seismică liniară și neliniară a structurilor cu comportare spațială.

de proiectare antiseismică prevăd considerarea unei excentricități accidentale între rezultanta forțelor seismice de nivel și C.G al planșeelor. Cuplajul dintre coordonatele de translație și de rotație este cu atît mai puternic (strîns) cu cît frecvențele proprii corespunzătoare acestor două categorii de mișcări sînt mai apropiate între ele.

În capitolul 11 sînt definite caracteristicile de rigiditate ale elementelor de rezistență și structurilor în ansamblu, în cazul sistemelor cu comportare spațială.

În modelarea dinamică a structurii, precum și a acțiunii s-au introdus ipotezele de lucru care se prezintă în continuare, unanim acceptate în asemenea analize:

- Planșeele structurii se consideră perfect rigide în planul lor (discuri rigide), ceea ce corespunde cu situația reală la majoritatea construcțiilor.
- Axele principale de rigiditate ale ansamblului elementelor de rezistență verticale de la fiecare etaj sînt perpendiculare între ele.
- Elementele verticale de rezistență au axele principale de rigiditate paralele cu o direcție unică, secțiunile acestora fiind în general de formă pătrată, dreptunghiulară sau circulară.
- Masa corespunzătoare fiecărui planșeu este concentrată în centrul de greutate C.G (sau centrul masic C.M.), care nu coincide cu centru de rigiditate C.R, numit și centru de rotație sau de torsiune (fig. 8.34).

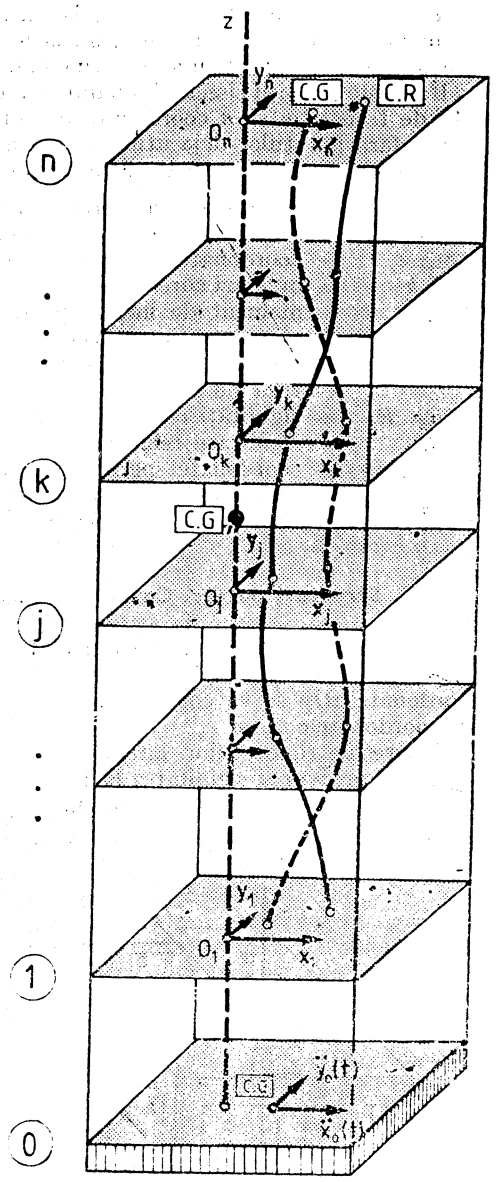


Fig. 8.34

- Mișcarea fiecărui planșeu se manifestă numai în plan orizontal, fiind descrisă de două coordonate de translație $x(t)$ și $y(t)$ și de o coordonată de rotație $\varphi(t)$.
- Se neglijează influența deformațiilor axiale ale elementelor verticale de rezistență în raport cu cele dominante de încovoiere și deci nu se vor lua în considerare vibrațiile verticale întrucît au un efect nesemnificativ.

● Acțiunea care se manifestă la baza structurii se consideră generată de componentele orizontale de translație ale accelerațiilor mișcării seismice $\ddot{x}_0(t)$ și $\ddot{y}_0(t)$, în raport cu axele principale de rigiditate (fig. 8.34).

În aceste condiții sistemul dinamic va avea $3n$GLD dintre care $2n$ coordonate de translație și n coordonate de rotație.

În afara notațiilor deja utilizate sau a celor care vor fi definite direct în text, se mai introduc următoarele cu caracter general:

c_x, c_y — coordonate care precizează poziția C.G;
C.G,C.R — centre de greutate, respectiv de rigiditate;
e_x, e_y — coordonate care precizează poziția C.R;
j, k — niveluri curente ale structurii etajate (fig. 8.34);
J_0 — moment de inerție polar masic (mecanic);
m_j, m_k — mase concentrate la nivelurile j și k;
n — numărul de niveluri (planșee) ale structurii;
r — rază de girație;
R_x, R_y — rigidități relative de translație (v. cap. 11);
R_φ — rigiditate relativă de rotație sau de torsiune (v. cap. 11);
$x(t)$,$y(t)$ — coordonate specifice mișcării de translație;
$x_0(t)$,$y_0(t)$ — componentele mișcării seismice la baza structurii;
$\varphi(t)$ — coordonata specifică mișcării de rotație.

8.3.1. Structuri parter. Cazul cînd axa de rotație are originea în C.G

Se va studia inițial cazul particular al unei structuri parter, deci cu un singur nivel, de tipul celei reprezentată în figura 8.35. Sistemul de axe de coordonate xOy se va considera cu origine în C.G, iar poziția C.R definită de coordonatele e_x și e_y.

Expresiile rigidităților laterale ale elementelor verticale de rezistență R_x și R_y, precum și rigiditatea la torsiune R_φ se deduc în capitolul 11.

Dacă se consideră că elementele verticale de rezistență k sînt în număr de $m(k = 1, 2, \ldots m)$, iar rigiditățile relative $R_{x,k}$ și $R_{y,k}$ ale acestora cunoscute

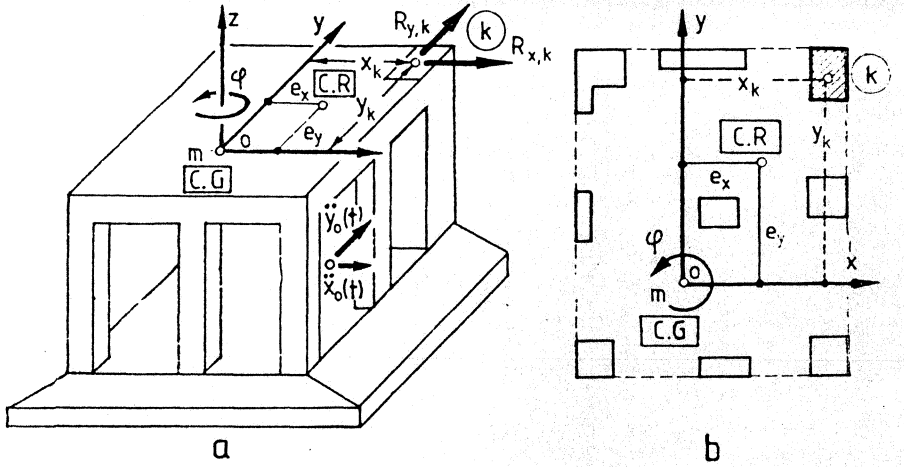


Fig. 8.35

(vezi cap. 10), rigiditățile totale de translație R_x, R_y și de torsiune R_φ, raportate la sistemul de axe de referință xOy, rezultă

$$R_x = \sum_{k=1}^{m} R_{x,k}, \quad R_y = \sum_{k=1}^{m} R_{y,k}, \quad R_\varphi = \sum_{k=1}^{m} (R_{x,k} y_k^2 + R_{y,k} x_k^2),$$

și de asemenea coordonatele care precizează poziția C.R

$$e_x = \frac{1}{R_y} \sum_{k=1}^{m} R_{y,k} x_k, \quad e_y = \frac{1}{R_x} \sum_{k=1}^{m} R_{x,k} y_k.$$

Aceste formule care permit caracterizarea din punct de vedere elastic a structurii în mișcare de translație și de rotație au la bază relațiile (11.5), (11.6), (11.11), (11.12) și (11.30) din capitolul 11. Avînd în vedere situația particulară a structurii din figura 8.35 este evident că direcția axelor de coordonate xOy coincide cu direcția axelor principale de rigiditate (vezi fig. 11.5, § 11.2.2 și § 11.2.7).

Conform ipotezelor de lucru enunțate, axele principale de torsiune proprii ale elementelor verticale de rezistență k sînt paralele cu axele generale de coordonate xOy. În expresia rigidității totale de torsiune R_φ a ansamblului structural, s-au neglijat rigiditățile proprii de torsiune $R_{\varphi,k}$ întrucît elementele de rezistență constitutive au dimensiuni transversale relativ reduse.

Modelul structural din figura 8.35 are din punct de vedere dinamic 3GLD, două translații $x(t)$ și $y(t)$ și o rotație $\varphi(t)$. Pe baza elementelor precizate în figura 8.36, se obțin *ecuațiile de condiție*, care exprimă echilibrul dinamic instantaneu pe direcția GLD pe timpul istoric al mișcării seismice, astfel

$$(1) \quad m[\ddot{x}(t) + \ddot{x}_0(t)] + \sum_{k=1}^{m} R_{x,k}[x(t) - y_k\varphi(t)] = 0,$$

$$(2) \quad J_0\ddot{\varphi}(t) - \sum_{k=k}^{m} R_{x,k}[x(t) - y_k\varphi(t)]y_k + \sum_{k=1}^{m} R_{y,k}[y(t) + x_k\varphi(t)]\,x_k + R_\varphi\varphi(t) = 0.$$

$$(3) \quad m[\ddot{y}(t) + \ddot{y}_0(t)] + \sum_{k=1}^{m} R_{y,k}[y(t) + x_k\varphi(t)] = 0.$$

Cu scopul de a evita excesul de simboluri care intervin în ecuațiile de mișcare, se va renunța la scrierea variabilei t, astfel încît în continuare se vor admite

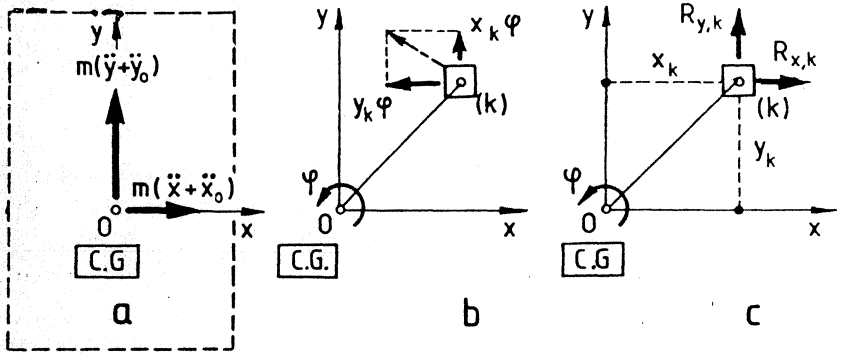


Fig. 8.36

notațiile $x = x(t)$, $y = y(t)$ și $\varphi = \varphi(t)$ pentru coordonatele dinamice, precum și $\ddot{x}_0 = \ddot{x}_0(t)$ și $\ddot{y}_0 = \ddot{y}_0(t)$ pentru variația accelerațiilor mișcării terenului de la baza structurii.

Dacă se ține seama de expresiile rigidităților totale R_x, R_y și R_φ, ecuațiile de condiție devin

$$\left.\begin{aligned} &m\ddot{x} + R_x x - e_y R_x \varphi = -m\ddot{x}_0,\\ &J_0\ddot{\varphi} - e_y R_x x + R_\varphi \varphi + e_x R_y y = 0,\\ &m\ddot{y} + e_x R_y \varphi + R_y y = -m\ddot{y}_0. \end{aligned}\right\} \tag{8.101}$$

unde $J_0 = mr_0^2$ reprezintă momentul de inerție polar masic (mecanic) în raport cu originea sistemului de axe xOy (C.G al planșeului), iar r_0 raza de girație corespunzătoare.

În transcriere matriceală ecuația (8.101) va avea forma

$$\begin{bmatrix} m & & \\ & J_0 & \\ & & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_x & -e_y R_x & 0 \\ -e_y R_x & R_\varphi & e_x R_y \\ 0 & e_x R_y & R_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \varphi \\ y \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} m & & \\ & J_0 & \\ & & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ 0 \\ \ddot{y}_0 \end{Bmatrix}$$

În vederea simplificării atît a formulărilor ulterioare, cît și a exprimării unitare a răspunsului seismic, rezolvarea se va efectua în raport cu un nou vector al necunoscutelor, în care toate coordonatele dinamice sînt omogene, obținut din transformarea

$$\{\Delta\}_0 = \begin{Bmatrix} x \\ r_0\varphi \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & r_0 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \varphi \\ y \end{Bmatrix}. \tag{8.102}$$

Dacă se ține seama de expresia momentului de inerție polar, precum și de transformarea (8.102), ecuațiile de condiție (8.101) vor avea următoarea formă compactă

$$[M]_0\{\ddot{\Delta}\}_0 + [R]_0\{\Delta\}_0 = -[M]_0\{\zeta\}, \tag{8.103}$$

în care

$$[M]_0 = \begin{bmatrix} m & & \\ & m & \\ & & m \end{bmatrix}, \quad [R]_0 = \begin{bmatrix} R_x & -\dfrac{e_y R_x}{r_0} & 0 \\ -\dfrac{e_y R_x}{r_0} & \dfrac{R_\varphi}{r_0^2} & \dfrac{e_x R_y}{r_0} \\ 0 & \dfrac{e_x R_y}{r_0} & R_y \end{bmatrix},$$

reprezintă matricea de inerție omogenă, respectiv matricea de rigiditate omogenă, iar

$$\{\ddot{\Delta}\}_0 = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ r_0\ddot{\varphi} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix}, \quad \{\zeta\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ 0 \\ \ddot{y}_0 \end{Bmatrix}$$

reprezintă vectorul accelerațiilor de răspuns, respectiv vectorul accelerațiilor terenului produse de mișcarea seismică. Prin indicele o s-a notat originea sistemului de axe (care coincide cu C.G) în raport cu care este exprimată ecuația matriceală (8.103).

Din relațiile de mai sus rezultă avantajul pe care îl prezintă transformarea (8.102) deoarece elementele tuturor matricelor și vectorilor din ecuația (8.103) au devenit omogene.

8.3.2. Structuri parter. Cazul cînd axa de rotație are originea oarecare

Se vor exprima ecuațiile de condiții ale mișcării planșeului structurii parter în raport cu sistemul de axe xO_1y a cărui origine nu coincide cu C.G, așa cum rezultă din figura 8.37. Studierea acestui caz, cu caracter tot particular, va permite ca prin generalizarea rezultatelor ce se vor obține să se formuleze ecuațiile răspunsului seismic al structurilor complexe, multietajate.

Condițiile de echilibru dinamic instantaneu conduc la următorul sistem de ecuații

$$(1)\quad m(\ddot{x} + \ddot{x}_0) - mc_{y_1}\ddot{\varphi} + \sum_{k=1}^{m} R_{x,k}[x - (y_k + c_{y_1})\varphi] = 0,$$

$$(2)\quad J_0\ddot{\varphi} - \sum_{k=1}^{m} R_{x,k}(x - y_k\varphi)\,y_k + \sum_{k=1}^{m} R_{y,k}(y + x_k\varphi)\,x_k - \\ - m(\ddot{x} + \ddot{x}_0)\,c_{y_1} + m(\ddot{y} + y_0)\,c_{x_1} + mc_{x_1}^2\ddot{\varphi} + \\ + mc_{y_1}^2\ddot{\varphi} - R_x x c_{y_1} + R_y y c_{x_1} = 0,$$

$$(3)\quad m(\ddot{y} + \ddot{y}_0) + mc_{x_1}\ddot{\varphi} + \sum_{k=1}^{m} R_{y,k}[y + (x_k + c_{x_1})\varphi] = 0.$$

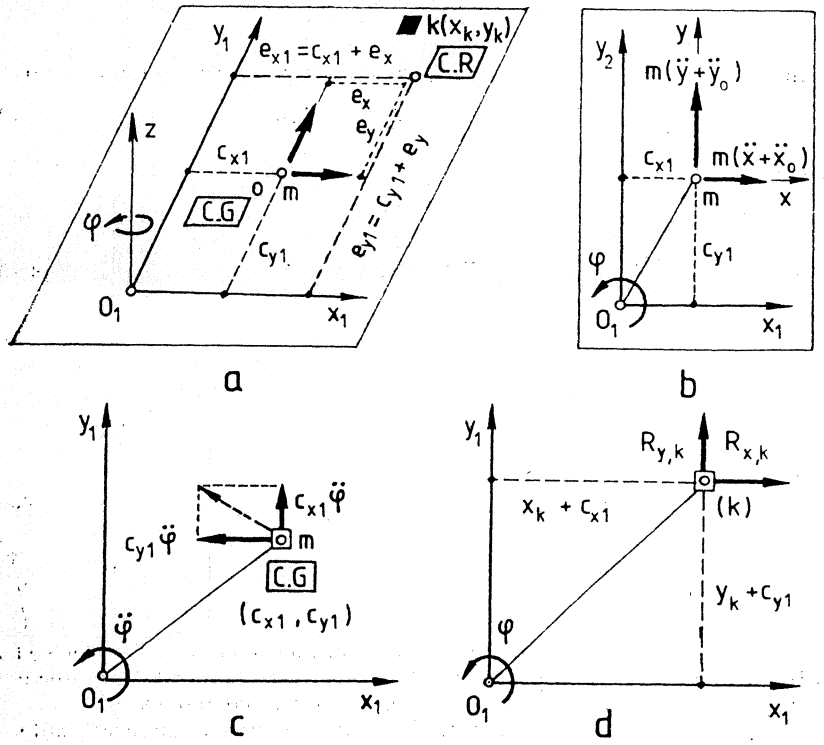


Fig. 8.37

Deoarece

$$e_{x_1} = c_{x_1} + e_x, \quad e_{y_1} = c_{y_1} + e_y,$$
$$J_{o_1} = J_o + m(c_{x_1}^2 + c_{y_1}^2) = r_{o_1}^2 m, \quad J_o = m r_o^2$$
$$r_{o_1}^2 = r_o^2 + c_{x_1}^2 + c_{y_1}^2,$$

în urma efectuării transformărilor corespunzătoare, avînd în vedere expresiile rigidităților totale, ecuațiile de condiție vor avea forma:

$$\left.\begin{aligned}
&(1)\quad m\ddot{x} - mc_{y_1}\ddot{\varphi} + R_x x - c_{y_1} R_x \varphi = -m\ddot{x}_o \\
&(2)\quad -\frac{mc_{y_1}}{r_{o_1}}\ddot{x} + mr_{o_1}\ddot{\varphi} + \frac{mc_{x_1}}{r_{o_1}}\ddot{y} - \frac{e_{y_1}}{r_{o_1}} R_x x + \\
&\qquad + \frac{R_\varphi}{r_{o_1}}\varphi + \frac{e_{x_1}}{r_{o_1}} R_y y = + \frac{mc_{y_1}}{r_{o_1}}\ddot{x}_o - \frac{mc_{x_1}}{r_{o_1}}\ddot{y}_o \\
&(3)\quad mc_{x_1}\ddot{\varphi} + m\ddot{y} + e_{x_1} R_y \varphi + R_y y = -m\ddot{y}_o
\end{aligned}\right\} \qquad (8.104)$$

Toate notațiile care intervin în acest sistem de ecuații sînt explicitate direct în figura 8.37.

Dacă se introduce vectorul omogen al răspunsului de forma (8.102)

$$\{\Delta\}_1 = \begin{Bmatrix} x \\ r_{o_1}\varphi \\ y \end{Bmatrix}, \quad \{\ddot{\Delta}\}_1 = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ r_{o_1}\ddot{\varphi} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix},$$

sistemul de ecuații se va putea exprima matriceal prin ecuația compactă

$$[M]_1\{\ddot{\Delta}\}_1 + [R]_1\{\Delta\}_1 = -[M]_1\{\zeta\}, \qquad (8.105)$$

în care

$$[M]_1 = \begin{bmatrix} m & -\frac{mc_{y_1}}{r_{o_1}} & 0 \\ -\frac{mc_{y_1}}{r_{o_1}} & m & \frac{mc_{x_1}}{r_{o_1}} \\ 0 & \frac{mc_{x_1}}{r_{o_1}} & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & -\frac{c_{y_1}}{r_{o_1}} & 0 \\ -\frac{c_{y_1}}{r_{o_1}} & 1 & \frac{c_{x_1}}{r_{o_1}} \\ 0 & \frac{c_{x_1}}{r_{o_1}} & 1 \end{bmatrix}, \qquad (8.106)$$

$$[R]_1 = \begin{bmatrix} R_x & -\frac{e_{y_1}}{r_{o_1}} R_x & 0 \\ -\frac{e_{y_1}}{r_{o_1}} R_x & \frac{1}{r_{o_1}^2} R_\varphi & \frac{e_{x_1}}{r_{o_1}} R_y \\ 0 & \frac{e_{x_1}}{r_{o_1}} R_y & R_y \end{bmatrix}, \qquad (8.107)$$

iar vectorul $\{\zeta\}$ definește acțiunea seismică în mod identic cazului precedent. Pentru a preciza că ecuația matriceală (8.105) este raportată la sistemul de referință xO_1y s-a introdus indicele *1* la matricele componente.

Din (8.105) se constată că, spre deosebire de situația analizată anterior, matricea de inerție nu mai este diagonală, ceea ce demonstrează *existența unui cuplaj inerțial*. Acest fenomen, specific dinamic, se datorește faptului că originea sistemului de coordonate nu mai ocupă poziția particulară în C.G. Prin particularizarea ecuației matriceale (8.105) se obține direct (8.103). Este evident că matricele de inerție (8.106) și de rigiditate (8.107) sînt simetrice și pozitiv definite. În forma (8.106) de exprimare a matricei de inerție intervine o matrice cu caracter „geometric", deoarece toate elementele care o definesc sînt numere adimensionale provenite din rapoartele unor lungimi.

8.3.3. Structuri multietajate

Se va studia structura cu n niveluri din figura 8.34 care în contextul ipotezelor admise are $3n$GLD, din care $2n$ translații în direcțiile x și y și o rotație φ în jurul axei verticale z, caracterizate prin coordonatele dinamice $x_k(t)$, $y_k(t)$ și $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots n$. Se va considera că axa verticală O_z are poziție fixă și trece prin C.G al întregii structuri, iar sistemele de axe xO_ky din planul fiecărui planșeu sînt paralele cu direcțiile principale de rigiditate. Conform ipotezei admise inițial, axele principale de rigiditate ale elementelor verticale de rezistență de la fiecare etaj sînt perpendiculare între ele și paralele cu două direcții unice. Principalele notații ce vor fi folosite în continuare sînt date în figura 8.38.

Pentru a determina matricele de inerție și de rigiditate corespunzătoare fiecărui nivel k, prin asamblarea cărora în coordonatele întregii structuri se obțin matricele totale, se va exprima echilibrul dinamic relativ între nivelurile k, j. Ecuația de condiție exprimată matriceal va avea o formă similară cu (8.105), adică

$$[M]_k\{\ddot{\Delta}\}_k + [R]_k\{\Delta\}_k = -[M]_k\{\zeta\}_k, \qquad (8.108)$$

unde

$$[M]_k = m_k \begin{bmatrix} 1 & -\frac{c_{yk}}{r} & 0 \\ -\frac{c_{yk}}{r} & \left(\frac{r_k}{r}\right)^2 & \frac{c_{xk}}{r} \\ 0 & \frac{c_{xk}}{r} & 1 \end{bmatrix}, \qquad (8.109)$$

$$[R]_k = \begin{bmatrix} R_{kj}^x & -\frac{c_{yk}}{r} R_{kj}^x & 0 \\ -\frac{e_{yk}}{r} R_{kj}^x & \frac{1}{r^2} R_{kj}^\varphi & \frac{e_{xk}}{r} R_{kj}^y \\ 0 & \frac{e_{xk}}{r} R_{kj}^y & R_{kj}^y \end{bmatrix}, \qquad (8.110)$$

$$\{\Delta\}_k = \begin{Bmatrix} x_k \\ r\varphi_k \\ y_k \end{Bmatrix}, \quad \{\ddot{\Delta}\}_k = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ r\ddot{\varphi}_k \\ \ddot{y}_k \end{Bmatrix}, \quad \{\zeta\}_k = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ 0 \\ \ddot{y}_0 \end{Bmatrix}. \qquad (8.111)$$

În matricele (8.109), (8.110) și vectorii (8.111) coordonatele c_{xk} și c_{yk} precizează pozițiile (C.G) de la nivelurile $k = 1, 2, \ldots n$ (în raport cu sistemul

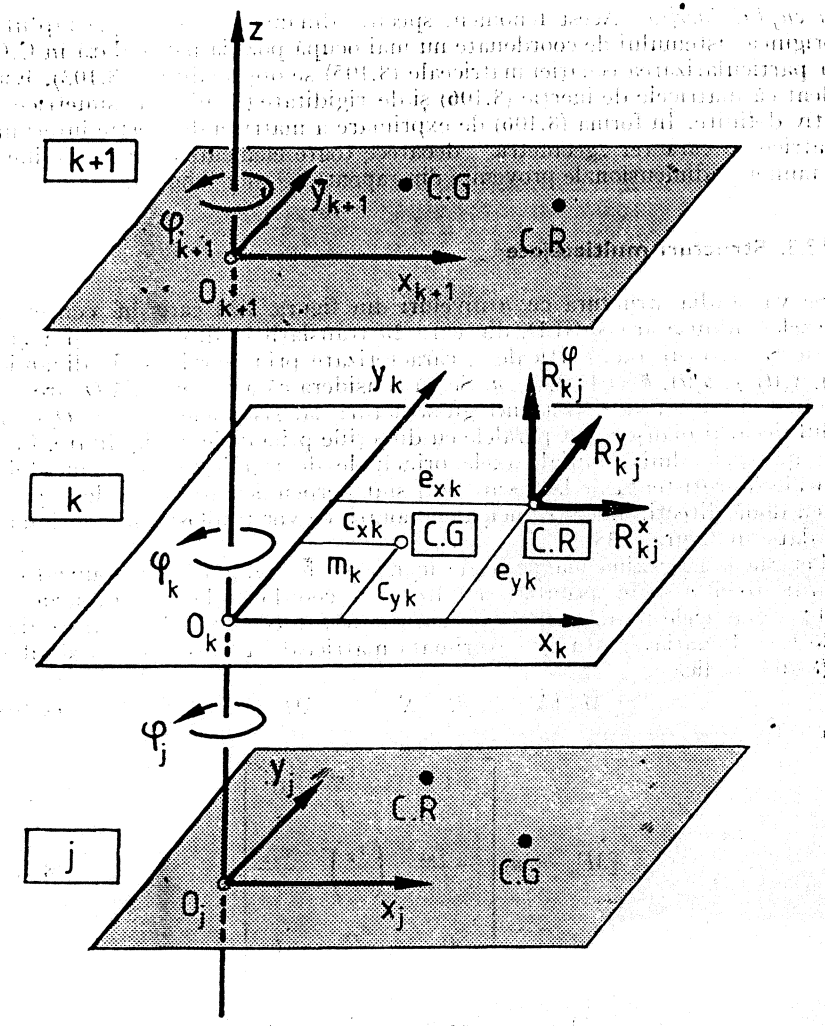


Fig. 8.38

de axe xO_ky'), iar R^x_{kj}, R^y_{kj} și R^z_{kj} reprezintă rigiditățile relative (de translație, respectiv de torsiune) ale elementelor verticale de rezistență cuprinse între nivelurile k și j (fig. 8.38). Prin r_k s-a notat raza de girație a planșeului k în raport cu originea sistemului local de axe xO_ky și cu r raza de girație a masei totale în raport cu C.G al întregii structuri (fig. 8.34), adică

$$r_k^2 = J_k/m_k, \quad r^2 = J/\sum_{k=1}^{n} m_k,$$

unde J reprezintă momentul de inerție polar masic al ansamblului structural.

Din (8.111) se observă că termenul corespunzător rotirii din vectorul omogen al răspunsului $\{\Delta\}_k$ este definit prin intermediul unui parametru unic și anume raza de girație r.

În situațiile particulare cînd toate $(C.G)_k$ se află pe aceeași verticală rezultă $c_{xk} = c_x$ și $c_{yk} = c_y$, iar cînd $(C.R)_k$ sînt situate pe o verticală comună $e_{xk} = e_x$ și $e_{yk} = e_y$, $k = 1, 2, \ldots n$.

Ecuațiile generale de mișcare ale întregii structuri (fără considerarea amortizării) exprimă echilibrul dinamic instantaneu pe direcția coordonatelor sistemului oscilant și se obțin prin extinderea „ecuațiilor de nivel" k, în care intervin conexiunile elastice ale etajelor adiacente. Rezultă prin urmare

$$\begin{aligned} &\ldots \\ &(k)\quad [M]_k\{\ddot{\Delta}\}_k - [R]_{k,j}\{\Delta\}_j + ([R]_{k,j} + [R]_{k+1,k})\{\Delta\}_k - \\ &\ldots \qquad\qquad - [R]_{k+1,k}\{\Delta\}_{k+1} = -[M]_k\{\zeta\}_k, \end{aligned} \tag{8.112}$$

iar prin generalizare, la sistemul dinamic în ansamblu, se determină ecuația supramatriceală

$$[M]_{3n,3n}\{\ddot{\Delta}\}_{3n,1} + [R]_{3n,3n}\{\Delta\}_{3n,1} = -[M]_{3n,1}\{\zeta\}_{3n,1}, \tag{8.113}$$

în care apar următoarele matrice:

- *matricea bloc diagonală de inerție*

$$[M]_{3n,3n} = \begin{bmatrix} [M]_1 & & & \text{ZERO} \\ & [M]_2 & & \\ & & [M]_k & \\ \text{ZERO} & & & [M]_n \end{bmatrix} \tag{8.114}$$

- *matricea bloc tridiagonală de rigiditate*

$$[R]_{3n,3n} = \begin{bmatrix} ([R]_{1,0} + [R]_{2,1}) & -[R]_{2,1} & & & \text{ZERO} \\ -[R]_{2,1} & ([R]_{2,1} + [R]_{3,2}) & -[R]_{3,2} & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -[R]_{k,j} & ([R]_{k,j} + [R]_{k+1,k}) & -[R]_{k+1,k} \\ & & & \cdots & \cdots \\ \text{ZERO} & & & -[R]_{n,n-1} & [R]_{n,n-1} \end{bmatrix} \tag{8.115}$$

- *vectorul răspunsului seismic relativ*

$$\{\Delta\}_{3n,1} = \begin{Bmatrix} \{\Delta\}_1 \\ \{\Delta\}_2 \\ \cdots \\ \{\Delta\}_k \\ \cdots \\ \{\Delta\}_n \end{Bmatrix}, \quad \{\Delta\}_k = \begin{Bmatrix} x_k \\ r\varphi_k \\ y_k \end{Bmatrix}, \tag{8.116}$$

- *vectorul mișcării seismice*

$$\{\zeta\}_{3n,1} = \begin{Bmatrix} \{\zeta\}_1 \\ \{\zeta\}_2 \\ \cdots \\ \{\zeta\}_k \\ \cdots \\ \{\zeta\}_n \end{Bmatrix}, \quad \{\zeta\}_k = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_0 \\ 0 \\ \ddot{y}_0 \end{Bmatrix}. \tag{8.117}$$

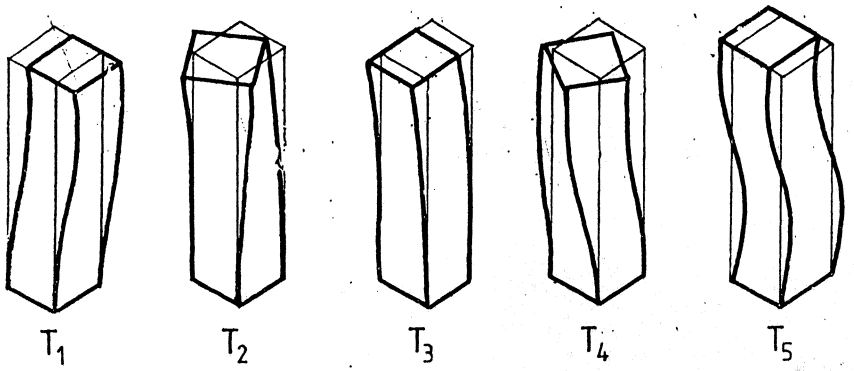


Fig. 8.39

Formularea teoretică a răspunsului seismic liniar pentru structurile spațiale expusă aici prezintă avantajul practic că în analiza numerică se operează cu un număr limitat de coordonate (cîte trei coordonate globale la fiecare nivel $k = 1, 2, \ldots n$), ceea ce reprezintă o mare economie de memorie în calculul automat. Dacă exprimarea ecuațiilor de mișcare se face în raport cu coordonatele nodale (cîte șase în fiecare nod) rezultă un număr extrem de ridicat de necunoscute, fapt care necesită utilizarea unor calculatoare cu capacitate ridicată.

Deoarece matricea de inerție nu mai este diagonală, reducerea la o *problemă standard de valori și vectori proprii*, așa cum a fost prezentată în capitolul 3, necesită unele operații de transformare specifice. În această situație, este mai convenabil ca determinarea caracteristicilor dinamice proprii (fig. 8.39) să se facă direct pe baza matricelor de inerție (8.114) și de rigiditate (8.115) efective, prin abordarea problemei generale de valori și vectori proprii [8].

Problema răspunsului seismic forțat poate fi abordată prin integrare directă pas cu pas (step-by-step) sau prin utilizarea analizei modale și a spectrelor seismice de răspuns. În maniera în care a fost formulată în acest paragraf, metoda de analiză seismică a structurilor spațiale propusă este specifică calculului automat. Aspectele teoretice expuse pot fi extinse prin considerarea componentei de rotație a accelerației seismice (v. § 8.1.5.).

8.4. INTEGRAREA DIRECTĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE DE CONDIȚIE

În vederea rezolvării sistemului de ecuații diferențiale, care exprimă echilibrul dinamic instantaneu pe direcția GLD la acțiunea mișcării seismice, este necesară o transformare prealabilă a acestora care să permită aplicarea metodei analizei modale sau *metodei de integrare directă pas cu pas* (step-by-step).

În metoda integrării directe a sistemului de ecuații diferențiale ale mișcării este necesar ca intervalul în care se analizează răspunsul dinamic să se discretizeze în intervale incrementale de timp Δt. În acest mod, răspunsul dinamic instantaneu la un anumit moment precizat, se evaluează pe baza datelor calculate în pașii precedenți ai operațiilor numerice și care devin condiții inițiale pentru cei următori (v. cap. 2 și 4). În metodele de integrare directă se pune

însă problema stabilității și exactității soluțiilor obținute prin calcul. De aceea, aceste metode se numesc *condiționat stabile* dacă sînt stabile numai pentru pași mici de timp și instabile pentru pași mai mari și *stabile necondiționat* dacă stabilitatea este asigurată indiferent de mărimea pasului de timp considerat.

În general, metodele de integrare directă pot fi de *tip multipas*, în care răspunsul dinamic instantaneu rezultă pe baza răspunsurilor calculate în mai mulți pași precedenți sau de *tip unipas* în care intervin numai rezultatele din pasul imediat precedent. O metodă de analiză se consideră *explicită* sau *implicită* în funcție de caracteristicile matricei coeficienților necunoscutelor și anume dacă în momentul considerat aceasta este o matrice de inerție corectată sau o matrice de rigiditate corectată.

Metodele de integrare directă curent utilizate în dinamica structurilor sînt cele elaborate de N.M. Newmark și E.L. Wilson. Metoda integrării directe Newmark a fost expusă în § 2.10.

Metoda θ Wilson [8] este de tip unipas și implicită, avînd la bază ipoteza accelerației liniare în intervalul de timp t, $t + \Delta t$, ipoteză utilizată și în metoda Newmark. Ideea metodei o constituie exprimarea echilibrului dinamic instantaneu la momentul $t + \theta\Delta t$ în vederea determinării *deplasărilor*, *vitezelor* și *accelerațiilor* din momentul $t + \Delta t$, în funcție de aceleași mărimi existente la timpul t. Ecuația incrementală de echilibru dinamic instantaneu la momentul $t + \theta\Delta t$ are forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t + \theta\Delta t) + [C]\{\dot{x}(t + \theta\Delta t)\} + [R]\{x(t + \theta\Delta t)\} = F(t + \theta\Delta t). \quad (8.118)$$

Variația accelerațiilor (considerată liniară), pe intervalul de timp extins t, $t + \theta\Delta t$, la momentul $0 \leqslant \tau \leqslant \theta\Delta t$ are expresia

$$\ddot{x}(t + \tau) = \ddot{x}(t) + \frac{\tau}{\theta\Delta t}[\ddot{x}(t + \theta\Delta t) - \ddot{x}(t)]. \quad (8.119)$$

În aplicarea metodei θ Wilson se determină inițial următoarele constante:

$$a_0 = \frac{6}{(\theta\Delta t)^2}, \quad a_1 = \frac{3}{\theta\Delta t}, \quad a_2 = 2a_1, \quad a_3 = \frac{\theta\Delta t}{2}, \quad a_4 = \frac{a_0}{\theta},$$

$$a_5 = \frac{-a_2}{\theta}, \quad a_6 = 1 - \frac{3}{\theta}, \quad a_7 = \frac{\Delta t}{2}, \quad a_8 = \frac{\Delta t^2}{6}.$$

Matricea de rigiditate corectată rezultă

$$[\overline{R}] = [R] + a_0[M] + a_1[C], \quad (8.120)$$

iar vectorul modificat al forțelor exterioare din fiecare pas al procesului iterativ se determină cu relația

$$\{\overline{F}\}_{t+\Delta t} = \{F\}_t + \theta(\{F\}_{t+\Delta t} - \{F\}_t) + [M](a_0\{x\}_t + a_2\{\dot{x}\}_t + 2\{\ddot{x}\}_t) + [C](a_1\{x\}_t + 2\{\dot{x}\}_t + a_3\{\ddot{x}\}_t). \quad (8.121)$$

Prin rezolvarea sistemului de ecuații algebrice liniare

$$[\overline{R}]\{x\}_{t+\theta\Delta t} = \{\overline{F}\}_{t+\theta\Delta t}, \quad (8.122)$$

se obține inițial vectorul deplasărilor din momentul $t + \theta\Delta t$ și în final vectorii accelerațiilor, vitezelor și deplasărilor la momentul $t + \Delta t$:

$$\left.\begin{aligned} \{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} &= a_4(\{x\}_{t+\theta\Delta t} - \{x\}_t) + a_5\{\dot{x}\}_t + a_6\{\ddot{x}\}_t, \\ \{\dot{x}\}_{t+\Delta t} &= \{\dot{x}\}_t + a_7(\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} + \{\dot{x}\}_t), \\ \{x\}_{t+\Delta t} &= \{x\}_t + \Delta t\{\dot{x}\}_t + a_8(\{\ddot{x}\}_{t+\Delta t} + 2\{\ddot{x}\}_t). \end{aligned}\right\} \quad (8.123)$$

Se menționează faptul că metoda θ Wilson este stabilită necondiționat cînd $\theta \geqslant 1{,}37$. în mod obișnuit considerîndu-se valoarea $\theta = 1{,}4$.

Prin particularizarea relațiilor (8.123), cînd $\theta = 1$, se obțin soluțiile corespunzătoare metodei Newmark așa cum rezultă din § 2.10.

În privința alegerii metodei de rezolvare, se precizează că metoda analizei modale devine deosebit de avantajoasă dacă răspunsul dinamic al structurii se poate exprima printr-un număr limitat de moduri proprii de vibrație. Asemenea situație este posibilă numai dacă spectrul de frecvențe al acțiunii poate fi reprezentat printr-un număr limitat de frecvențe proprii ale structurii sau dacă amplitudinile forțelor $\{F(t)\}$ se pot aproxima cu destulă exactitate printr-o combinație liniară a unui număr restrîns de vectori proprii ai structurii.

Dacă variația forțelor perturbatoare este extrem de complexă, sau dacă spectrul de frecvențe este larg, metoda integrării directe pas cu pas devine mai eficientă.

Aplicarea metodei integrării directe este specifică mai ales în cazurile în care răspunsul dinamic corespunde unei structuri cu comportare neliniară.

8.5. INTERACȚIUNEA DINTRE TEREN ȘI STRUCTURĂ

În timpul cutremurelor puternice, datorită deformabilității mediului de fundare, între structură și teren intervine un cuplaj elastic pronunțat, căruia i se asociază fenomene inerțiale și disipative specifice evenimentelor cu caracter dinamic. În consecință, procesul de interacțiune teren-structură are o influență decisivă asupra descrierii calitative și cantitative a răspunsului seismic, mai ales în situația în care deformabilitatea terenului este semnificativă.

Fenomenul de interacțiune teren-structură nu trebuie să se confunde cu efectul mediului din amplasament asupra caracteristicilor de propagare a mișcării seismice înregistrate la suprafața liberă, independent de prezența structurii (v. § 7.10). Interacțiunea se referă la modificarea răspunsului dinamic, ca urmare a interdependenței existente între caracteristicile structurale și proprietățile terenului. Dificultăți majore care intervin în rezolvările numerice decurg în exclusivitate din incertitudinile care stau la baza definirii unui model matematic compatibil pentru terenul de fundație (în condițiile unei comportări liniare sau neliniare), avînd în vedere neomogenitatea și variabilitatea parametrilor caracteristici.

Metodele analitice privind evaluarea răspunsului seismic al structurilor amplasate pe terenuri flexibile, includ aplicarea analizei Fourier, tehnica transformatei Laplace, metoda elementului finit, metoda integrării directe pas cu pas sau metoda superpoziției modale.

Modificarea în timp a proprietăților fizico-mecanice ale terenului de fundație, comportarea neliniară, influența configurației infra-și suprastructurii, precum și alți factori determinanți ai fenomenului de interacțiune teren-structură, fac ca analiza răspunsului seismic să aibă mai mult un caracter orientativ cu toată rigurozitatea rezolvărilor actuale. Datorită complexității sale, acest subiect, căruia i s-au consacrat în ultimii ani numeroase studii și investigații teoretice și experimentale, nu se va aborda in extenso ținînd seama și de destinația acestei lucrări.

9

CONCEPTUL DE PROTECȚIE ANTISEISMICĂ PROIECTARE — COMPORTARE — CONSOLIDARE

9.1. PROTECȚIA ANTISEISMICĂ A STRUCTURILOR — PROBLEMĂ FUNDAMENTALĂ A INGINERIEI SEISMICE

Datorită faptului că în ultimele decenii rata de creștere a populației din țările situate în zone seismice este foarte rapidă, există tendința ca riscul seismic și vulnerabilitatea construcțiilor social-culturale și industriale, să se mărească în mod corespunzător. Din aceste motive, cercetările complexe de geologie, geofizică, geodezie, seismologie și inginerie seismică cunosc în prezent o dezvoltare deosebită, fără precedent, cu scopul final de a contribui la realizarea unor construcții capabile să reziste în condiții satisfăcătoare la cutremure de mare intensitate. Fiecare cutremur reprezintă o sursă importantă de informații și învățăminte ce permit verificarea performanțelor efective ale lucrărilor inginerești, precum și evaluarea nivelului cunoștințelor anterioare, care au stat la baza realizării obiectivelor investigate. Este evident că cele mai valabile și eficiente învățăminte, din toate punctele de vedere, rezultă din analiza acelor clădiri care dispun de echipamente specifice pentru înregistrarea instrumentală a cutremurelor puternice. În acest fel, se pot identifica atît caracteristicile reale referitoare la mișcarea seismică și influența condițiilor locale dintr-un anumit amplasament, cît și comportarea de ansamblu a structurii de rezistență, evidențiindu-se astfel gradul de valabilitate al concepțiilor aplicate în proiectarea și realizarea construcțiilor antiseismice.

Progresele înregistrate în ultimii ani au făcut să scadă simțitor multe din incertitudinile existente asupra genezei mișcărilor seismice și modului de manifestare, precum și asupra fenomenelor și efectelor distructive care se produc în structurile de rezistență.

Protecția unei construcții la acțiunea cutremurelor puternice comportă cunoașterea în cît mai bună măsură a următorilor factori principali:

- *modelul tectonic, geofizic și seismologic al cutremurului viitor cu care urmează să se confrunte construcția;*
- *modelul fizico-mecanic al pachetului geologic superficial din amplasament;*
- *modelul mecanic, dinamic și matematic al structurii de rezistență.*

Definirea acestor factori, precum și a multitudinii de elemente particulare care intervin, rezultă în mod aproximativ prin aplicarea teoriei probabilităților și a tehnicii optimizării.

Pentru scopurile inginerești, cele mai semnificative *informații asupra modelării cutremurelor* constau în cunoașterea poziției epicentrului (distanța epicentrală), intensitatea, durata și compoziția spectrală. Accelerațiile mișcării terenului înregistrate la suprafața liberă pot fi descrise ca fenomene tranzitorii sau funcții aleatoare, avînd anumite caracteristici spectrale care depind (în afara magnitudinii, distanței epicentrale și adîncimii focarului) de natura depozitului superficial.

Comportarea stratului geologic superficial, care furnizează datele necesare *modelării mediului*, în timpul cutremurelor puternice este atît de diversă și uneori contradictorie încît definirea cu certitudine a caracteristicilor fizico-mecanice (condițiilor locale) reprezintă o operație destul de dificilă. În cazul acțiunilor dinamice, majoritatea categoriilor de pămînturi își modifică proprietățile inițiale, de natură statică, datorită solicitărilor de mare intensitate și variabile în timp. Interacțiunea undelor seismice cu stratificațiile mediului din amplasament are o influență importantă asupra propagării mișcării seismice la suprafața terenului. În funcție de proprietățile fizico-mecanice și de grosimea sa pînă la roca de bază, pachetul de straturi superficiale poate contribui substanțial la modificarea conținutului de frecvență (compoziția spectrală) a mișcării seismice înregistrată la suprafața liberă a terenului și de asemenea la diversificarea fenomenelor de amplificare, focalizare și filtrare dinamică.

În privința elaborării unui *model structural*, care stă la baza proiectării antiseismice, operațiile de modelare ale proprietăților fizico-mecanice și dinamice sînt destul de complexe, chiar dacă se admite situația ideală că modelele corespunzătoare mișcării seismice și terenului din amplasament au caracter determinist. Într-adevăr, contradicția fundamentală care domină proiectarea structurilor rezistente la cutremur constă în dezacordul existent între proprietățile inerțiale, disipative și elastice atribuite elementelor structurale constitutive (inclusiv conexiunilor) și proprietățile reale care pot fi identificate numai prin testarea efectivă și autentică furnizată de mișcarea seismică. Proprietățile de bază ale structurilor, care constituie date inițiale în analizele numerice destul de rafinate, sînt stabilite în cele mai favorabile situații prin cercetări experimentale de laborator, tributare în majoritatea cazurilor idealizărilor și simulărilor incompatibile cu realitatea din execuție și calitățile materialelor puse în operă. Extrapolările rezultatelor obținute prin investigarea modelelor structurale la scară redusă sau chiar a prototipurilor constituie elemente calitative globale și limitate și nu argumente de garanție asupra comportării unor structuri similare. Cercetările teoretice și experimentale, cu tot caracterul lor fundamental și eficient, nu pot suplini totdeauna acei factori de risc care țin de probitatea profesională și responsabilitatea socială a celor investiți cu realizarea construcțiilor situate în zone seismice.

Realizarea unei structuri de rezistență cu un nivel de protecție antiseismică satisfăcător este în realitate o operă colectivă la care își dau concursul mai multe discipline interdependente, cum ar fi *Geologia, Geodezia, Seismologia* și bineînțeles *Ingineria seismică* al cărei rol este de altfel primordial. Specialiștii, cu diferite formații științifice și profesionale, care colaborează la încorporarea informațiilor în criterii de proiectare, trebuie să aprofundeze și să înțeleagă problemele specifice comportării și proiectării structurilor inginerești.

● *Geologia* este cea care pune la dispoziție datele necesare cu privire la evoluția proceselor tectonice seculare și milenare, stratigrafia și formațiunile rocilor specifice zonei epicentrale. Studiile de geofizică permit identificarea faliilor active sau potențiale, crăpăturilor în scoarță, alunecărilor de teren, tasărilor și prăbușirilor de masive, precum și fenomenelor de lichefiere pe zone extinse. Toate cercetările întreprinse stau la baza întocmirii hărților geologice generale și locale în care sînt precizate amplasamentele sensibile la mișcări seismice puternice.

● *Geodezia* prin rețele de triangulație și stații geodezice cu borne de observare în plan și de nivel, prin centralizarea și prelucrarea automată a datelor, efectuează măsurători gravimetrice cu privire la variația vectorială a poziției punctelor situate la suprafața terenului. Prin compararea periodică a rezultatelor obținute, cu metode specifice geodezice, se pot defini și descrie mișcările scoarței terestre, corelate cu evenimentele tectonice care le-au generat, în urma stocării informațiilor calitative și cantitative identificate.

● *Seismologia* asigură funcționarea rețelelor de stații seismice și de observare dotate cu echipamente de înregistrare a mișcărilor seismice moderate și de mare intensitate. Pe baza unor programe automate pune la dispoziție principalele caracteristici ale cutremurelor cum ar fi: coordonatele epicentrului, adîncimea focarului, magnitudinea, directivitatea energiei emisă de sursă, propagarea undelor seismice, compoziția spectrală a mișcării la suprafața liberă a terenului, precum și durata acesteia. Prin studii de cauzalitate, asociate cu înregistrările instrumentale (de adîncime sau de suprafață), precum și cu cercetările de geofizică și geodezie, seismologia identifică mecanismul de focar al cutremurelor și elaborează hărțile de micro/macrozonare seismică teritorială. Un rol important revine seismologiei în ceea ce privește *predicția cutremurelor* puternice prin urmărirea deviațiilor de falii active sau potențiale, extinderea lungimii faliilor existente, deformarea scoarței terestre, modificarea nivelului apelor subterane, fluctuațiile cîmpului magnetic și conductivității electrice, variația vitezelor de propagare a undelor principale v_P și secundare v_S, emanația de radon radioactiv etc. În același scop este necesar să se cunoască cît mai în detaliu *„istoria seismică"* a teritoriului, care poate contribui la elucidarea unor fenomene privitoare la modul de manifestare a cutremurelor viitoare. Pe baza investigațiilor complexe și multilaterale, seismologia trebuie să pună la dispoziția inginerului structurist accelerograme sintetizate (trei componente), corespunzătoare unor mișcări seismice așteptate (viitoare) specifice unor amplasamente bine definite, de tipul celor înregistrate pe timpul unui cutremur puternic. *Accelerogramele sintetice ale cutremurelor viitoare* vor descrie principalele caracteristici de care este interesat inginerul proiectant și anume *intensitatea mișcării terenului* (exprimată în *accelerații maxime* și *grad convențional de intensitate macroseismică*), *durata semnificativă a mișcării, caracteristicile de frecvență* (compoziția spectrală — conținut de frecvență) și *frecvența de apariție* a unui cutremur similar, precum și frecvența probabilă de depășire.

● *Ingineria seismică*, pe baza datelor cu privire la caracteristicile mișcării terenului și proprietățile mediului geologic local, materializează prin concepție, analiză, proiectare și execuție construcții rezistente la un anumit nivel de protecție antiseismică, în concordanță cu destinația și importanța acestora. În funcție de caracteristicile stabilite prin cercetările seismologice, inginerul poate evalua prin intermediul intensității mișcării terenului, severitatea răspunsului seismic, iar prin durata semnificativă gradul de avariere așteptat, dacă unele din elementele structurale sînt solicitate peste limita elastică. Compoziția spectrală, proprie fiecărui mecanism de focar și amplasament, permite identificarea componentelor și perioadelor predominante respective care generează fenomene de amplificare seismică. Frecvența de apariție sau perioada de revenire definește intervalul de timp în care accelerograma sintetizată își conservă caracteristicile estimate inițial. Problema valorificării datelor seismologice (în analizele numerice) depinde și de modul de abordare în rezolvările practice. Astfel, în metoda analizei modale se utilizează spectrele seismice de răspuns ale mișcării terenului, iar în metoda integrării directe a ecuațiilor de mișcare (întrucît răspunsul seismic se exprimă pe timpul istoric al cutremurului) intervin direct accelerogramele sintetice care urmează a fi

digitizate. Aspectele ştiinţifice şi tehnice care fac obiectul ingineriei seismice sînt diverse şi numeroase, aşa cum de altfel reiese şi din cuprinsul acestei cărţi.

Evaluarea protecţiei construcţiilor situate în zone seismice are o semnificaţie vitală prin complexitatea aspectelor ştiinţifice şi tehnice care stau la baza realizărilor practice, avînd importante implicaţii economice şi sociale în care îşi asumă responsabilitatea profesională şi morală toţi factorii menţionaţi. Pentru societate sînt la fel de importante atît investiţiile iniţiale pentru edificarea construcţiilor, cît şi costul eventualelor avarii sau chiar distrugeri, fără a mai aminti de pierderile supreme, irecuperabile, de vieţi omeneşti.

9.2. ASPECTE GENERALE PRIVIND PROIECTAREA ŞI ASIGURAREA STRUCTURILOR REZISTENTE LA CUTREMUR

Comportarea dinamică a structurilor, în timpul istoric al mişcării seismice, este mult mai complexă decît comportarea statică sub acţiunea încărcărilor gravitaţionale, situaţie în care proiectarea şi asigurarea antiseismică comportă tehnici mai rafinate de analiză numerică şi de conformare structurală.

Obiectivele fundamentale care se au în vedere la proiectarea şi asigurarea antiseismică constau în limitarea deteriorărilor nestructurale la cutremure minore, prevenirea avariilor structurale şi minimizarea celor nestructurale la cutremure moderate şi evitarea colapsului şi pierderilor umane în cazul unor cutremure de severitate ridicată. În acest sens, studiile parametrice dezvoltate în ultimele decenii, cu importante contribuţii la progresul general al ingineriei seismice prin elucidarea multor aspecte controversate în trecut, au permis trierea şi ierarhizarea celor mai semnificative fenomene care guvernează în principal comportarea unei structuri la acţiuni seismice intensive.

Conceptul proiectării antiseismice se bazează pe definirea şi sintetizarea configuraţiei structurale (forme, dimensiuni, componente, conexiuni etc.) în funcţie de caracteristicile mişcării terenului (intensitate, durată, conţinut de frecvenţă-compoziţie spectrală), de proprietăţile elastice şi dinamice premeditate ale structurilor (inerţiale, disipative, de rigiditate, de ductilitate), de tipul infrastructurii (fundaţii) şi de natura mediului din amplasament (condiţii locale de teren). Proiectarea unei structuri (cu destinaţie precizată) la acţiunea unui cutremur standard (dat), numit şi „cutremur de proiectare" admite mai multe variante cu privire la posibilităţile de alegere a configuraţiei structurale tridimensionale. În această ordine de idei, tipul de unitate structurală adoptat, precum şi materialul folosit pot avea o influenţă decisivă asupra rigidităţilor locale şi de ansamblu, capacităţii de amortizare, posibilităţilor de depăşire a limitei elastice de comportare, precum şi asupra răspunsului seismic exprimat în tensiuni şi deformaţii.

Proiectarea antiseismică trebuie să acorde o atenţie aparte condiţiilor locale de teren, precum şi celor mai eficiente soluţii structurale de fundaţie, deoarece în numeroase situaţii reale avariile şi prăbuşirile s-au datorat cedării pămîntului şi nu elementelor de rezistenţă din suprastructură.

În cazul cutremurelor moderate, răspunsul structurii se înscrie în general în *domeniul elastic de comportare*, depinzînd numai de caracteristicile inerţiale disipative şi elastice. Aceste caracteristici pot fi însă influenţate, în timpul cutremurelor, de interacţiunea dintre componentele structurale şi nestructurale asociate (pereţii de compartimentare şi de închidere). Dacă nu sînt prevăzute măsuri suplimentare de armare sau înrămare, la cutremurele puternice conlucrarea dintre aceste componente este practic inexistentă. Prezenţa componentelor nestructurale, cu funcţie dinamică importantă în anumite situaţii (prin capacitate de rezistenţă, rigiditate şi amortizare), poate avea un rol favorabil cînd participarea lor este certă pe durata cutremurului. Pot surveni însă efecte defavorabile cînd, prin degradarea prematură şi întîmplătoare a acestora, se produc dezechilibrări semnificative ale structurii principale de rezistenţă, prin favorizarea fenomenului de torsiune generală sau locală de etaj. Dealtfel, prin alterarea perioadei fundamentale de vibraţie, se modifică răspunsul seismic liniar, dacă se are în vedere un spectru de răspuns standard — de proiectare, cu consecinţe imprevizibile şi necontrolabile.

Dacă mişcarea seismică este puternică, răspunsul structurii cu incursiuni în *domeniul postelastic de comportare* este practic inevitabil. Răspunsul inelastic al structurilor este extrem de sensibil în raport cu caracteristicile dinamice iniţiale şi intensitatea şocului seismic. Incursiunile postelastice depind în mare măsură de proprietăţile histeretice şi de comportarea ductilă ale materialului şi ale componentelor structurale şi nestructurale, precum şi de modul de realizare a conexiunilor care asigură transferul mutual al deformaţiilor între elementele constitutive. Rezultă deci că *diferenţierea criteriilor de proiectare* este dictată în principal de *intensitatea mişcării seismice* şi de *domeniul de comportare al elementelor structurale* (elastic sau inelastic), precum şi de considerente de ordin *economic* şi *tehnologic*.

Din aspectele expuse mai sus, rezultă că *proiectarea în concept dinamic* a unei structuri rezistente la cutremur rezultă prin asocierea optimă a următoarelor proprietăţi fundamentale care definesc atît componentele, cît şi unităţile structurale: *capacitatea de rezistenţă, rigiditatea, capacitatea de disipare a energiei* şi *ductilitatea*, capabile să confere unei construcţii un nivel de asigurare seismică în limite prestabilite. În acelaşi timp este necesar să se acorde o atenţie deosebită *condiţiilor locale de amplasament*, avînd în vedere influenţa decisivă pe care o poate avea în procesul de proiectare. În figura 9.1 se prezintă o sinteză a principalelor aspecte pe care le include actul de decizie în vederea elaborării proiectelor de rezistenţă ale structurilor situate în zone seismice.

9.3. PROIECTAREA ANTISEISMICĂ ÎN CONCEPT DINAMIC

Conceptul dinamic al proiectării antiseismice a structurilor, la un nivel de asigurare admis, este o noţiune de dată recentă în care intervin numeroase aspecte specifice fenomenelor seismice. La elaborarea unui proiect de rezistenţă trebuie să se ţină seama de următoarele *caracteristici globale* care definesc *configuraţia geometrică* şi *modelul de calcul* al unei unităţi structurale:

- *Caracteristici inerţiale* locale sau generale.
- *Caracteristici elastice* ale secţiunilor, elementelor, substructurilor şi conexiunilor, exprimate prin rigiditate sau flexibilitate.
- *Caracteristici disipative şi de atenuare* corespunzătoare componentelor structurale şi nestructurale, în domeniul elastic şi postelastic de comportare.
- *Caracteristici de ductilitate* şi de comportare inelastică a secţiunilor, elementelor, substructurilor şi structurii în ansamblu.
- *Caracteristici de rezistenţă şi de deformabilitate* la acţiuni gravitaţionale şi laterale.
- *Caracteristici de teren* specifice amplasamentului stabilit.

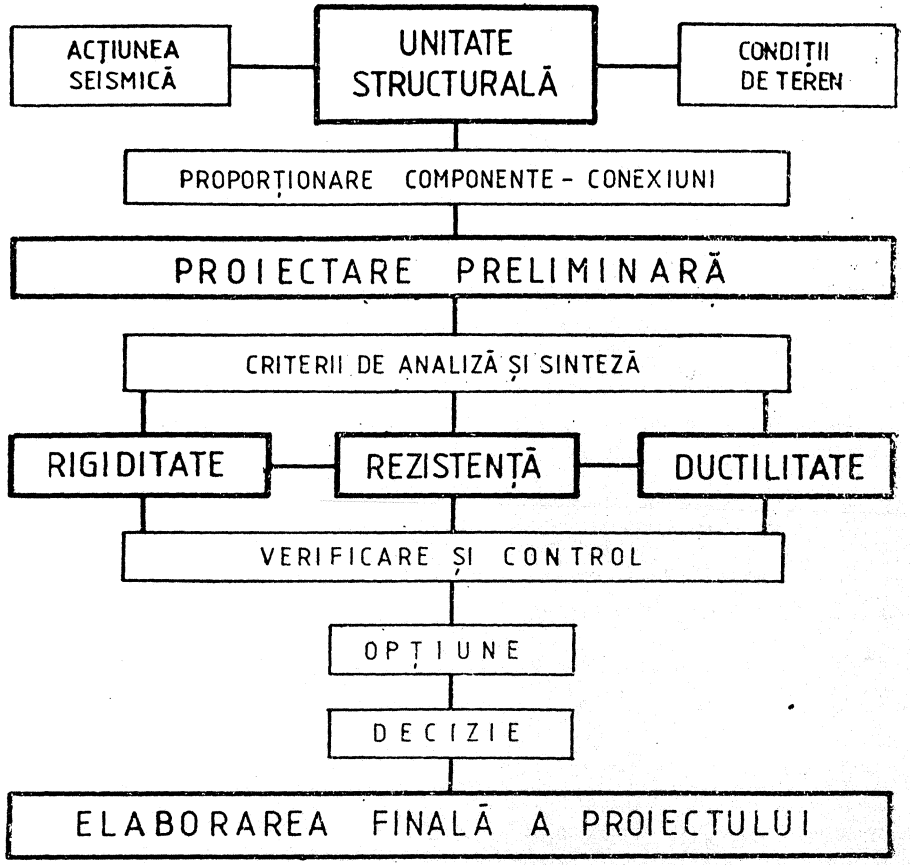


Fig. 9.1

Noțiunea de *concepție dinamică*, de element, de substructură sau de structură tridimensională, *în sensul proiectării structurilor* la acțiuni seismice de intensitate ridicată, are un caracter extrem de complex și nu poate fi definită, așa cum se afirmă uneori, prin „bun simț ingineresc". Un asemenea mod simplist de a minimaliza o noțiune fundamentală în ingineria seismică, cu largi implicații tehnice, economice și sociale, a condus deseori la confuzii și erori grave. Noțiunea de *concepție dinamică structurală* implică vaste cunoștințe teoretice și tehnice, precum și o experiență îndelungată în domeniul ingineriei seismice. Concepția dinamică de tratare a structurilor de rezistență (ținînd seama și de participarea elementelor denumite „neportante" sau „nestructurale" din punct de vedere gravitațional, dar cu funcție dinamică importantă) presupune aprofundarea fiecărui detaliu și element component pînă la întregul ansamblu structural. Dealtfel, efectele cutremurelor din ultimii ani în general și cel din România de la 4 martie 1977 în particular au demonstrat că abaterile și concesiile tehnice de la concepția dinamică de proiectare au condus la avarii locale, distrugeri parțiale sau chiar la prăbușiri totale ale unor construcții a căror asigurare seismică a fost tratată superficial.

9.3.1. Influența componentelor asociate unităților structurale

Concepția dinamică de proiectare are în vedere optimizarea tuturor factorilor care pot contribui la o comportare favorabilă a structurilor la cutremure puternice. *Principalele abateri și erori de la concepția dinamică de ansamblu*, care se pot manifesta prin *influențe negative* (chiar dezastruoase) asupra comportării globale a unei construcții, vor fi prezentate succint în continuare.

● *Disimetrii geometrice de ansamblu pronunțate*, rezultate atît din alcătuirea și organizarea componentelor structurale (de rezistență și de rigiditate), cît și din amplasarea în plan orizontal și pe verticală a elementelor „nestructurale" de compartimentare (sau de închidere). Soluții arhitectonice neraționale, cum ar fi: partiuri neuniforme pe înălțime cu destinații și funcționalități diferite, balcoane și bovindouri cu deschideri exagerate, scări și tuburi pentru ascensoare poziționate excentric, configurații întîmplătoare ale construcțiilor în plan orizontal, partere înalte sau cu discontinuități geometrice la nivelul primului etaj, disproporții volumetrice (retrageri sau intrînduri neregulate) etc. reprezintă influențe structurale defavorabile la acțiuni dinamice laterale. În acest sens se recomandă ca structurile în ansamblu să se înscrie în gabarite geometrice simple și clare, cît mai apropiate de formele simetrice, evitîndu-se astfel discontinuități pronunțate în topologia de asociere a componentelor de rezistență care definesc o unitate structurală.

● *Disproporții inerțiale importante* rezultate din dispunerea incorectă a maselor corespunzătoare încărcărilor permanente și mai ales a celor cu caracter temporar. Disproporțiile inerțiale, generatoare de efecte dinamice defavorabile, pot proveni din: încărcări exagerate mai ales la etajele superioare (arhive, biblioteci, depozite de materiale sau mărfuri, rezervoare sau bazine cu lichide, terase destinate unor activități de agrement etc.), compartimentări excesive la anumite etaje, supraîncărcări datorate schimbării destinației unor clădiri, supraetajări fără măsuri corespunzătoare de asigurare, elemente decorative sau finisaje masive, precum și din acoperișuri și învelitori grele. Este necesar ca asemenea situații să fie evitate, astfel încît să rezulte o distribuție inerțială cît mai uniformă pe toate direcțiile.

● *Discontinuități accentuate în distribuția și variația rigidităților componentelor structurale și „nestructurale"*, în plan orizontal și pe verticală, care nu sînt capabile să asigure o conlucrare uniformă și spațială a unităților structurale tridimensionale. În acest sens, se pot menționa următoarele abateri posibile: întreruperi bruște ale continuității elementelor de rezistență, disproporții între rigiditățile componentelor structurale verticale și orizontale, conexiuni insuficiente care nu contribuie la transferul deformațiilor între elementele asamblate, lipsa efectului de nod rigid sau de disc (șaibă orizontală), înălțimi de etaje diferite cu partere „deschise" (flexibile), stîlpi cu înălțimi diferite situați în special la parter și la primul etaj, stîlpi scurți, scări și tuburi pentru ascensoare amplasate excentric, discontinuități pronunțate în variația rigidităților relative de nivel (mai ales la etajele inferioare), diferențieri importante ale rigidităților absolute (de ansamblu) pe direcțiile transversală și longitudinală, dispunerea întîmplătoare a pereților de compartimentare, forme în plan diferite de la un etaj la altul, sisteme și soluții de fundare neuniforme etc. În vederea asigurării unei cooperări optime între componentele structurale, este obligatoriu să se evite orice categorie de discontinuitate descrisă mai sus, printr-o judicioasă organizare a compoziției elastice, care să prevină concentrări de deformații mari în anumite zone critice și dezechilibrări pu-

ternice locale (între etaje) și de ansamblu ale caracteristicilor globale de rigiditate sau de flexibilitate.

● *Insuficienta capacitate de disipare și atenuare* a energiei transferate structurii de mișcarea seismică, datorită în principal proprietăților histeretice reduse ale materialelor, elementelor componente și ale conexiunilor. În multe situații s-a constatat că procesul de disipare energetică a fost dirijat întîmplător prin deformații elastice și postelastice necontrolate. Prin măsuri speciale, numeroase componente structurale și „nestructurale" pot fi transformate în disipatori energetici naturali sau artificiali care să contribuie în mod substanțial la atenuarea șocului seismic. În procesul de disipare energetică naturală un rol important revine proprietăților de ductilitate, participării elementelor nestructurale (pereți de compartimentare și de închidere), precum și terenului de fundație ca urmare a fenomenului de interacțiune dinamică dintre teren și structură.

● *Capacitatea de rezistență elastică și postelastică redusă* a unor elemente de rezistență principale și în special a componentelor portante verticale (stîlpi și pereți de beton armat sau zidărie). Subdimensionarea unor elemente portante vitale, asociată caracterului ciclic-alternant al acțiunii seismice, poate produce degradări importante care să antreneze distrugerea parțială sau chiar totală a structurii. În cazul unei dimensionări incorecte la acțiuni seismice intensive, elementele de rezistență nu au capacitatea de a asigura incursiuni postelastice fără degradarea semnificativă a secțiunilor, conexiunilor și elementelor structurale. Prin ductilizarea corespunzătoare a componentelor structurale, în strînsă corelare cu proprietățile de rigiditate și capacitatea de rezistență, se poate garanta o comportare de ansamblu satisfăcătoare, cu adaptabilitate postelastică progresivă și cu procese de degradare dirijate și controlate.

9.3.2. Influența terenului și condițiilor locale de fundare

Prin multitudinea fenomenelor pe care le poate genera, mediul de propagare și terenul din amplasament pot avea o influență determinantă asupra comportării fundațiilor și suprastructurilor în timpul cutremurelor puternice. Proiectarea antiseismică a unităților structurale (în care sînt incluse și fundațiile) se bazează pe studii geologice, geofizice și geotehnice amănunțite, cu scopul definirii influențelor pe care le pot avea pachetul de straturi superficiale și condițiile locale de teren. O serie de aspecte calitative și cantitative fundamentale, cu privire la comportarea terenului la acțiuni de tip seismic și la efectele care se manifestă asupra structurilor, au fost subliniate în capitolele 7 și 8. Dealtfel, la stabilirea configurației preliminare a sistemului structural, trebuie analizate în primul rînd condițiile de teren, care reprezintă factorul de decizie cel mai semnificativ în procesul proiectării, deoarece în anumite situații inacceptabile un amplasament prestabilit poate fi chiar abandonat.

În aceste condiții, la proiectarea în concept dinamic a structurilor la un nivel de asigurare garantat (în anumite limite), trebuie să se țină seama de efectele generate de prezența terenului, așa cum se specifică în continuare.

● *Influența mediului de propagare* dintre sursă și amplasament, care depinde de distanța epicentrală și caracteristicile geologice și geofizice globale, se manifestă printr-o selectivitate semnificativă a componentelor cu perioade scurte (în cazul distanțelor reduse și medii de propagare compacte-consolidate) sau lungi (în cazul distanțelor mari și medii de propagare mai afînate și slab consolidate).

● *Influența caracteristicilor fizico-mecanice și dinamice ale pachetului de straturi superficiale*, definite prin studii geologice, geofizice și geotehnice. Dintre acestea pot fi menționate: topologia suprafeței libere, grosimea depozitului geologic superficial, stratigrafia și orientarea planurilor de separație, vitezele de propagare a undelor seismice (în special a celor secundare — de forfecare), reflexia, refracția, dispersia și radiația undelor de la nivelul rocii de bază către suprafața terenului etc. În această situație, avînd în vedere și aspectele prezentate în capitolele 7 și 8, rezultă importanța pe care o au *perioadele predominante* ale mediului (fig. 7.26, 8.12 și 8.28), precum și fenomenele de *amplificare seismică* (fig. 7.27, 7.28 și 8.13), *focalizare* și *filtrare dinamică* asupra răspunsului seismic (fig. 7.26), în funcție de categoria de teren (fig. 7.29).

● *Influența condițiilor locale de deformabilitate ale terenului*, care pot exercita efecte defavorabile dacă la stabilirea configurației și soluției constructive a unității structurale (infra- și suprastructură) nu s-au avut în vedere eventualele posibilități de apariție a unor degradări la nivelul suprafeței libere. Formele sub care pot surveni modificări în configurația terenului sînt următoarele: *crăpături superficiale, extinderea faliilor sau amorsarea celor potențiale, alunecări sau prăbușiri la nivelul crustei terestre, lichefierea nisipului saturat, tasări diferențiate, variația nivelului apelor subterane* și *formarea unor cratere prin refulare* etc. Pe baza cercetărilor obținute prin investigații geofizice, geotehnice și geodezice, se pot obține informații cu privire la comportarea terenului la cutremure viitoare, care să permită validarea sau evitarea unui anumit amplasament.

● *Influența interacțiunii dinamice dintre teren și structură* datorită cuplajului elastic existent la nivelul suprafeței de contact dintre fundație și mediul din amplasament. Principalul efect favorabil produs de fenomenul de interacțiune, cu condiția evitării deformațiilor plastice sau remanente ale pămîntului, constă în capacitatea importantă de disipare ciclică și nisteretică a energiei indusă de mișcarea seismică unității structurale. În cazul structurilor înalte (de tip flexibil) situate pe terenuri compresibile, fenomenul de interacțiune însoțit de plastificări semnificative ale pămîntului, poate contribui la tendința de pierdere a stabilității generale a construcțiilor prin răsturnare.

Variația răspunsului seismic, ca urmare a influenței cuplajului elastic și modificării perioadei fundamentale de vibrație, depinde de configurația spectrelor seismice, așa cum rezultă din § 9.4. Gradul de cuplare elastică dintre teren și structură poate fi definit în mod global prin raportul dintre rigiditățile de ansamblu ale structurii și ale mediului de fundare.

● *Influența infrastructurii* prin soluțiile constructive adoptate pentru fundații, în corelare directă cu tipul de suprastructură, cu caracteristicile mișcării seismice și cu natura terenului. Se pot manifesta efecte defavorabile (atît în infrastructură, cît și în suprastructură), datorită tasărilor diferențiate și interacțiunii necontrolate dintre teren și structură, mai ales în cazul construcțiilor cu dimensiuni disproporționate în plan orizontal (de tip lamelar) sau în formă de I, L, T, U, Z, precum și cu variații pronunțate de înălțime (în trepte). Evitarea unor asemenea situații se poate obține prin fragmentarea corespunzătoare a structurilor și practicarea unor rosturi verticale pe toată înălțimea sau prin realizarea unor sisteme de fundații cu geometrii specifice. În acest sens, se recomandă (adoptarea de la caz la caz) soluții constructive de infra-

structuri cu tălpi continue, radiere generale sau cutii rigide, fundații pe piloți sau barete etc. care să asigure uniformizarea presiunilor pe teren, conlucrarea spațială cu suprastructura și transferul deformațiilor de la fundație la elementele verticale de rezistență.

9.4. CONCEPTUL ACORDĂRII PROPRIETĂȚILOR DINAMICE STRUCTURALE CU SPECTRUL SEISMIC AL ACCELERAȚIILOR ABSOLUTE

Investigarea efectelor produse de cutremurele puternice, care s-au manifestat în diverse regiuni ale lumii, a pus în evidență comportarea diferențiată a structurilor în funcție de proprietățile de rigiditate. Astfel, la unele șocuri seismice construcțiile mai rigide au avut mai mult de suferit decît cele flexibile, la altele constatîndu-se situații total diferite, și anume un nivel de vulnerabilitate mai ridicat la construcțiile flexibile decît la cele de tip rigid.

Diferențierea modului de comportare a structurilor în funcție de proprietățile globale de elasticitate, exprimate prin flexibilitate sau rigiditate, se datorează în principal caracteristicilor spectrale ale mișcării terenului și în particular configurațiilor spectrelor seismice ale accelerațiilor absolute SA, specifice fiecărui amplasament. Din capitolul 8 a rezultat că în cazul unui eveniment seismic, efectul combinat al amplitudinilor accelerațiilor terenului, al conținutului de frecvență (compoziția spectrală), precum și al caracteristicilor depozitului geologic superficial, poate fi evaluat prin intermediul SA. Într-adevăr, cunoscînd variațiile SA se pot estima forțele seismice convenționale FSN sau FTB, așa cum rezultă din § 8.1.2 și 8.2.2.

Bazați pe constatările de mai sus, se poate aprecia că vulnerabilitatea unei structuri la cutremure de intensitate ridicată poate fi identificată prin confruntarea configurației SA cu perioadele proprii de vibrație ale structurii. Pentru construcțiile comune, care nu depășesc un grad mediu de flexibilitate, perioada fundamentală de vibrație poate reprezenta parametrul unic și suficient care să pună în evidență amplificarea seismică în raport cu SA. Domeniul de amplificare seismică este definit prin perioada predominantă a mișcării terenului, care guvernează calitativ și cantitativ variația SA. Rezultă deci că printr-o dimensionare corespunzătoare în concept dinamic a structurii, este posibilă o reducere substanțială a efectelor seismice, dacă perioada fundamentală inițială se află în afara domeniului de amplificare seismică precizat de T_0. Problema, care este în anumite privințe similară cazului acțiunilor directe și permanente studiate în prima parte a acestei lucrări, constă în *acordarea proprietăților dinamice structurale* (T, ν) *cu compoziția spectrală a mișcării terenului exprimată prin spectrul accelerațiilor absolute* [111]. Această operație de concepție preliminară contribuie la „izolarea" construcției de efectele seismice majore și în același timp la ridicarea gradului de protecție antiseismică.

Controversa existentă în trecut, cu privire la opțiunea între stucturi de tip rigid sau flexibil, rezultă tocmai din faptul că nu există un criteriu calitativ sau cantitativ care să permită elucidarea fenomenelor de interacțiune dinamică dintre structură și mișcarea terenului. În această privință, perioada fundamentală de vibrație a structurii poate constitui un criteriu simplu și eficient de definire a caracteristicilor de rigiditate sau de flexibilitate în concept dinamic. Întrucît în literatura internațională nu există un consens în ceea ce

privește corelarea dintre perioada fundamentală T_1 și tipul de structură, s-au admis valorile medii precizate în § 8.1.6, care permit definirea următoarelor trei categorii de unități structurale:

— *structuri de tip rigid* 0,6 s $\geq T_1$,

— *structuri de tip semirigid* 0,6 s $< T_1 <$ 1,4 s, (sau semiflexibil)

— *structuri de tip flexibil* $T_1 \geq$ 1,4 s.

Acordarea perioadei fundamentale a structurii cu configurația SA, corespunzătoare unei anumite fracțiuni din amortizarea critică ν, rezultă din figura 9.2. Trebuie precizat că valoarea perioadei fundamentale de vibrație se determină în ipoteza că structura are o comportare perfect elastică, fapt pentru care se va nota prin $T_{inițial}$.

Cele trei configurații spectrale SA^* reprezentate în figura 9.2 au fost normalizate la valorile maxime, fiind diferențiate și calibrate în funcție de perioada predominantă T_0, caracteristică mecanismului de focar și condițiilor locale de teren. Din modul de variație al curbelor SA^* se constată că perioada predominantă T_0 poate fi interpretată ca *punct de balans al accelerațiilor spectrale* și implicit al acțiunii seismice asupra structurilor. Din figura 9.2 rezultă direct situațiile în care se pot obține atenuări importante ale răspunsului seismic, deci și ale vulnerabilității seismice, prin evitarea coincidenței dintre perioada fundamentală a structurii și perioada predominantă a mișcării terenului. Un exemplu semnificativ cu privire la diversificarea categoriilor structurale și alegerea celor mai convenabile (care să conducă la efecte seismice minime), în diferite zone ale lumii, îl constituie configurațiile spectrale date în figurile 8.12 și 8.28.

În funcție de intensitatea șocului seismic, este posibil ca structura să depășească stadiul elastic de comportare, astfel încît perioada fundamentală inițială se poate modifica pe durata cutremurului t^*. Datorită procesului de

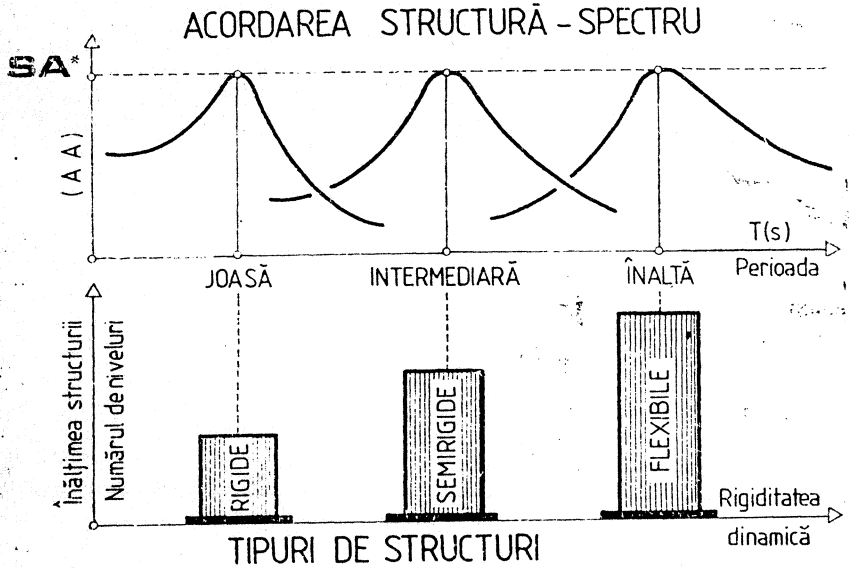


Fig. 9.2

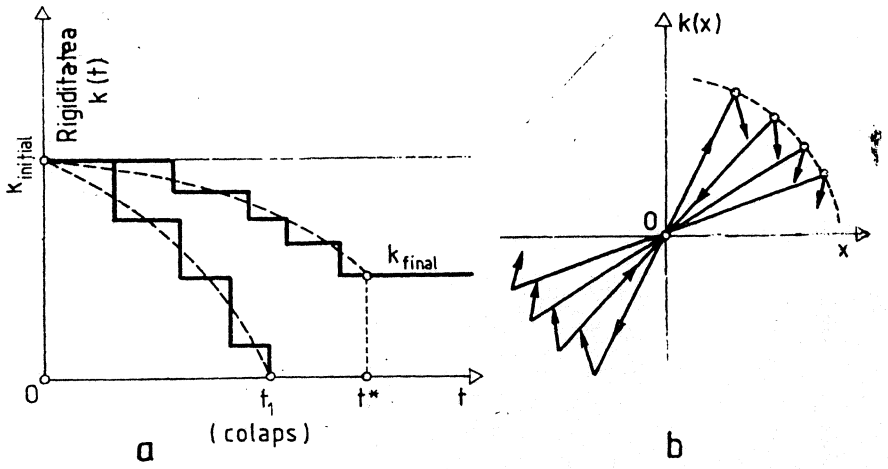


Fig. 9.3

degradare progresivă a rigidității, rezultă că o structură caracterizată în stadiul elastic prin perioada fundamentală $T_{inițial}$, în urma modificării succesive a perioadei în fiecare secvență a cutremurului, se transformă într-un număr nelimitat de sisteme dinamice avînd perioada variabilă $T(t)$, $0 \leqslant t \leqslant t^*$.

Modificarea rigidității componentelor structurale este generată de cutremure de mare intensitate (severe), situație în care datorită deformărilor inelastice specifice *domeniului postelastic* de comportare, perioada fundamentală inițială crește pe măsură ce procesul de degradare se agravează. Evoluția degradărilor este extrem de complicată depinzînd atît de amplitudinea mișcării x, cît și de timp t prin funcții aleatoare. Dacă se admite că sistemul dinamic elasto-plastic este staționar și liniar pe intervale delimitate, variația rigidității, care depinde de tipul sistemului structural și de configurația mecanismului de cedare, poate fi modelată prin curbe de degradare în trepte (salturi) sau netede, în conformitate cu figura 9.3. Epuizarea rigidității la timpul $0 < t_1 \leqslant t^*$, implicit a capacității portante, caracterizează producerea prăbușirii totale (colaps) a structurii pe durata mișcării seismice.

În cazul cutremurelor de intensitate moderată, care nu produc degradări semnificative ale rigidității componentelor principale de rezistență, comportarea structurii se menține în *domeniul elastic*, astfel încît *perioada fundamentală inițială se conservă* pe tot timpul istoric al desfășurării evenimentului seismic (fig. 9.4, *a*).

Datorită *incursiunilor postelastice* repetate (ciclice), specifice cutremurelor puternice, rigiditatea de ansamblu a structurii se reduce în fiecare secvență a mișcării seismice, iar *perioada fundamentală va crește în timp*, în condițiile în care capacitatea portantă se află în limite satisfăcătoare (fig. 9.4, *b*). Dacă însă degradările structurale sînt puternice și se manifestă și asupra capacității de rezistență a structurii, rigiditatea devine nulă (fig. 9.3), iar perioada fundamentală tinde către infinit (fig. 9.4, *c*). Această ultimă situație caracterizează colapsul general al structurii care se poate înregistra pe durata seismului la secvența $0 < t_1 \leqslant t^*$ sau după încetarea cutremurului prin epuizarea capacității de rezistență a componentelor verticale sub acțiunea încărcărilor gravitaționale.

■ DEGRADAREA PERIOADEI FUNDAMENTALE ■
(Degradarea rigidității)

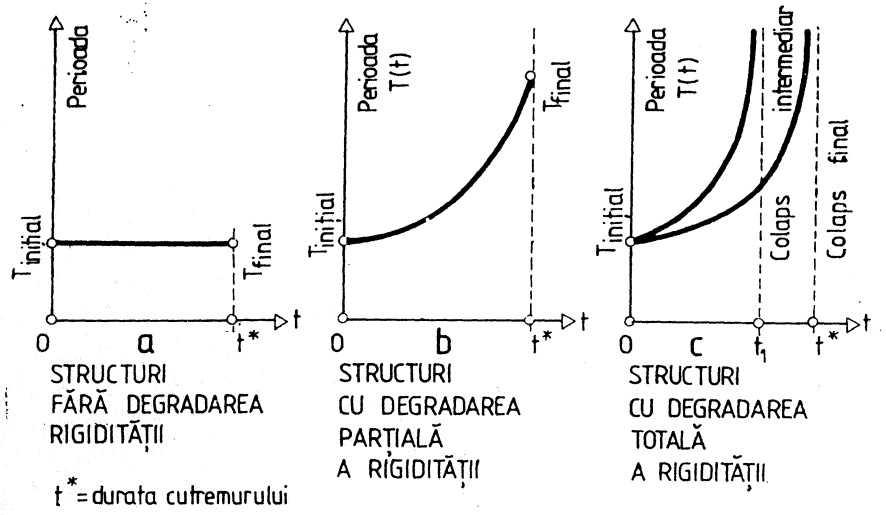


Fig. 9.4

În situațiile descrise mai sus, prin degradarea progresivă a valorilor inițiale ale rigidității și perioadei, se va produce și o variație a răspunsului seismic pe durata mișcării seismice. Variațiile accelerațiilor absolute spectrale pot avea caracter contradictoriu în funcție de configurația *SA*, precum și de acordarea inițială a sistemului dinamic [110]. Dacă conținutul de frecvență al accelerogramei nu se modifică, din figura 9.5 rezultă situațiile efective care pot interveni în timpul unui cutremur de mare intensitate. Dacă acordarea inițială corespunde situației din figura 9.5, *a*, este de așteptat ca degradarea chiar mai puternică a rigidității (inclusiv a perioadei) să nu conducă la prăbușirea totală a structurii. Situația prezentată în figura 9.5, *b* devine destul de periculoasă chiar în cazul unei degradări moderate a rigidității (inclusiv a perioadei), deoarece prin majorarea solicitărilor seismice este afectată capacitatea portantă a întregii structuri. Ultimul aspect pune în evidență posibilitatea colapsului pe durata cutremurului chiar a unor structuri ale căror perioade fundamentale inițiale s-au aflat în afara zonei de amplificare seismică, dar care au fost fie subdimensionate, fie neproiectate în conceptul comportării și adaptării postelastice.

Pentru a urmări comportarea prin intermediul spectrelor seismice a răspunsului pe durata cutremurului, este necesar să se determine *SA* pe fragmente de timp cuprinse în accelerogramele înregistrate. Fiecare *SA* din setul de spectre asociate accelerogramei va pune în evidență compoziția spectrală corespunzătoare fragmentului respectiv, precum și condițiile inițiale rezultate din prelucrarea fragmentului precedent. Accelerația absolută spectrală poate fi estimată direct prin intermediul acestor spectre „secvențiale", dacă se cunoaște perioada fundamentală corespunzătoare nivelului de degradare efectivă. Deoarece posibilitatea de deformabilitate postelastică a unei structuri

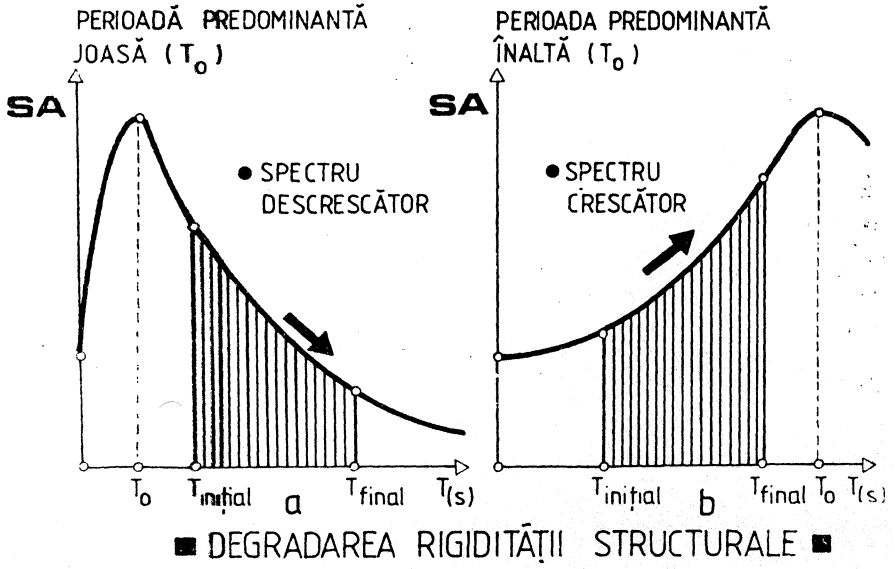


Fig. 9.5

se poate pune în evidență prin coeficientul de ductilitate μ (vezi § 8.1.7), perioada fundamentală instantanee, la o anumită treaptă de degradare exprimată prin deplasarea $x(t') > x_e$ (unde x_e caracterizează limita de curgere, iar $0 < t' \leqslant t^*$), se obține în mod aproximativ cu formula [147]

$$T(t') = \frac{1}{3\mu}\,(1 + 2\mu^{3/2})\,T_{inițial},$$

sau mai simplu [64]

$$T(t') = \sqrt{\mu}\,T_{inițial},$$

unde

$$\mu = \mu(t') = x(t')/x_e, \quad 1 < \mu(t') \leqslant x_m/x_e,$$

iar x_m reprezintă valoarea maximă a deplasării la care se produce cedarea (fig. 8.17). În felul acesta, tratarea răspunsului inelastic se reduce la o problemă clasică de analiză liniară.

Din aspectele prezentate succint în acest paragraf și dezvoltate mai pe larg în lucrările [110], [111], rezultă importanța decisivă pe care o are *acordarea în concept dinamic* a caracteristicilor structurale cu cele ale mișcării terenului. Abordarea în această manieră a proiectării structurilor situate în zone seismice permite evitarea amplificărilor răspunsului seismic prin măsuri simple de atenuare naturală sau artificială (prin elemente mecanice de izolare a suprastructurii), cu scopul de a reduce în mod substanțial energia indusă de mișcarea terenului. Tipul unității structurale, rezultat din asocierea diferitelor componente de rezistență, trebuie astfel definit inițial încît să se asigure o acordare seismică corespunzătoare, ținînd seama și de precauțiile impuse de situațiile prezentate în figura 9.5.

Există totuși posibilitatea ca pe același amplasament să se manifeste mișcări seismice cu perioade predominante lungi (generate de cutremure intermediare de magnitudine ridicată și distanțe epicentrale mari) și de asemenea cu perioade predominante joase (produse de cutremure de suprafață-crustale, cu magnitudini moderate și distanțe epicentrale reduse). De aceea, aspectele cu privire la acordarea de tip structură-seism devin mult mai complexe cînd același amplasament poate fi supus unor cutremure cu mecanisme de focar și cu perioade de revenire diferite. Dacă se cunosc compozițiile spectrale ale tuturor categoriilor de cutremure care se pot produce într-o anumită zonă, este posibil să se obțină o acordare seismică satisfăcătoare printr-o operație de optimizare a caracteristicilor proprii de vibrație ale structurii. Problema se complică însă destul de mult dacă se asociază aspectelor descrise mai sus și influența fenomenului de interacțiune dintre teren și structură. O rezolvare satisfăcătoare poate fi obținută numai printr-un studiu parametric, bazat pe informații vaste și riguroase. În cazul structurilor cu flexibilitate ridicată există posibilitatea ca fenomenul de amplificare seismică să corespundă modurilor superioare de vibrație dacă $T_2 \simeq T_0$ sau $T_3 \simeq T_0$ etc.

În unele cazuri este indicat să se utilizeze sisteme artificiale de legături suplimentare „adaptabile", prin cedarea cărora (la șocuri puternice) se realizează o „autoacordare" seismică a structurii cu compoziția spectrală a cutremurului respectiv. Această strategie tehnică, încă destul de dificilă din punctul de vedere al realizării și mai ales al funcționării practice, a fost abordată și aplicată în ultimul timp în Japonia și U.R.S.S. [1] cu rezultate încurajatoare.

În concluzie, o acordare dinamică rezonabilă între perioada fundamentală inițială a structurii și configurația spectrului acceleraților absolute poate contribui la atenuarea severității acțiunii seismice și vulnerabilității componentelor structurale, precum și la reducerea riscului seismic.

9.5. COMPORTAREA POSTELASTICĂ A STRUCTURILOR. DUCTILITATE-REZISTENȚĂ-RIGIDITATE

9.5.1. Noțiuni preliminare. Conceptul comportării postelastice ductile

Pe întreaga lor durată de existență, unitățile structurale sînt supuse unor cutremure de mare intensitate (de excepție), a căror perioadă de repetabilitate (periodicitate) poate fi mai mică sau mai mare, în funcție de caracteristicile seismice ale zonelor în care au fost amplasate. Proiectarea acestora în concept exclusiv elastic (liniar) nu este posibilă din motive practice, datorită dimensiunilor exagerate care ar rezulta, și neindicată din punct de vedere economic, deoarece nu se valorifică rezervele de rezistență postelastice ale elementelor componente.

În condițiile conservării în limite admisibile a capacității portante și a siguranței în exploatare, deși se admit unele degradări ale componentelor structurale, prin depășirea limitei elastice, comportarea de ansamblu a unităților structurale are un pronunțat caracter inelastic, ceea ce necesită o tratare teoretică și o rezolvare constructivă total diferită în raport cu concepțiile tradiționale. În general, capacitatea de deformare postelastică (cu caracter plastic) poate fi definită calitativ și cantitativ prin *factorii de ductilitate*.

Noțiunea de *ductilitate* a fost introdusă și comentată în § 8.1.7, în contextul comportării inelastice a sistemelor dinamice acționate de mișcări seismice puternice. Se consideră că o structură are o comportare ductilă dacă este capabilă să disipeze energia totală transferată de cutremur și să permită producerea unor deformații ciclice substanțiale, fără ca elementele componente să sufere avarii excesive sau reduceri importante ale capacității de rezistență. Prin prevederea unui anumit *nivel de ductilitate* elementelor de rezistență, se pot evita distrugeri cu caracter fragil (casant), asigurîndu-se astfel protecția structurilor în timpul cutremurelor puternice, în ale căror componente se admit totuși unele degradări cu caracter exclusiv ductil. În asemenea situații, după cutremur, cu investiții minime necesitate de repararea unor elemente structurale sau nestructurale, se pot reda integral destinația și funcționalitățile inițiale ale construcției.

Modul de comportare postelastică se poate pune în evidență prin curbe acțiune-răspuns, exprimate în diferiți termeni (parametri), de forma celor reprezentate în figura 8.16, din care rezultă caracterul ductil sau fragil al cedării.

Răspunsul seismic postelastic este substanțial influențat de *modificarea rigidității* și a *capacității de disipare a energiei*, pe timpul istoric în care se manifestă evenimentul seismic. În cazul cutremurelor puternice, cînd structura are o pronunțată comportare inelastică, rigiditatea inițială scade în mod semnificativ (ca urmare a degradării elementelor componente), iar capacitatea de disipare a energiei introdusă de mișcarea seismică ciclică crește în timp (datorită fenomenelor histeretice specifice fiecărui material). Aceste efecte pot fi corelate cu deplasările generalizate maxime (exprimate prin deformații specifice ε, curburi Φ, rotiri ale secțiunilor sau conexiunilor θ și deplasări laterale), sau adimensional prin factorul de ductilitate μ definit ca raportul dintre deplasarea generalizată maximă (corespunzătoare stadiului ultim — limită de cedare) și deplasarea generalizată corespunzătoare limitei de curgere (corespunzătoare inițierii plastificărilor). În conformitate cu această definiție cu caracter mai general, bazați și pe considerațiile expuse în § 8.1.7, rezultă următoarele categorii de factori de ductilitate:

— ductilitatea deformațiilor specifice $\mu_\varepsilon = \varepsilon_m/\varepsilon_c$,

— ductilitatea secțională (de curbură) $\mu_\Phi = \Phi_m/\Phi_c$,

— ductilitatea de rotire (conexiuni) $\mu_\theta = \theta_m/\theta_c$,

— ductilitatea de deplasare liniară (translație) $\mu_x = x_m/x_c$.

Deoarece unitățile structurale au fost definite ca o asociere de elemente de rezistență asamblate prin intermediul anumitor legături (conexiuni), noțiunea de ductilitate se poate diversifica astfel:

— ductilitate secțională,

— ductilitate de element (componente structurale),

— ductilitate de conexiune (legături punctuale sau liniare),

— ductilitate de subsansamblu (de substructură, de etaj),

— ductilitate de unitate structurală.

Trebuie menționat faptul că definirea factorului de ductilitate în cazul sistemelor complexe reprezintă o operație extrem de dificilă, întrucît există numeroase variante de obținere a curbelor acțiune-răspuns (F-x, M-Φ etc.) și, de asemenea, o diversitate de posibilități de plastifiere și de mecanisme de cedare ca urmare a apariției articulațiilor plastice. Evoluția mecanismelor de cedare la structurile hiperstatice, datorită complexității situațiilor posibile,

poate fi urmărită și controlată numai prin intermediul unor programe automate bazate pe analize parametrice.

În cazul structurilor în cadre de beton armat (B/A) în literatura de specialitate există mai multe moduri de definire ale factorului de ductilitate, acceptîndu-se în general expresia

$$\mu = \frac{\text{deplasarea maximă (de cedare) în vîrful structurii}}{\text{deplasarea efectivă în momentul atingerii limitei elastice}}$$
(structură)

Această definiție poate conduce la valori exagerate ale factorului de ductilitate în situația în care articulațiile plastice apar simultan într-un mecanism posibil de cedare.

Pentru estimarea factorului de ductilitate al unităților structurale formate din bare drepte, se pot utiliza următoarele relații aproximative:

$$\mu_{(structură)} \simeq \frac{1}{n} \Sigma \mu_{med,\,nivel},$$

și

$$\mu_{(structură)} \simeq \frac{1}{2} \Sigma \mu_{grinzi}$$

în care $\mu_{med,\,nivel}$ reprezintă factorul mediu de ductilitate relativă de nivel, μ_{grinzi} — factorul de ductilitate al grinzilor cadrului, iar n — numărul de niveluri.

În cazul diverselor sisteme structurale (cadre spațiale, structuri cu diafragme verticale, sisteme duale — mixte asociate etc.), o influență importantă asupra ductilității o au gradul de nedeterminare statică (rezerva de legături suplimentare) și natura eforturilor secționale dominante. Este evident că, prin creșterea gradului de nedeterminare, posibilitățile de formare a articulațiilor plastice ($A.P$) sînt mai numeroase. Acest fapt contribuie la *complicarea mecanismelor de cedare* și obținerea mai multor „linii de apărare" (rezistență) ductilă a structurii la acțiuni seismice intensive. Prin apariția $A.P$ este necesar ca structura să dezvolte un mecanism stabil și controlat de cedare, asociat unei capacități ridicate de disipare a energiei, fără însă să fie însoțit de ruperi cu caracter fragil (casant). Se face precizarea că $A.P$ nu constituie o legătură articulată punctuală, în sensul celor definite în calculul elastic al structurilor, ci reprezintă o zonă în care se înregistrează o localizare (concentrare) a deformațiilor postelastice.

Calculul factorilor de ductilitate presupune cunoașterea succesivă a deformațiilor structurii (în fiecare treaptă de încărcare) din momentul apariției primei $A.P$ pînă la inițierea mecanismului de cedare. Analizele numerice sînt destul de complicate mai ales dacă se ține seama de influența variației vitezei de aplicare a acțiunii exterioare, precum și de numărul de cicluri (încărcare-descărcare) pe durata mișcării seismice.

Întrucît energia seismică indusă într-o structură nu poate fi consumată numai în domeniul elastic de comportare, măsurile de adaptare postelastică bazate pe cerințe de ductilitate, rezistență și rigiditate controlate, asigură atît absorbția de energie prin proprietăți histeretice, cît și disiparea unei cantități de energie prin deformații postelastice. Diagrama F-x (M-Φ) din figura 9.6, *a*, specifică betonului armat (B/A), pune în evidență absorbția energiei pe ciclu prin suprafața curbei histeretice, energia disipată prin deformații

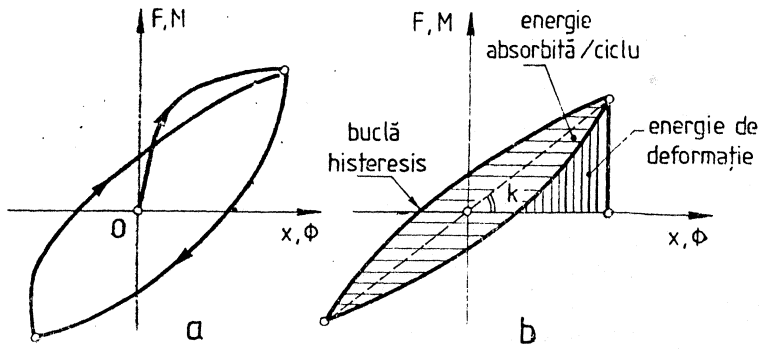


Fig. 9.6

inelastice (suprafața cuprinsă între curba de descărcare și axa Ox), precum și degradarea rigidității și capacității de rezistență pe fiecare ciclu (fig. 9.6, *b*). Se constată că în procesul de încărcare-descărcare, după apariția fenomenului de fisurare a betonului, deformațiile au un caracter permanent cu efecte de histeresis importante. În acest context se poate constata că dacă două sisteme posedă același factor de ductilitate rezultat din curbele F-x (M-Φ), răspunsul seismic nu va fi identic dacă proprietățile histeretice diferă.

În funcție de caracteristicile de deformabilitate ale configurației unităților structurale, pot fi descrise trei situații distincte în care intervine condiționarea cerințelor de ductilitate, rezistență și rigiditate.

● *Structuri de tip flexibil*, cu perioade proprii fundamentale inițiale înalte ($T_1 \geq 1{,}4$ s). La aceste tipuri de structuri, în care sînt dominante deplasările laterale, sporirea capacității de rezistență are un rol mai puțin important în raport cu necesitatea majorării capacității de a se deforma peste limita elastică pentru asigurarea unei comportări postelastice favorabile și evitarea colapsului. Această cerință se realizează prin ductilizarea corespunzătoare a componentelor structurale, astfel încît deformabilitatea structurii peste limita elastică să contribuie la absorbția și disiparea energiei seismice. În acest caz, coeficientul de reducere al răspunsului seismic are valoarea $R = 1/\mu$ (vezi § 8.1.7, fig. 8.21 și tab. 8.1).

● *Structuri de tip rigid*, cu perioadele proprii fundamentale inițiale joase ($T_1 \leq 0{,}6$ s) la care capacitatea de rezistență devine o cerință extrem de importantă, în timp ce deformabilitatea poate fi considerată neglijabilă. În asemenea situații capacitatea de rezistență are funcție dominantă, în timp ce adaptabilitatea postelastică (prin preconizarea unor măsuri specifice de ductilizare) are un rol secundar; coeficientul de reducere al răspunsului seismic este $R = 1$.

● *Structuri de tip semirigid* (sau semiflexibil), cu perioade proprii fundamentale inițiale intermediare ($0{,}6$ s $< T_1 <$ $1{,}4$ s), la care energia absorbită este de cea mai mare importanță astfel că atît cerința (necesarul) de rezistență, cît și cerința de ductilitate sînt implicate în egală măsură. În aceste condiții, se poate opera asupra ambelor mărimi fie prin reducerea capacității de rezistență și sporirea ductilității, fie prin majorarea capacității de rezistență și diminuarea ductilității, printr-un proces corespunzător de proiectare. Coeficientul de reducere al răspunsului devine $R = 1/\sqrt{2\mu - 1}$. Rezultă deci *necesitatea existenței unui balans* (echilibrări) *între cerințele de rezistență și ductilitate* pentru toate componentele ansamblului structural.

Pentru realizarea ductilității de ansamblu, un rol important revine conexiunilor (nodurile la cadre și grinzile de cuplare la diafragme) care trebuie să asigure transferul deformațiilor între componentele principale de rezistență conectate, precum și ductilizarea întregii unități structurale.

Cele trei regimuri de comportare analizate, caracterizate prin perioadele (sau frecvențele) proprii fundamentale de vibrație (definite în stadiul inițial-elastic de comportare), pot fi selectate, prin opțiune, încă din faza preliminară de proiectare în concept dinamic al structurii, prin stabilirea *rigidității de ansamblu*.

În abordarea situațiilor descrise anterior, este necesar să se dețină informații cît mai complete cu privire la *rezistența și ductilitatea* elementelor componente, subansamblurilor și unităților structurale, în funcție de tipul conexiunilor (legăturilor) și calității materialelor folosite. În cazul structurilor din B/A, rezistența și ductilitatea sînt afectate de mai mulți factori dintre care se amintesc dimensiunile și forma secțiunii, cantitatea de armătură (longitudinală și transversală), calitățile betonului și oțelului, asigurarea continuității armăturilor etc., astfel încît să se evite cedări casante prin ruperea betonului prin compresiune. Este evident că o importanță majoră o are și natura eforturilor secționale dominante din elementele componente care intervin cu influențe calitative și cantitative asupra cărora se va reveni.

În cazul structurilor de tip flexibil, uneori și de tip semirigid, datorită apariției $A.P$ pe timpul istoric al acțiunii seismice, se produce o scădere a rigidității globale și deci o majorare importantă a deplasărilor laterale. Datorită acestor deplasări laterale Δ, încărcările verticale P de la fiecare nivel produc *momente secundare* (efecte de ordinul II) definite în literatura internațională prin „momente P-Δ" sau efect P-Δ.

Efectul P-Δ, combinat cu comportarea inelastică a structurii, poate determina o reducere semnificativă a capacității portante a elementelor verticale de rezistență datorită majorării momentelor încovoietoare.

Momentele încovoietoare rezultate din efectul P-Δ pot avea valori ridicate mai ales în cazul cadrelor independente nerigidizate și neasociate cu pereți de umplutură sau cu diafragme verticale de rezistență. De asemenea, efectul excentricizării forțelor gravitaționale în urma deplasărilor laterale inelastice devine mai periculos dacă se ține seama de influența fenomenului de interacțiune dintre structură și terenul de fundație.

Din aspectele cu caracter general expuse aici, a rezultat că structurile proiectate în conceptul cerinței de ductilitate pot fi supuse unor acțiuni seismice peste limita elastică, fără ca degradările produse să poată defini un mecanism de cedare. Cu toate acestea, ductilizarea exagerată poate conduce la efecte contrarii, mai ales în cazul apariției efectului P-Δ care poate genera, în anumite situații, și fenomene de instabilitate elastică.

9.5.2. Criterii generale cu privire la ductilizarea unităților structurale

Tipurile de unități structurale din beton armat specifice construcțiilor civile și industriale sînt de trei categorii generale, și anume:

— *sisteme formate din bare drepte cu configurație spațială*, în care eforturile de încovoiere sînt dominante;

— *sisteme formate din diafragme verticale de rezistență* în care sînt dominante atît eforturile de încovoiere, cît și cele de forfecare, alcătuite din pereți izolați sau cuplați prin conexiuni orizontale. Preponderența unui anumit efort depinde în general de dimensiunile pereților și de înălțimea construcției;

— *sisteme duale (mixte)*, rezultate de obicei prin asocierea cadrelor spațiale și diafragmelor verticale (plane sau închise) care au rolul de a limita deplasările laterale și de a prelua cea mai mare parte din încărcările seismice orizontale.

Experiența cutremurelor din ultimii ani a demonstrat că structurile proiectate și asigurate în concept dinamic au avut în majoritatea situațiilor o comportare satisfăcătoare, deși s-au înregistrat și unele eșecuri. Diferențierea modului de comportare al structurilor la mișcări seismice intensive se datorește multor factori de risc cu caracter obiectiv sau subiectiv care vor fi analizați pe larg în § 9.9. Din categoria factorilor de risc cu caracter obiectiv face parte insuficienta adaptabilitate postelastică. În acest sens un rol însemnat revine asigurării unui nivel de ductilitate prestabilit, pentru toate componentele structurale și conexiunile acestora, precum și proporționării raționale a caracteristicilor de rigiditate, atît în plan orizontal, cît și pe verticală. Noțiunea de „beton armat ductil" a fost introdusă pentru prima dată în ingineria seismică de J.A. Blume [28] și dezvoltată ulterior mai ales în S.U.A. și Noua Zeelandă.

Principalii factori (parametri) care influențează asupra ductilității secțiunilor, elementelor, conexiunilor și structurilor de B/A, au fost descriși în § 8.1.7. Influențele cele mai semnificative revin însă următorilor trei parametri:

— *proprietățile fizico-mecanice ale materialelor* care definesc B/A (marca sau clasa betonului și marca oțelului);

— *modul de alcătuire al secțiunilor transversale și al conexiunilor* (forma secțiunii, cantitatea de armătură longitudinală și transversală);

— *natura efortului predominant care dirijează cedarea* (încovoiere, încovoiere cu forfecare, compresiune excentrică cu excentricitate mică sau mare, forfecare etc.). În acest sens sînt necesare următoarele precizări:

● Conceptul de bază al comportării ductile a componentelor structurale constă în dirijarea cedării prin curgerea armăturii înaintea distrugerii casante a zonei comprimate de beton. În vederea realizării acestui deziderat, care contribuie la ductilizarea elementelor de rezistență, este necesar ca betoanele folosite să fie de marcă (clasă) superioară, iar oțelurile să fie de marcă medie și caracterizate prin paliere de curgere (proprietăți postelastice).

● În privința influenței cantității de armătură, este evident că prin creșterea procentului de armare din zona întinsă $p\%$ rezultă o diminuare a ductilității, în schimb, ductilitatea poate fi ameliorată prin armarea zonei comprimate și confinarea secțiunilor cu armătură transversală (etrieri, grătare, spirale). În figura 9.7 se prezintă modul de variație al factorului de ductilitate în funcție de marca oțelului și procentul de armare a zonei întinse, a unui element supus la încovoiere, în condițiile în care marca (clasa) betonului este aceeași. De altfel, proprietatea de adaptabilitate postelastică poate fi definită prin valorile ultime x_m sau Φ_m, ca și prin $x_m - x_c$ sau $\Phi_m - \Phi_c$ (fig. 8.17), cantități care pun în evidență amploarea procesului de degradare, precum și capacitatea de absorbție energetică prin deformații inelastice. O influență importantă asupra ductilității o are și forma secțiunii care poate fi concentrată (cu dimensiuni proporționale) sau lamelară (cu dimensiuni disproporționate).

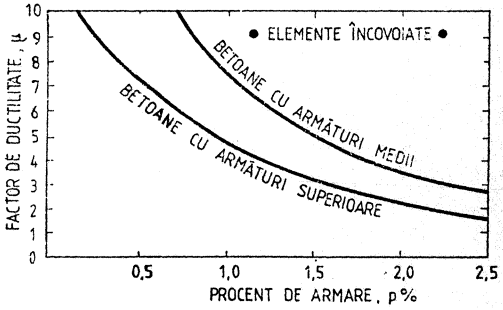


Fig. 9.7

● Cerința de ductilitate, precum și modul de alcătuire al secțiunilor transversale și al conexiunilor depinde în mare măsură de eforturile secționale dominante și specificul cedărilor posibile. Astfel, elementelor dominant încovoiate (de tipul grinzilor), precum și celor supuse la compresiune excentrică cu excentricitate mare (de tipul stîlpilor zvelți cu forțe axiale moderate), li se poate asigura o ductilitate suficientă prin mărimi constructive rezonabile. Componentele structurale dominant forfecate (de tipul stîlpilor scurți și diafragmelor joase) sau solicitate la compresiune excentrică cu excentricitate mică (de tipul stîlpilor obișnuiți cu forțe axiale importante), datorită caracterului casant al ruperii, pot fi ductilizate prin măsuri constructive mai severe. Pentru garantarea inițierii deformațiilor postelastice prin curgerea armăturii întinse, ultima categorie de elemente de rezistență necesită o tratare specială întrucît nivelul de ductilitate posibil și capabil este limitat. O atenție specială trebuie acordată conexiunilor dintre componentele structurale (noduri de cadre, grinzi de cuplare la diafragme, îmbinări liniare sau spațiale la structuri prefabricate etc.), astfel încît să asigure transferul reciproc al deformațiilor între elementele cuplate fără cedări casante.

În continuare se vor analiza posibilitățile efective de ductilizare a celor două unități structurale de bază, cu largă utilizare în practica construcțiilor.

● *Structurile în cadre de B/A* au o importanță deosebită prin diversitatea posibilă a eforturilor predominante ce pot apare în componentele constitutive. Astfel, *elementelor dominant încovoiate* (grinzi și plăci), li se poate asigura un domeniu mai amplu de ductilizare prin multiplele posibilități de adaptare a unor măsuri constructive eficiente. Dintre acestea se menționează: majorarea capacității de rezistență a zonei comprimate (prin utilizarea betoanelor cu marcă superioară sau prin prevederea unor armături suplimentare), reducerea în anumite limite a armăturilor întinse (prin procente de armare moderate), sporirea armăturii transversale (prin îndesirea etrierilor), utilizarea armăturilor ductile (cu mărci medii) etc. În felul acesta, se poate obține la șocuri seismice puternice o comportare ductilă, care să permită cedarea secțiunilor prin curgerea armăturii întinse (înaintea ruperii fragile a betonului) și apariția articulațiilor plastice.

La *elementele dominant comprimate* (stîlpi cu secțiuni obișnuite sau lamelare), procesul de ductilizare este mult mai complicat, datorită atît prezenței forțelor axiale mari (în interacțiune cu momentele încovoietoare), cît și funcției vitale pe care o au în ceea ce privește conservarea construcțiilor în timpul cutremurelor. Cu toate acestea, se poate obține o ductilizare satisfăcătoare, în funcție de excentricitatea forței axiale gravitaționale, prin confinarea corespunzătoare a stîlpilor cu armături transversale (cu etrieri independenți închiși sau cu spirale), prin dimensionarea rațională a secțiunilor (geometria formei și cantitatea de armătură longitudinală) și printr-o asigurare controlată la efectele produse de forțele tăietoare. Întrucît posibilitatea de ductilizare depinde de excentricitatea forței axiale, pentru a evita cedările cu caracter fragil (casant), se recomandă ca efortul unitar mediu din secțiunea de beton (rezultat din considerarea compresiunii centrice) să satisfacă relația $\sigma_b \leqslant nR_c$,

unde R_c reprezintă rezistența betonului la compresiune, iar n — un coeficient subunitar care variază în funcție de poziția stîlpului în plan orizontal (n = = 0,20 ... 0,35). Aspecte cu totul deosebite apar în cazul comportării postelastice a stîlpilor scurți, elemente dominant forfecate, la care posibilitatea de ductilizare este destul de limitată.

Ductilizarea conexiunilor dintre componentele structurale *(noduri plane și spațiale)* se obține prin traversări corecte ale armăturilor longitudinale din elementele conectate și asigurarea unor ancoraje corespunzătoare, precum și prin confinarea nodurilor cu etrieri închiși (simpli sau dubli).

Deoarece structurile în cadre au un grad ridicat de nedeterminare statică și o comportare spațială favorabilă, se poate dirija și controla apariția articulațiilor plastice astfel încît să rezulte un *mecanism de cedare* complex, care să asigure disiparea aproape integrală a energiei induse de cutremur, prin absorbție histeretică și prin deformații postelastice pronunțate. În acest sens, pot fi imaginate diferite scenarii pentru evoluția mecanismelor posibile de cedare, prin diferențierea premeditată a ductilității elementelor structurale componente. În scopul evitării unui colaps prematur și sporirii capacității portante, se recomandă evitarea apariției mecanismelor de cedare prin inițierea plastifierilor la capetele stîlpilor sau prin cedarea nodurilor, urmărindu-se ca deformațiile postelastice să se localizeze cu precădere în elementele orizontale de rezistență. Avînd în vedere că structurile în cadre se caracterizează în general printr-o deformabilitate relativ ridicată, este necesar să se verifice, în anumite situații, *efectul* P-Δ care poate genera momente suplimentare substanțiale.

● Condiții similare de ductilizare se impun și *structurilor formate din diafragme verticale de rezistență*, care prin configurația lor au o comportare globală fragilă. Structurile în diafragme se mai numesc și sisteme cuplate, fiind alcătuite din doi sau mai mulți pereți din B/A conectați prin intermediul unor bare de cuplare (numite și buiandrugi). Modul de comportare a diafragmelor și implicit condițiile de ductilizare depind în principal de procentul golurilor și de dimensiunile geometrice în plan și pe verticală. Datorită rigidității globale ridicate, diafragmele dispun de o capacitate de rezistență importantă, în condițiile unei deformabilități laterale reduse. De aceea, aceste tipuri de configurații structurale au o adaptare postelastică mai redusă și un nivel de ductilitate limitat, în raport cu structurile în cadre de B/A.

Barele orizontale de cuplare a pereților, cu funcție de conexiune liniară, pot fi ductilizate la un asemenea nivel încît să contribuie în mod decisiv la absorbția și disiparea energiei în domeniul postelastic de deformare. Acestor conexiuni orizontale li se poate asigura o comportare ductilă prin armături longitudinale, sau dispuse pe diagonală, precum și prin armături transversale de confinare a secțiunilor, cu etrieri deși simpli sau dubli închiși.

În privința *elementelor verticale de rezistență* (numite și spaleți), în care pot predomina eforturi de încovoiere, compresiune și forfecare, printr-o conformare corespunzătoare a geometriei secțiunii transversale și armarea rațională a bulbilor se poate obține o reducere a eforturilor unitare în beton, precum și asigurarea la efectul forțelor tăietoare. Aceste aspecte reprezintă numai premisele unui proces mai complicat de ductilizare.

Mecanismul de cedare a unei unități structurale alcătuită din diafragme pline (independente) sau conectate este mult mai simplu decît cel al cadrelor, prin localizarea deformațiilor postelastice în barele de cuplare sau în pereți (în special în zonele situate la baza construcției). Întrucît cedările sînt premeditat dirijate prin plastifierea conexiunilor orizontale, într-un stadiu premergător formării mecanismului final de cedare, diafragmele vor avea o comportare similară unor console. În această situație, capacitatea de ductilitate a acestora devine hotărîtoare în ceea ce privește posibilitatea de absorbție și disipare a cantității de energie indusă de mișcarea seismică. Comportarea mai mult sau mai puțin ductilă (uneori chiar casantă) depinde în mare măsură de geometria globală a diafragmelor, care diferențiază solicitarea dominantă. Dacă raportul dintre înălțimea totală H și dimensiunea cea mai mare a secțiunii transversale B are valoarea $H/B \leqslant 2$, se poate considera că eforturile dominante sînt de forfecare, în timp ce forțele axiale și momentele încovoietoare au o influență secundară.

9.5.3. Ductilizarea componentelor structurale ale cadrelor de B/A

● *Ductilitatea grinzilor* se definește de obicei prin intermediul comportării secțiunii transversale (v. § 9.5.1) astfel (fig. 9.8)

$$\mu_\Phi = \frac{\text{curbura maximă (ultimă)}}{\text{curbura la curgere}} = \frac{\Phi_m}{\Phi_c}.$$

În această exprimare nu se introduce variația momentului sau a curburilor în lungul elementului și nici influența forței tăietoare. În general Φ_c se poate estima destul de corect, în timp ce Φ_m se obține totdeauna în mod aproximativ, întrucît este destul de dificil de anticipat stadiul ultim. În cazul acțiunilor seismice puternice, J.A. Blume ș.a. [28] recomandă pentru ductilitatea minimă intervalul $\mu_{min} = 4 \ldots 6$, iar M.Z. Cohn [52] valoarea medie $\mu_{med} = 5$.

Grinzile fiind elemente dominant încovoiate, așa cum s-a mai menționat, la evaluarea ductilității intervin o serie de influențe dintre care se evidențiază cele mai importante.

— *Influența armăturilor longitudinale.* Ductilitatea crește cu cît scade procentul de armare din zona întinsă p sau diferența $p-p'$ (unde p' reprezintă coeficientul de armare din zona comprimată) și de asemenea cu cît oțelul este de marcă mai scăzută și cu proprietăți plastice semnificative (fig. 9.7). Dacă se notează cu $\xi = x/h_0$ raportul dintre înălțimea zonei comprimate și înălțimea activă a secțiunii, se constată că situația $\xi = \xi_{limita}$ definește cedarea secțiunii

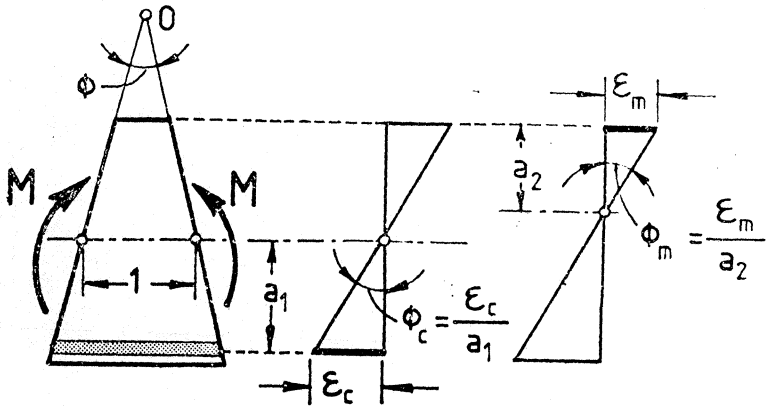


Fig. 9.8

prin curgerea armăturii întinse (prin deformații cu caracter ductil) simultan cu distrugerea betonului din zona comprimată (prin rupere cu caracter fragil-casant).

Dacă ruperea betonului prin compresiune se produce înaintea curgerii armăturii (cînd $\xi > \xi_{limită}$), cedarea secțiunii are caracter fragil-casant (secțiunea rezultă supraarmată). Dacă armătura intră în curgere înaintea distrugerii betonului din zona comprimată (cînd $\xi < \xi_{limită}$), cedarea secțiunii are caracter ductil (secțiunea rezultă subarmată). Din aceste motive situația $\xi = \xi_{limită}$ reprezintă *punctul de balans* între cedarea ductilă și cedarea fragilă (casantă) căreia îi corespunde coeficientul de armare p_b. În vederea obținerii unei ductilități optime, codul ACI recomandă coeficienți de armare $0{,}50p_b \leqslant p \leqslant 0{,}75p_b$.

— *Influența rezistenței materialelor asociate.* Ductilitatea secțională sporește cu cît rezistența la compresiune a betonului este mai ridicată, iar limita de curgere a armăturilor este mai scăzută. Asemenea situații conduc la reducerea înălțimii zonei comprimate la solicitări peste limita elastică și deci la majorarea rotirii maxime Φ_m (în stadiul ultim).

— *Influența armăturilor transversale.* Prezența armăturii transversale în secțiunile grinzilor are o funcție multiplă deoarece preîntîmpină procesul de degradare prematură a betonului, la solicitări provenite din forțele tăietoare (forfecare), contribuind la îmbunătățirea capacității de rezistență și la creșterea deformabilității. Armarea transversală se realizează prin confinarea secțiunilor cu etrieri închiși. Întrucît la capetele grinzilor forțele tăietoare ating valori maxime, distanța dintre etrieri în aceste zone va fi mai mică. Etrierii mai pot contribui la evitarea flambajului barelor longitudinale din zonele comprimate ale grinzilor.

În condițiile unor solicitări seismice intensive, degradarea grinzilor prin forfecare are loc prin deformații mult mai reduse decît prin încovoiere, astfel încît energia absorbită și disipată postelastic este practic neînsemnată. De aceea, cedări prin forfecare nu se admit în general la structurile ductile. Efectele cu caracter alternant (ciclic) specific cutremurelor pot produce fisuri înclinate, mai ales la capetele grinzilor, pentru evitarea cărora se prevede armătură transversală suplimentară (etrieri), întrucît cedarea prin forfecare are caracter fragil (casant). Deoarece formarea articulațiilor plastice, precum și rotirea totală care se manifestă depind de deformațiile de lunecare, confinarea secțiunilor contribuie la dirijarea cedării prin curgerea armăturilor longitudinale întinse.

— *Influența formei secțiunii transversale* poate avea un efect semnificativ asupra ductilității grinzilor, în funcție de aspectul geometric și raportul dimensiunilor (secțiuni „concentrate", „lamelare" sau oarecare). Astfel, secțiunile în T sînt favorabile deoarece, prin reducerea înălțimii zonei comprimate, cresc deformațiile postelastice pînă în stadiul ultim, deci și ductilitatea secțională. În zonele cu momente negative nu se mai manifestă influențe favorabile deoarece placa nu mai intervine.

● *Ductilitatea stîlpilor* se exprimă prin intermediul rotațiilor sau translațiilor prin factorii μ_θ sau μ_Δ definiți în § 9.5.1. Stîlpii sînt componente de rezistență cu funcție vitală în configurația unui ansamblu structural, deși sînt supuși la solicitările cele mai complexe. Eforturile care acționează în secțiunile transversale sînt momentele încovoietoare M, forțele axiale N și forțele tăietoare T. Efectele pe care le produc aceste eforturi secționale, în cazul în care au succesiv valori dominante, sînt descrise în figura 9.9. Se poate constata că M dominant poate conduce la o cedare ductilă prin apariția $A.P$

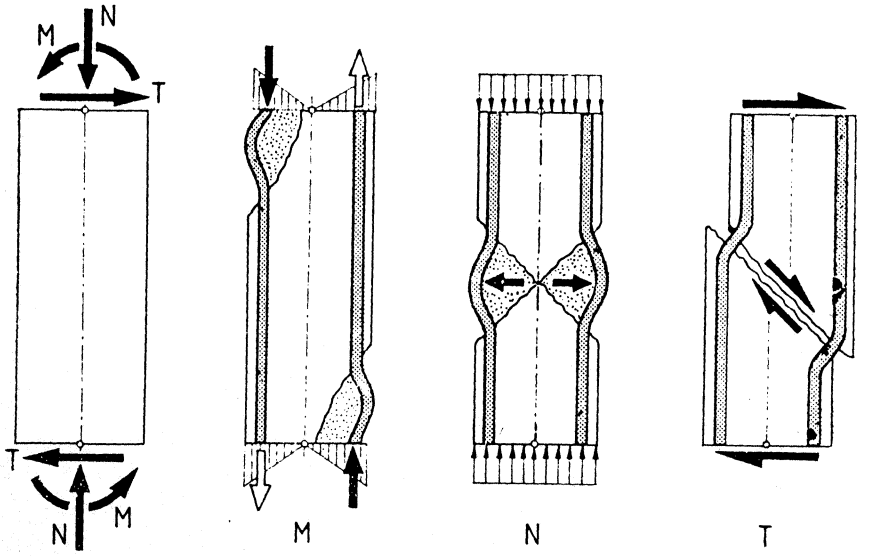


Fig. 9.9

la capetele stîlpului, N dominant produce o rupere casantă de tip dublu-con (similară cu cea obținută în laborator la încercarea cuburilor și prismelor), iar T dominant provoacă ruperi casante pe direcții înclinate (planuri de lunecare) în special la stîlpii scurți sau cu înălțime medie. Mai periculos devine însă efectul combinat al acestor eforturi, situație în care măsurile de ductilizare devin destul de severe.

Dintre principalele influențe care se manifestă asupra ductilității stîlpilor, se vor prezenta în continuare cele mai semnificative.

— *Influența calității betonului și armăturii* în sensul deja expus.

— *Influența armăturii longitudinale* care intervine în stadiul ultim (de cedare), în special în cazul încovoierii, solicitare rezultată din comprimarea excentrică a stîlpilor.

— *Influența formei secțiunii transversale* are un rol important atît la solicitarea de încovoiere, cît și la cea de forfecare, mai ales cînd dimensiunile secțiunilor sînt disproporționate. Dacă secțiunile sînt de formă lamelară, stîlpii devin vulnerabili pe direcția perpendiculară pe latura cu dimensiunea cea mai mare, deoarece rezultă o comportare dominant casantă.

— *Influența armăturilor transversale* sau de confinare laterală a secțiunilor este decisivă în procesul de ductilizare al stîlpilor. Importanța confinării asupra capacității de rezistență și deformabilității stîlpilor încărcați centric este pusă în evidență în figura 9.10. Realizarea confinării laterale prin fretarea stîlpilor cu etrieri rectangulari închiși, etrieri circulari sau prin spirale continue asigură o comportare triaxială a masei de beton prin creșterea presiunilor laterale și a deformațiilor.

Cercetările experimentale efectuate [60] au arătat că spiralele continue au o eficacitate dublă față de cea a etrierilor rectangulari sau circulari. Stîlpii confinați cu spirale permit o ductilizare ridicată, fiind capabili să absoarbă

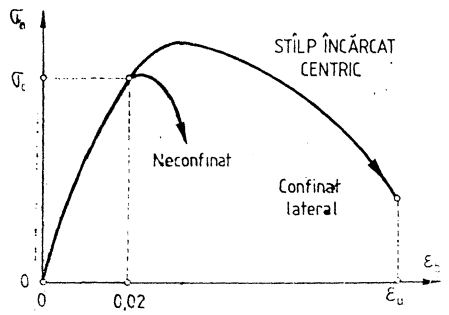


Fig. 9.10

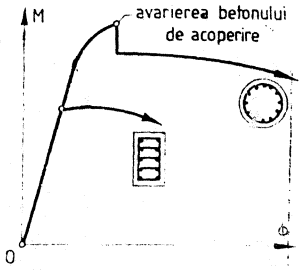


Fig. 9.11

și să disipeze cea mai mare parte din totalul energiei induse de seism, prin deformații postelastice semnificative.

În figura 9.11 sînt reprezentate diagramele moment-curbură, corespunzătoare unui stîlp cu secțiune rectangulară și altuia cu secțiune circulară confinat cu spirală, de unde rezultă influența favorabilă atît a formei secțiunii, cît și a modului de confinare. Scăderea bruscă a momentului capabil în diagrama M-Φ a stîlpului cu secțiune circulară se datorează degradării cu caracter casant a betonului de acoperire.

Prevederea armăturilor transversale sub formă de etrieri rectangulari închiși (de obicei dubli) sau circulari, de spirale sau de legături suplimentare în cruce (grătare) și îndesirea acestora în zonele critice (cele de la capetele stîlpilor) contribuie la îmbunătățirea capacității de rezistență și de deformație, precum și la ductilizarea secțiunilor puternic solicitate la încovoiere și forfecare. Armătura prevăzută pentru preluarea forței tăietoare rezultă din necesitatea dirijării articulațiilor plastice în elementele orizontale de rezistență, cu scopul de a evita formarea unor mecanisme de cedare premature. De altfel, la acțiuni seismice puternice, nu este permis să se înregistreze ruperi casante din forțe tăietoare.

În vederea asigurării apariției articulațiilor plastice la extremitățile componentelor structurale orizontale, sînt necesare următoarele condiții între momentele capabile și ultime de la capetele stîlpilor și grinzilor din fiecare nod:

$$\Sigma M_{cap.\,st} > \Sigma M_{cap.\,gr.}, \quad \Sigma M_{ultim.\,st} > \Sigma M_{ultim.\,gr.}$$

O atenție cu totul particulară trebuie acordată stîlpilor scurți, avînd în vedere faptul că eforturile dominante sînt de forfecare și că ductilizarea comportă o analiză mai aprofundată.

Cutremurul din 4 martie 1977 a pus în evidență comportarea defavorabilă a stîlpilor scurți, la unele structuri din *București* proiectate în concepție antiseismică, dar a căror cedare cu caracter casant la forță tăietoare a demonstrat inadaptabilitatea postelastică și insuficienta ductilizare a secțiunilor suprasolicitate. În schimb, experiența cutremurului de la *San Fernando — California* a confirmat eficacitatea confinării stîlpilor cu spirale continue.

— *Influența excentricității forței axiale* prezintă un interes major întrucît definește modul de cedare casantă (în cazul excentricităților mici) sau ductilă (în cazul excentricităților mari). În cazul clădirilor înalte, la care stîlpii de la nivelurile inferioare sînt solicitați la forțe axiale importante, deoarece secțiu-

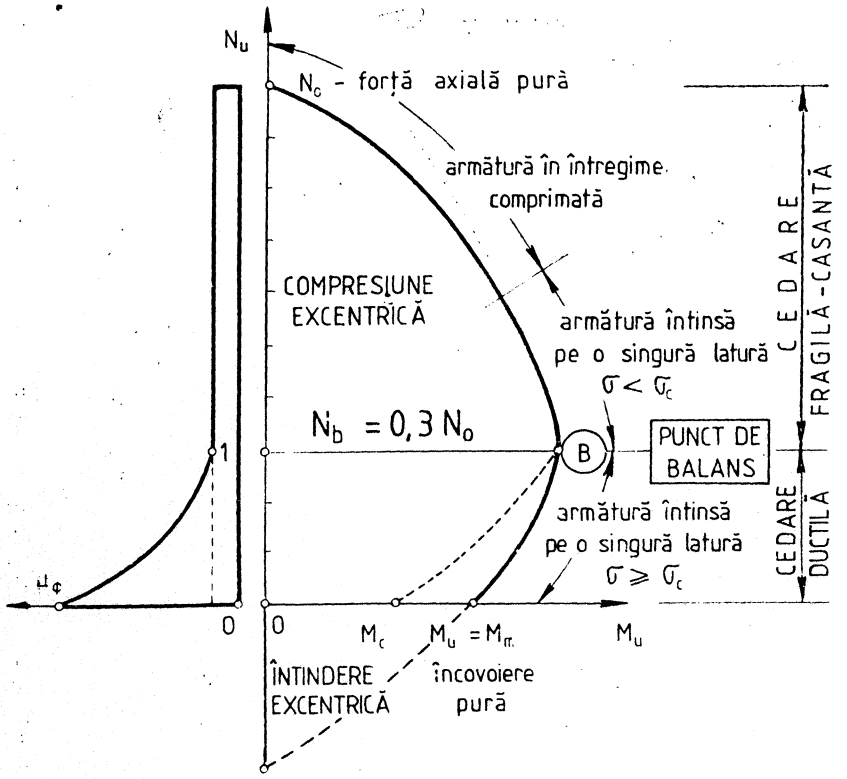


Fig. 9.12

nile sînt solicitate la compresiune excentrică cu *excentricitate mică*, operația de ductilizare este destul de dificilă, iar uneori chiar imposibil de realizat practic.

Efectul combinat dintre valorile ultime ale forței axiale N_u și momentului încovoietor $M_u = N_u e$ (unde e reprezintă excentricitatea forței axiale), pentru un anumit stîlp, poate fi reprezentat prin *diagrame de interacțiune* de forma celei dată în figura 9.12. În această diagramă se pune în evidență *punctul de balans* (notat cu B) al solicitării stîlpului, care definește cedarea secțiunii critice prin curgerea armăturii întinse (prin deformații ductile) simultan cu ruperea prin compresiune a betonului (prin deformații casante). Rezultă deci că punctul de balans, analog cu situația descrisă în cazul elementelor încovoiate, delimitează cedarea ductilă de cedarea casantă, în funcție de excentricitatea forței axiale. Valoarea forței axiale în punctul de balans se consideră $N_b = 0{,}3\,N_0$ (unde N_0 reprezintă solicitarea axială pură), iar valoarea momentului încovoietor va fi $M_b = N_b e$. Codul ACI recomandă necesitatea prevederii unor măsuri speciale de confinare a stîlpilor cînd $N_{efectiv} > 0{,}4\,N_b$, iar în cazul excentricităților mari, cînd $N_{efectiv} < 0{,}4\,N_b$, se pot asigura factori de ductilitate cu valori minime $\mu = 4 \ldots 6$. Din diagrama de interacțiune din figura 9.12 se observă că orice combinație dintre N și M care se înscrie în interiorul suprafeței delimitată de curba $N_u - M_u$ poate fi preluată de un

stîlp fără degradări semnificative. Pentru a ilustra adaptarea postelastică și specificul cedării stîlpilor, diagramei de interacțiune i s-a asociat și variația factorilor de ductilitate μ.

Întrucît asigurarea ductilizării depinde în special de intensitatea forței axiale, la proiectarea preliminară a structurilor, se recomandă ca geometria secțiunilor transversale a stîlpilor să fie astfel stabilită încît să rezulte, din solicitările axiale aplicate centric, eforturi unitare (medii) moderate. În acest sens, majoritatea codurilor de protecție antiseismică prevăd, în funcție de poziția stîlpilor, valorile

— pentru stîlpi interiori: $\sigma_{b,med} = (0{,}30 \ldots 0{,}35)\, R_c$,

— pentru stîlpi marginali: $\sigma_{b,med} = (0{,}25 \ldots 0{,}30)\, R_c$,

— pentru stîlpi de colț: $\sigma_{b,med} = (0{,}20 \ldots 0{,}25)\, R_c$.

Diferențierea coeficienților de reducere din relațiile de mai sus depinde și de intensitatea acțiunii seismice care majorează forțele axiale (mai ales în cei periferici) prin efectul produs de momentele de răsturnare.

● *Ductilizarea conexiunilor* în cazul structurilor în cadre se referă la legăturile dintre stîlpi și grinzi, numite în mod curent noduri. Conexiunile sînt zone de pronunțată sensibilitate structurală, în general indeformabile, a căror funcție constă în asigurarea transferului deformațiilor elastice și inelastice între elementele de rezistență verticale și orizontale și în dirijarea apariției articulațiilor plastice în zonele de capăt ale grinzilor. În figura 9.13 s-au specificat solicitările la care sînt supuse nodurile cadrelor, precum și posibilitățile de cedare ale masei de beton la eforturi principale de întindere σ_1. Forfecarea maximă la care este supus nodul se determină din sistemul de forțe reprezentat în figura 9.13. Efectul forfecării nodului se manifestă prin eforturi principale de întindere σ_1 (care pot produce fisuri diagonale în masa betonului) și eforturi principale de compresiune σ_2 (care produc strivirea sau expulzarea betonului). Deoarece încărcarea seismică are caracter ciclic-alternant, forțele tăietoare vor schimba de semn, astfel încît în nod pot apărea fisuri sau crăpături pe direcția ambelor diagonale. Prin strivirea și măcinarea locală a betonului din nod, este posibilă alunecarea armăturilor longitudinale din elementele conectate, dacă ancorarea n-a fost realizată în afara zonei de conectare.

Asigurarea ductilității nodurilor poate fi obținută prin adoptarea următoarelor măsuri:

— confinarea cu armături periferice (etrieri simpli sau dubli) care să modifice mecanismul posibil de cedare;

— introducerea unor grătare sau agrafe suplimentare, în vederea evitării unor concentrări de eforturi și uniformizării solicitărilor;

— ancorarea armăturilor longitudinale din stîlpi și grinzi în afara nodului

În general, ductilitatea nodurilor, definită prin raportul rotirii la curgere θ_c și la limită θ_m (maximă), adică $\mu_\theta = \theta_c/\theta_m$ (vezi § 9.5.1), are valori mai reduse decît a componentelor conectate, deoarece nodul trebuie să-și conserve caracteristicile de rigiditate în timpul inițierii și formării mecanismelor de cedare.

Întrucît la șocuri seismice intensive cedările legăturilor și ancorajelor se produc brusc și cu caracter fragil, este necesar să se ia măsuri de ductilizare corespunzătoare. În acest sens, este interzisă înnădirea armăturii stîlpilor în zona momentelor maxime (situată la capete). Se recomandă ca petrecerea armăturilor să se localizeze la mijlocul înălțimii stîlpilor, zonă în care sînt situate în general punctele de inflexiune (cu excepția parterului).

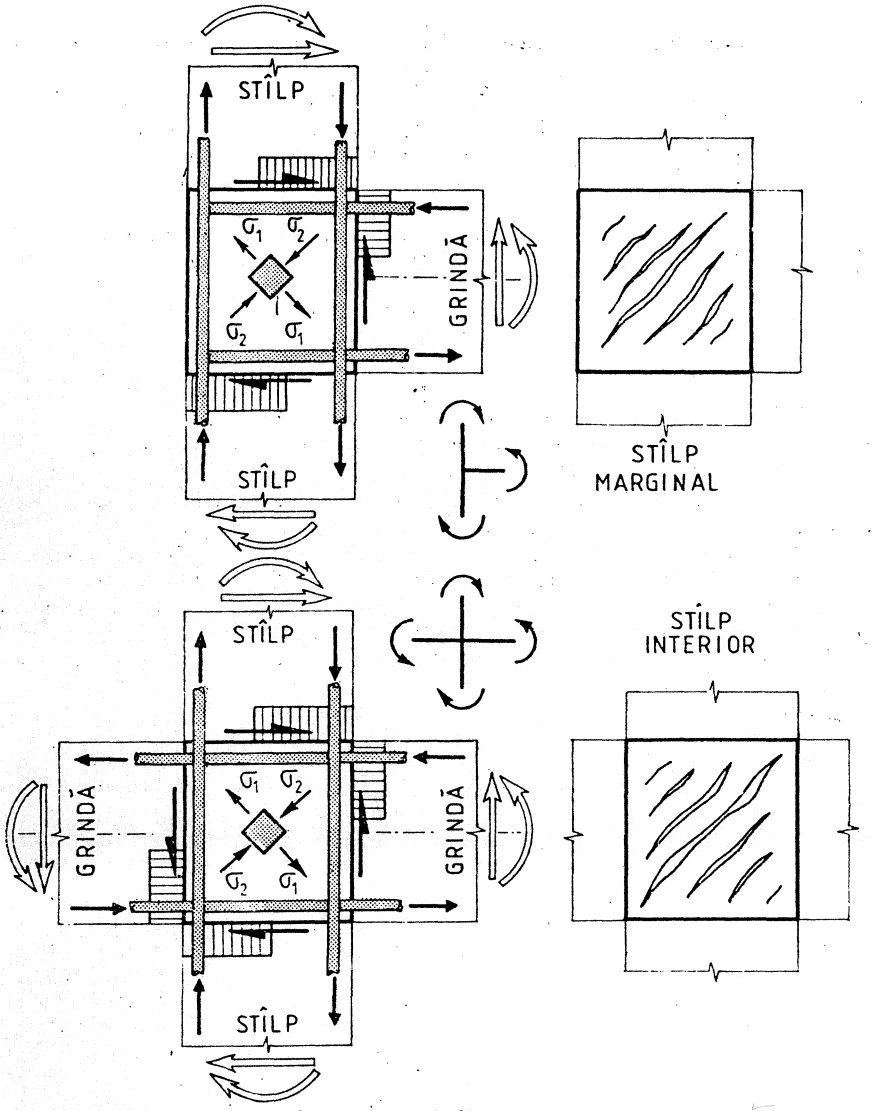


Fig. 9.13

9.5.4. Ductilizarea componentelor structurale ale diafragmelor de B/A

Eforturile predominante din structurile de înălțime medie, formate din diafragme, sînt forțele tăietoare. Din acest motiv, în literatura internațională, diafragmele se mai numesc pereți forfecați (shear walls). Ductilizarea se referă la cele două categorii de componente structurale și anume diafragma (peretele) propriu-zisă și barele de cuplare (buiandrugii). Principiile de ductilizare sînt

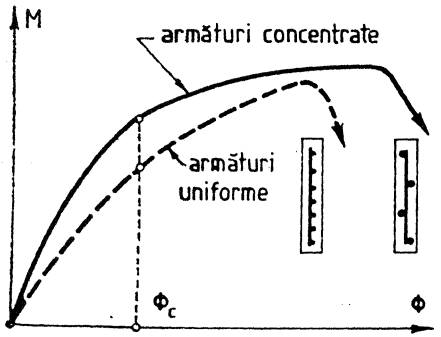


Fig. 9.14

similare cu cele deja descrise anterior, la care se mai fac anumite precizări specifice acestor tipuri de structuri.

● *Ductilizarea pereților* are în vedere evitarea cedărilor casante prin forfecare sau prin distrugerea ancorajelor din fundații. Pentru a realiza un nivel de ductilitate acceptabil este necesar ca diafragmele să atingă stadiul ultim prin deformații postelastice de încovoiere. Îmbunătățirea ductilității se obține prin adoptarea unor secțiuni transversale raționale, confinarea bulbilor cu etrieri, armarea zonelor comprimate și prin modul de dispunere al armăturilor în secțiune. În figura 9.14 este pusă în evidență, prin diagrame $M - \Phi$ diferențierea comportării diafragmelor în cazul cînd secțiunile sînt prevăzute cu armături distribuite uniform sau concentrat.

● *Ductilizarea barelor de cuplare* depinde de raportul dintre deschiderea de calcul l și înălțimea secțiunii h. Cînd raportul l/h este mare, condițiile de ductilizare sînt identice cu cele ale grinzilor dominant încovoiate, iar cînd raportul l/h are valori reduse (cel mult egale cu 2), forțele tăietoare devin dominante. Deoarece ultima situație este mai frecventă, ductilizarea se obține prin confinarea perimetrală și prin dispunerea armăturilor pe direcția diagonalelor (în afara celor longitudinale) în vederea evitării cedărilor la forfecare, cu caracter casant [155].

9.5.5. Concluzii și recomandări cu privire la ductilizarea structurilor

Ductilitatea definită în sensul arătat în § 8.1.7 și 9.5.1 are un caracter clasic, întrucît se admite că încărcările care produc deformarea elementelor structurale variază monoton pînă în stadiul ultim de cedare. Cînd acțiunile sînt alternante (ciclice), specifice celor generate de cutremure, factorul de ductilitate se evaluează destul de aproximativ, dacă se are în vedere multitudinea factorilor care pot interveni, mai ales în cazul unităților structurale complexe. Dintre influențele majore, se menționează dificultatea definirii unei variante de sistem de acțiuni (din posibilitățile nelimitate existente), precum și a precizării coordonatelor în raport cu care se exprimă deplasările structurii. În domeniul postelastic de comportare pe toată durata aplicării acțiunilor ciclice, rigiditatea de ansamblu, precum și capacitatea de rezistență a unităților structurale se degradează (fig. 9.15). De aceea investigațiile teoretice și experimentale, care stau la baza aprecierii cantitative a valorilor factorilor de ductilitate structurali, au un caracter aproximativ și particular.

Structurilor supuse unor acțiuni seismice de intensitate ridicată trebuie să li se asigure o comportare postelastică favorabilă în condițiile conservării destinației inițiale, fără degradări semnificative care să pună în pericol capacitatea de rezistență de ansamblu. De fapt *o unitate structurală reprezintă o asociere deliberată a unor componente constitutive cu proprietăți de rigiditate, rezistență și ductilitate*, definită printr-o configurație geometrică globală, care să corespundă unor destinații și funcționalități prestabilite. De aceea cerințele

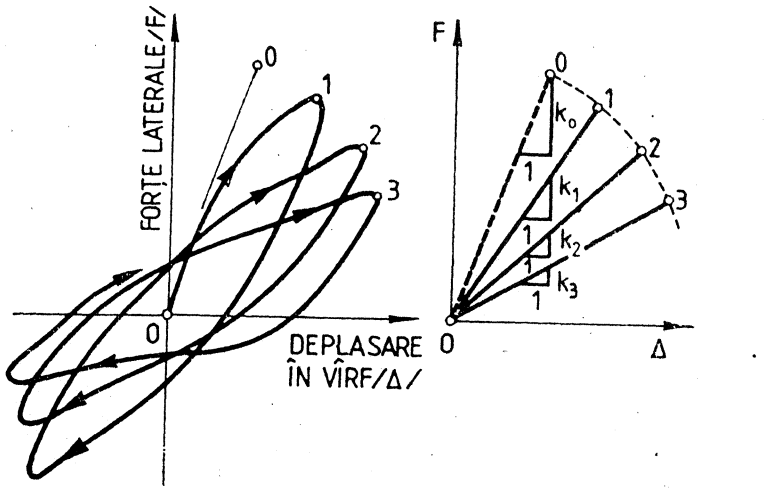


Fig. 9.15

de ductilitate trebuie să fie corelate cu cele de rigiditate și rezistență, astfel încît să rezulte o proiectare optimă de ansamblu. Orice exagerare a uneia din cele trei proprietăți fundamentale, care guvernează comportarea structurilor la acțiunea cutremurelor, atrage după sine deteriorarea celorlalte. Analizate în acest context, rezultă cu claritate diferențierea pronunțată cu privire la comportarea structurilor în cadre sau în diafragme de B/A. În timp ce elementele de rezistență ale cadrelor pot fi ductilizate în asemenea manieră încît să conducă la un mecanism de cedare complex (fig. 9.16, *a*), la structurile

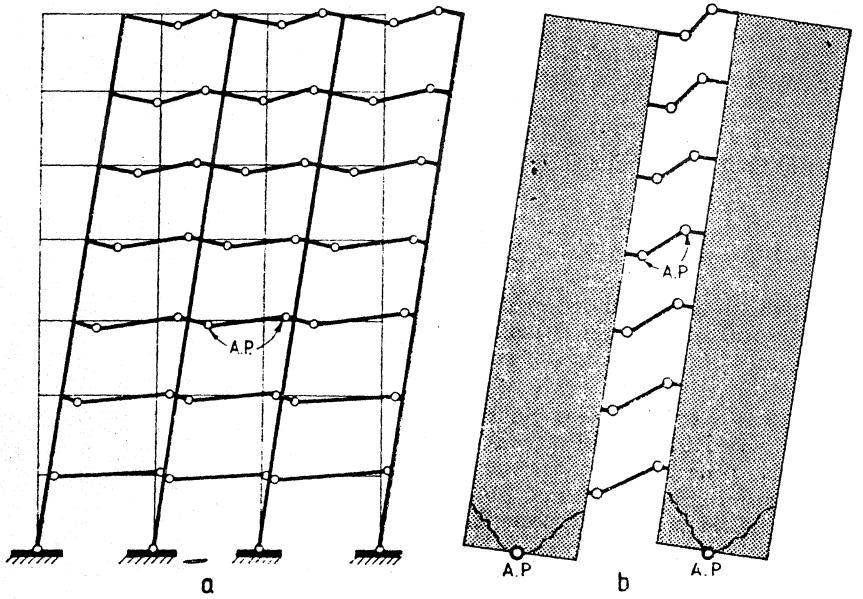


Fig. 9.16

în diafragme (independente sau cuplate) operația de ductilizare și mecanismul de cedare sînt mai limitate, datorită particularităților constructive (fig. 9. 16, *b*).

Structurile din B/A duale sau asociate, de tipul cadrelor diafragmate, în diverse variante constructive, reprezintă soluții adoptate cu scopul de a crea o compensare echilibrată între cerințele de ductilitate, rezistență și rigiditate, în anumite situații bine definite, cum este cazul construcțiilor înalte (de tip flexibil) în care limitarea deplasărilor este impusă.

Unitățile structurale, în general, au *un mecanism de cedare cu atît mai complicat cu cît gradul de nedeterminare statică este mai ridicat*. Asemenea structuri, supuse unor supraîncărcări întîmplătoare, imprevizibile, au proprietatea de a se deforma postelastic și de a redistribui eforturile și deformațiile componentelor structurale.

În concluzie, asigurarea unei comportări satisfăcătoare a unei structuri pe durata unui cutremur puternic se obține prin realizarea unei configurații structurale spațiale ale cărei elemente componente sînt proporționate din punctul de vedere al ductilității, rezistenței și rigidității. Este necesar ca prin concepție și analiză numerică să se definească acele configurații structurale care să contribuie la *complicarea mecanismului de cedare prin crearea unor bariere multiple de ductilitate (linii de apărare ductilă), prin dirijarea apariției articulațiilor plastice în secțiunile de capăt ale componentelor orizontale și degradarea elementelor nestructurale*. Condiția cu caracter fundamental de proiectare antiseismică constă în aceea că *orice plan posibil de avariere trebuie să intersecteze secțiuni de armătură rezultate prin concepție și calcul și nu întîmplător*.

La *proiectarea structurilor rezistente la cutremure*, în funcție de intensitatea acțiunii seismice și importanța construcției, se au în vedere *nivele de ductilitate diferențiate*. Principiile care stau la baza realizării unei structuri ductile, expuse pe parcursul acestui paragraf, vor fi sintetizate prin cîteva recomandări cu caracter general.

● Configurația structurală și dispunerea componentelor constitutive trebuie să se supună unor legi geometrice simple și clare (de preferință simetrice), evitîndu-se discontinuități de orice natură atît în plan orizontal, cît și pe verticală.

● Cerința de ductilitate, precum și proporționarea elementelor structurale, va fi acordată cu limitările impuse asupra rezistenței și rigidității. În asemenea condiții, optimizarea ductilității structurale reprezintă practic o imposibilitate.

● Ameliorarea proprietăților de deformare postelastică, în scopul obținerii unei ductilități ridicate, poate rezulta printr-o dimensionare corectă a armăturilor și utilizarea unor oțeluri cu caracteristici plastice.

● Pentru a preveni cedări cu caracter fragil (casant), generate de forțe tăietoare sau forțe axiale de compresiune, se vor modera eforturile unitare de forfecare și de compresiune printr-o dimensionare rațională a secțiunilor transversale.

● Apariția articulațiilor plastice va fi dirijată spre elementele orizontale de rezistență cu ductilitate mai ridicată, evitîndu-se mecanisme de cedare periculoase prin formarea articulațiilor plastice la capetele stîlpilor (mecanisme fragile).

În această situație se impune condiția

$$\Sigma M_{ultim.\,st} > \Sigma M_{ultim.\,gr}$$

prin care se stimulează cedările cu caracter ductil din încovoiere.

● Dacă coeficientul de armare din zona întinsă este ridicat (din motive de rezistență și rigiditate), ductilizarea se poate obține prin armarea corespunzătoare a zonei comprimate. Armăturile comprimate se vor confina cu etrieri închiși pentru a evita flambajul local.

● Confinarea secțiunilor transversale contribuie la majorarea ductilității elementelor încovoiate și previne cedările casante produse de eforturile de forfecare și compresiune. Confinarea grinzilor se realizează cu etrieri rectangulari închiși, iar a stîlpilor cu etrieri închiși simpli și dubli sau cu spirale continue cînd forța axială N are valoarea cuprinsă între 0,4 și 1,0 din forța axială N_b, corespunzătoare punctului de balans. Este necesară o confinare mai severă în zonele în care este posibilă apariția rotirilor plastice, pentru a conferi masei de beton proprietăți triaxiale.

● Conexiunile vor fi astfel dimensionate, încît să permită transferul mutual al deformațiilor între componentele conectate și să dirijeze apariția articulațiilor plastice la extremitățile elementelor orizontale de rezistență.

● Ancorajele și înnădirile vor fi practicate în zonele în care eforturile secționale au valori minime, zone în care etrierii se vor îndesi, evitîndu-se astfel ruperi casante evitîndu-se concentratori inerțiali, disipativi și elastici.

● Structurile în ansamblu nu trebuie să conțină sensibilități și vulnerabilități de orice natură, în special în ceea ce privește distribuția rigidităților și capacităților de rezistență.

Principalele verificări care se impun în cazul proiectării structurilor în *conceptul tripartit ductilitate-rezistență-rigiditate* sînt următoarele:

— *verificarea rigidității* prin deplasări relative de nivel sau prin deplasări absolute ($\Delta_{efectiv} < \Delta_{admis}$);

— *verificarea rezistenței* prin momente capabile sau în stadiul ultim;

— *verificarea ductilității* (cerinței de ductilitate);

— *verificarea efectelor de ordinul II*, generate de momente $P-\Delta$;

— *verificarea la colaps* prin admiterea unui mecanism de cedare convenabil.

Influența favorabilă a structurilor ductile a fost constatată cu ocazia multor cutremure puternice. Pentru structurile comune, de înălțime intermediară, cărora li se impun și alte condiții restrictive de rezistență și rigiditate, se obțin factori medii de ductilitate $\mu_{med} = 2 \ldots 3$. În aceste condiții, în conformitate cu relațiile date în tabelul 8.1, rezultă o reducere notabilă a accelerațiilor orizontale cu circa 40%, în timp ce creșterea deplasărilor laterale cu 15 ... 20% se situează în limite admise.

Se constată deci că răspunsul la acțiuni seismice depinde de rigiditatea de ansamblu a structurii, întrucît intervin deformațiile cu caracter inelastic, așa cum s-a arătat în § 9.5.1. Prin urmare *forțele seismice echivalente la structurile cu comportare ductilă sînt mult mai reduse decît cele corespunzătoare structurilor cu comportare pur elastică*.

Metodele de proiectare postelastică, bazate pe starea limită de formare a mecanismelor ultime de cedare, implică apariția articulațiilor plastice ductile în secțiunile critice.

În final, se face observația că *absolutizarea criteriului ductilizării* unităților structurale poate deveni periculoasă dacă nu se ține seama de toți factorii obiectivi care guvernează răspunsul și comportarea în domeniul elastic și inelastic, ale tuturor elementelor de rezistență la acțiuni seismice puternice. În anumite situații este posibil ca ductilizarea exagerată a unor componente structurale să genereze, prin incursiuni postelastice bruște și extinse, deformații remanente și degradări locale (în anumite zone sensibile) care ar putea periclita integritatea construcției.

9.6. PRINCIPII DE BAZĂ ALE PROIECTĂRII STRUCTURILOR. NORMAREA ACȚIUNILOR SEISMICE

9.6.1. **Criterii generale de proiectare**

Proiectarea antiseismică a structurilor reprezintă un proces de creație extrem de complex, care depinde de numeroase și importante variabile. Pe lîngă aspectele de ordin științific și tehnic care intervin, proiectarea și realizarea construcțiilor situate în zone seismice au largi implicații sociale și economice.

Criteriile proiectării antiseismice preliminare au în vedere funcționalitatea, nivelul de asigurare impus, cerințele de rigiditate, rezistență și ductilitate ale componentelor structurale, precum și tehnologiile de execuție. Datele inițiale cu privire la caracteristicile cutremurelor așteptate și descrierea condițiilor locale de teren, se obțin pe baza datelor furnizate de geologi, geofizicieni, geotehnicieni și seismologi. Prin coroborarea tuturor informațiilor se stabilesc: configurația structurală, componentele structurale și nestructurale, materialul ce urmează a fi folosit, concepția de proiectare, metodele de analiză, precum și detaliile de execuție.

La alegerea soluției unității structurale se vor avea în vedere următorii parametri:

— destinația, importanța și funcționalitatea;
— concepțiile arhitecturale;
— criteriile economice;
— materialele ce urmează a fi utilizate;
— datele inițiale ambientale (seismicitatea zonei și condițiile locale de teren);
— sistemul structural (componente și conexiuni);
— nivelul de asigurare și siguranța în exploatare;
— posibilități de execuție.

Una din cerințele fundamentale cu privire la configurația geometrică globală a structurii o reprezintă forma în plan a construcției, care trebuie să fie cît mai simplă. De aceea se recomandă să se evite formele întîmplătoare ca cele reprezentate în figura 9.17 care pot genera efecte suplimentare defavorabile. Pentru a preveni apariția unor fenomene complicate, cum ar fi cele produse de torsiunea generală, precum și concentrări de eforturi în intersecții, forma în plan trebuie să se supună regulilor geometrice și elastice de geometrie. În figura 9.18 sînt prezentate cîteva posibilități de organizare în plan a elementelor structurale, pentru o formă particulară de soluție constructivă.

În figura 9.1 au fost prezentate sintetic principalele etape cu privire la elaborarea finală a proiectelor de execuție ale structurilor situate în zone seismice. De asemenea, în § 9.1 ... 9.5 au fost abordate principalele aspecte cu privire la conceptul dinamic de proiectare și realizare a construcțiilor antiseismice.

Criteriile principale de verificare și control în *analiza elastică preliminară* constau în evaluarea următorilor parametri:

— perioada fundamentală de vibrație care stă la baza acordării inițiale între caracteristicile dinamice ale structurii și compoziția spectrală a mișcării seismice (vezi § 9.4);
— capacitatea de amortizare internă de tip liniar-vîscos;
— cerințele de rigiditate, rezistență și ductilitate;

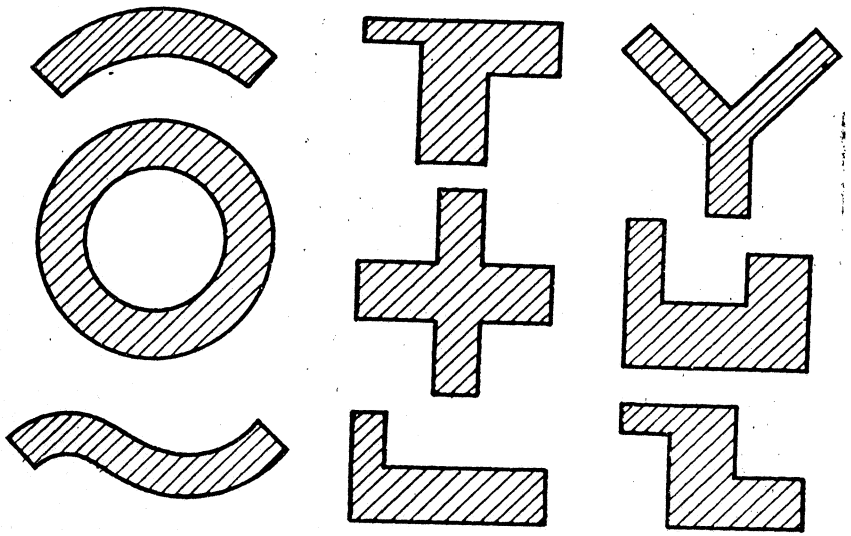


Fig. 9.17

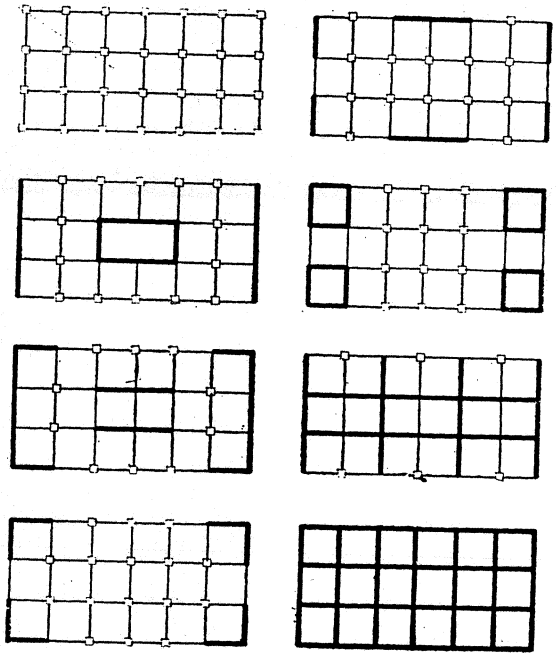


Fig. 9.18

— deplasările laterale relative de nivel maxime și limitarea acestora;
— identificarea zonelor critice pe toate direcțiile;
— efectul $P-\Delta$, care generează momente suplimentare de ordinul II;
— răspunsul seismic estimat prin forțe seismice de nivel sau forțe tăietoare de bază (v. cap. 8).

Răspunsul liniar este specific analizelor seismice deoarece acțiunea seismică poate fi caracterizată global tot printr-un model liniar de exprimare și anume prin spectre Fourier sau spectre seismice. De altfel, proporționarea globală a configurațiilor unităților structurale rezultă din variația valorilor și vectorilor proprii care definesc dimensionarea de ansamblu în concept dinamic liniar.

Comportarea reală însă, a oricărui sistem structural, pune în evidență incursiuni postelastice cu capacitate ridicată de absorbție a energiei induse de mișcarea seismică. În stadiul de deformare postelastică, răspunsul și comportarea structurilor depind de caracteristicile inițiale de definire (inerțiale, disipative și elastice) specifice domeniului elastic, precum și de proprietățile inelastice de ductilitate și absorbție energetică ale componentelor structurale și nestructurale.

În funcție de particularitățile sistemelor structurale analizate (în cadre, în diafragme sau duale) este necesară o diversificare netă atît a gradului de asigurare, cît și a nivelului de ductilitate, în sensul posibilităților de adaptare postelastică, în raport cu eforturile predominante din componentele structurale. De altfel, analiza elastică-liniară are un caracter mai mult informativ asupra deplasărilor laterale efective care se manifestă pe durata unui cutremur de mare intensitate.

Prin urmare, elaboratorul proiectului trebuie să fie conștient de rezervele postelastice ale componentelor și conexiunilor structurale, pe care este obligat să le valorifice în vederea ridicării nivelului de protecție în cazul cutremurelor puternice. Absorbția și disiparea energetică prin deformații postelastice, cu sau fără degradări semnificative ale elementelor de rezistență, în conformitate cu scenarii premeditate, reprezintă garanția unei comportări acceptabile a unităților structurale pe timpul cutremurelor puternice. De aceea, este necesară o dimensionare judicioasă a caracteristicilor de ductilitate care să confere structurii mai multe *bariere ductile de apărare* în procesul de deformare postdrastică și realizarea unui *mecanism ultim optimal*. Existența unui număr mare de incertitudini, cu privire la majoritatea factorilor care intervin în comportarea construcțiilor la cutremure severe (vezi § 9.9) trebuie compensată prin măsuri suplimentare de asigurare (rezistență inițială ridicată și ductilitate cît mai mare).

În proiectarea preliminară a unei structuri, se pune problema alegerii sistemelor structurale (cadre, diafragme sau duale-mixte), în funcție de opțiunea între *sisteme de tip rigid* sau *sisteme de tip flexibil*. Există o tendință cu caracter oarecum general pentru adoptarea sistemelor rigide deoarece recentele cutremure au arătat că reparațiile elementelor nestructurale au costat mai mult decît intervențiile la elementele structurale atunci cînd sistemul a fost de tip flexibil (cadre din B/A). Așa-numitele elemente „nestructurale" au o influență decisivă în modificarea caracteristicilor dinamice prevăzute inițial și implicit a răspunsului structurii rezultat din analiza numerică. Prezența pereților de închidere sau de compartimentare, încorporați structurilor flexibile în cadre de B/A, contribuie la reducerea perioadei fundamentale de vibrație (datorită rigidizărilor suplimentare introduse), precum și la apariția unor efecte defavorabile în stîlpii de la parter și etajele inferioare. În același timp, ruperile cu caracter casant ale pereților încorporați structurilor pot deveni

extrem de periculoase. Pentru a evita influența întîmplătoare a pereților, este necesar ca *pereții să fie integrați* proprietăților structurale, sau *să fie izolați* complet de sistem prin măsuri constructive corespunzătoare. În asemenea condiții trebuie avută în vedere, încă din faza preliminară a proiectării, acordarea caracteristicilor dinamice ale structurii cu configurația specifică a spectrelor seismice (vezi § 9.4).

Ultima fază a procesului de proiectare, de mare importanță practică, o reprezintă elaborarea detaliilor de execuție ale elementelor de rezistență și ale conexiunilor, prin asamblarea cărora trebuie să se asigure o comportare spațială a unităților structurale.

Metodele de analiză numerică utilizate în mod curent în proiectarea antiseismică a structurilor sînt de trei categorii, după cum s-a mai menționat la începutul capitolului 8.

● *Metoda forțelor statice echivalente.* Metoda este caracteristică regulamentelor sau normativelor de protecție antiseismică în care se specifică de obicei forța tăietoare de bază, prin intermediul coeficienților seismici stabiliți în funcție de intensitatea cutremurului, proprietățile dinamice ale structurii și condițiile locale de teren.

● *Metoda analizei modale.* În această metodă se exprimă răspunsul seismic liniar prin intermediul modurilor proprii de vibrație (vezi § 8.2). Răspunsul modal se determină în funcție de spectrele seismice de răspuns corespunzătoare unui anumit amplasament. Răspunsul total maxim, care poate fi redus datorită proprietăților ductile și disipative ale structurii, se obține prin superpoziția statistică a răspunsurilor modale maxime.

● *Metoda integrării directe.* Prin integrarea numerică a ecuațiilor de mișcare se poate obține variația răspunsului seismic în timpul istoric (time history) în care se manifestă acțiunea seismică. Deoarece este o metodă de integrare „pas cu pas" (step-by-step), în care accelerațiile efective sînt discretizate pe intervale de timp incrementale (vezi § 8.4), proprietățile structurilor pot fi alterate prin modificarea succesivă (în fiecare pas) a rigidităților elementelor structurale. În acest fel pot fi identificate articulațiile plastice din secțiunile critice, precum și mecanismele de cedare (ultime). Complexitatea rezolvării și timpul de calcul cresc destul de mult dacă se modifică în fiecare pas caracteristicile postelastice, prin degradarea curbelor histeretice ale componentelor și conexiunilor, datorită depășirii limitei elastice.

Valorile forțelor seismice, obținute prin aplicarea analizei neliniare de tip „time history", sînt în general mai mari decît cele obținute prin metoda forțelor statice echivalente sau prin metoda analizei modale.

Analiza răspunsului seismic neliniar trebuie abordată cu multă precauție întrucît caracteristicile inelastice ale materialelor și componentelor structurale sînt supuse, în general, unui mare număr de incertitudini (vezi § 9.9).

9.6.2. Principii de normare ale acțiunilor seismice

Normativele, codurile, standardele sau *regulamentele* cu privire la protecția antiseismică a structurilor sînt acte convenționale, au caracter limitat și tranzitoriu, fiind supuse periodic ameliorării și perfecționării pe măsura acumulării de noi informații de ordin teoretic și practic.

Normele seismice conțin particularități și diferențieri specifice fiecărei țări în ceea ce privește:
— activitatea seismică a teritoriului, la nivel micro/macroseismic;

— condițiile geologice globale și locale;
— sistemele structurale adoptate;
— tehnologiile de execuție și calitățile materialelor folosite;
— condițiile economice.

Normativele prescriu atît modul de determinare al acțiunilor laterale convenționale, numite *forțe seismice*, cît și indicații referitoare la concepția de alcătuire constructivă a elementelor de rezistență și unităților structurale. Forțele seismice prevăzute în normative trebuie să reflecte cît mai corect efectul real pe care îl poate avea o mișcare seismică viitoare (așteptată) asupra unei structuri, precum și majoritatea fenomenelor potențiale care ar putea contribui la eventuale degradări severe, avarii sau prăbușiri. O construcție, indiferent de destinație, trebuie să fie astfel concepută, proiectată și executată încît un cutremur puternic să nu pună în pericol viețile și bunurile oamenilor, să nu producă daune materiale economiei naționale, să nu întrerupă procesele tehnologice cu funcționare continuă și să nu provoace avarii structurale iremediabile.

Înaintea aplicării dispozițiilor prevăzute în actele normative, trebuie să se asigure construcțiilor, încă din faza proiectării preliminare, o concepție structurală unitară în care să predomine simplitatea și claritatea în tratarea configurației geometrice și elastice, evitîndu-se sofisticările de orice natură. Dacă o structură nu este prin concepție astfel proiectată încît să se garanteze o comportare satisfăcătoare (cu degradări minime), analiza numerică, indiferent de metodele utilizate, devine convențională, lipsită de importanță și chiar iluzorie. De aceea, prevederile normativelor nu trebuie să fie în mod dogmatic absolutizate, ci interpretate prin prisma spiritului creator al inginerului de concepție. O normă de calcul nu va suplini niciodată pregătirea teoretică și practică fundamentală a proiectantului și nici seriozitatea și responsabilitatea tehnică a executantului.

În general, normativele seismice pun la dispoziția proiectantului formule simple (uneori chiar simpliste), care permit evaluarea informativă a forțelor seismice echivalente (cu caracter convențional) pe baza analizei liniare a răspunsului sistemelor cu 1GLD și nGLD (vezi § 8.1 și 8.2). Întrucît relațiile de calcul cuprinse în normativele de proiectare antiseismică permit efectuarea unei analize seismice exclusiv elastice, este necesar să se facă o verificare a comportării postelastice a secțiunilor critice, utilizînd metoda rezistenței ultime. În prezent, normativele internaționale nu prevăd în mod explicit realizarea unui *nivel de ductilitate* necesar formării și dirijării articulațiilor plastice, pînă la apariția mecanismului de cedare, ci numai recomandări și detalii constructive cu scopul de a contribui la asigurarea unei ductilizări corespunzătoare a componentelor structurale (în funcție de eforturile secționale predominante).

În sistemul internațional de normative privind protecția antiseismică a structurilor, sînt precizate următoarele date principale:

- Seismicitatea teritoriului, prin hărți de macrozonare seismică, prin care se definesc accelerațiile maxime, echivalente.
- *Încărcările (acțiunile) seismice* și metodele de analiză (elastice și inelastice).
- *Influența condițiilor locale de teren* prin coeficienți de amplificare sau atenuare în funcție de natura terenului.
- *Factori de siguranță* (nivel de asigurare) în funcție de destinația și importanța relativă a construcției, tehnologiile și metodele specifice de execuție, proprietățile materialelor, perioada de revenire a cutremurelor puternice și potențialul economic al țării respective.

Tehnicile de execuție folosite și detaliile constructive trebuie să asigure transmisibilitatea forțelor seismice (transferul energiei de deformație) la toate componentele structurale, de la teren pînă la ultimul nivel al structurii.

Parametrii de bază care definesc acțiunile seismice depind de interacțiunea existentă între *cutremur* (sursă), *teren* și *structură* pe durata mișcării (fig. 9.19). În acest sens, fiecare din aceste trei componente intervine printr-o diversitate de influențe care se manifestă direct asupra modului de evaluare cantitativă a acțiunii seismice. Aceste influențe, care se descriu în continuare, nu pot fi integral cuprinse într-o relație simplă specifică normativelor.

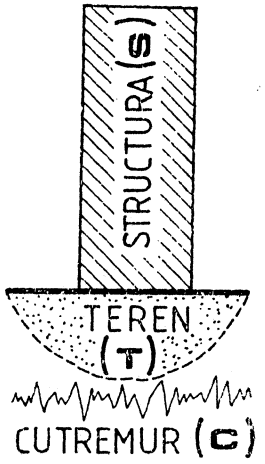


Fig. 9.19

- *Cutremurul* **C** influențează prin: mecanismul de focar (caracterizat geometric, cinematic și dinamic), intensitatea mișcării (MM, MSK, magnitudine sau accelerații maxime), distanța epicentrală (față de amplasamentul considerat), directivitatea undelor seismice, durata semnificativă, caracteristicile geomorfologice ale mediului de propagare, compoziția spectrală (asociată condițiilor locale de teren), perioada de revenire etc.
- *Terenul* **T** participă prin: caracteristicile geotehnice și geologice locale, poziția rocii de bază (grosimea depozitului superficial), vitezele de propagare ale undelor secundare (transversale de forfecare), perioadele predominante, proprietățile de amplificare, focalizare, filtrare dinamică și de radiație etc.
- *Structura* **S** intervine prin: tipul sistemului structural, caracteristicile inițiale de definire (inerțiale, disipative și elastice), nivelul de ductilitate, capacitatea de rezistență (la efectul combinat al acțiunilor gravitaționale și orizontale), sensibilitățile structurale (grad de nedeterminare statică, asimetrii geometrice, efecte torsionale, elemente scurte puternic comprimate sau forfecate, elemente captive etc.), calitatea materialelor, tehnologii de execuție, prezența componentelor nestructurale, vîrsta construcției etc.

Este evident că, într-o reglementare de tipul unui standard, o cantitate unică, cum este forța seismică, nu poate fi exprimată printr-o multitudine de factori ca cei descriși anterior. De aceea, în urma selecționării celor mai reprezentativi factori, prin care se introduc, de obicei, influențe complexe, se obțin formule de calcul suficient de simple.

Majoritatea normativelor internaționale definesc *forțele seismice static echivalente*, pe baza metodei analizei modale. Așa cum s-a demonstrat în § 8.2.3, *răspunsul modal maxim* al unui sistem cu nGLD poate fi exprimat prin intermediul unui sistem dinamic echivalent cu 1GLD (8.96), utilizînd spectrele seismice de răspuns. De aceea, se va defini mai întîi forța seismică de calcul pentru sistemele cu 1GLD, pornind de la relația (8.22):

$$F_{max} = mPSA \simeq mSA[\ddot{u}_0, T, \nu], \tag{9.1}$$

unde $m = Q/g$, iar Q este încărcarea gravitațională corespunzătoare. Relația (9.1) mai poate fi scrisă și astfel

$$F_{max} = c_{max} Q,$$

în care

$$c_{max} = \frac{SA[\ddot{u}_0, T, \nu]}{g}, \tag{9.2}$$

reprezintă *coeficientul seismic maxim* corespunzător acțiunii seismice efective.

Analiza numerică, precizată prin reglementările din standarde, se efectuează exclusiv în domeniul elastic de comportare al structurilor. Dacă se ține seama de rezervele postelatice structurale, precum și de faptul că o cantitate importantă din energia indusă de mișcarea seismică este consumată prin proprietățile histeretice și deformațiile ductile din secțiunile critice (în care se formează articulații plastice), *forța seismică de calcul* (cu caracter convențional) va fi inferioară celei maxime efective, adică

$$F_{calcul} = c_{calcul} Q, \quad c_{calcul} < c_{max},$$

sau printr-o exprimare mai simplă

$$F = cQ, \tag{9.3}$$

unde

$$c = \frac{c_{max}}{R} = c_R \cdot c_{max}, \quad c_R = \frac{1}{R} \tag{9.4}$$

este *coeficientul seismic de calcul* (normat). Cu R sau c_R s-a notat *factorul de reducere al răspunsului* care depinde de tipul sistemului structural, precum și de capacitatea de amortizare, deformare și adaptare postelastică (ductilitate). Pentru construcțiile curente (obișnuite), valorile medii sînt cuprinse în intervalul $R = 2 \ldots 6$ [234].

Avînd în vedere relațiile (9.2) și (9.4), precum și figura 9.20, *expresia coeficientului seismic de calcul* c va avea forma:

$$c = c_0 \cdot C(T) \cdot c_R \tag{9.5}$$

Exprimarea dată prin relația (9.5) clarifică și justifică în același timp motivele pentru care *forțele seismice de calcul normate* sînt inferioare celor efective corespunzătoare unui cutremur așteptat. Din figura 9.20 rezultă semnificația coeficienților c_0 și $C(T)$ și anume

$$c_0 = \frac{\ddot{u}_{0,max}}{g} \tag{9.6}$$

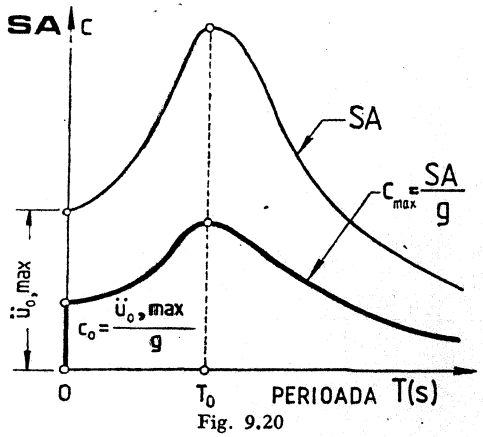


Fig. 9.20

reprezintă *coeficientul de intensitate seismică de bază*, corespunzător unei structuri perfect rigide pentru care $T = 0$ (coeficient similar scării de intensitate MM), iar $C(T)$ este un *coeficient spectral normalizat* deoarece $C\ (T=0)=1$. Acest ultim coeficient, cu caracter dinamic, pune în evidență influența perioadei proprii asupra răspunsului seismic, depinzînd în același timp și de condițiile locale ale terenului din amplasament.

Pentru evaluarea directă a variației coeficienților spectrali normalizați, în lucrarea [111] s-au

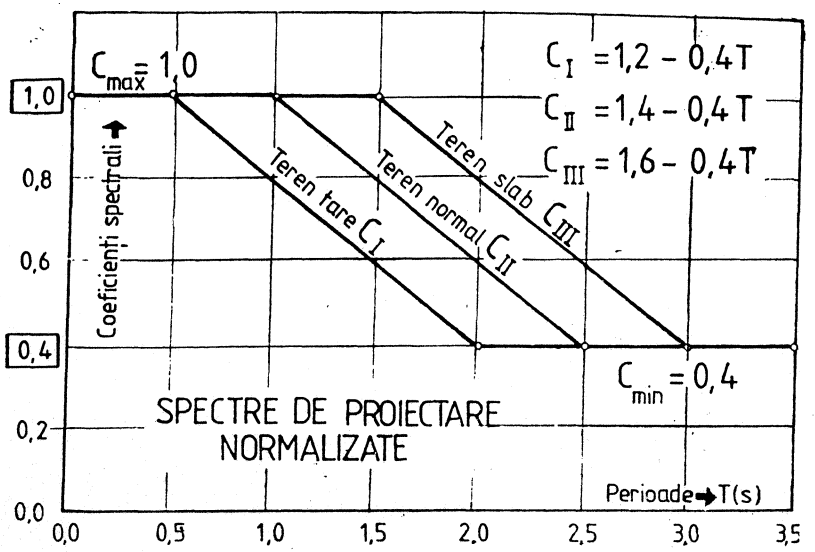


Fig. 9.21

propus *spectrele normalizate de proiectare* (corespunzătoare diferitelor condiții de teren) reprezentate în figura 9.21. S-a considerat că variația liniară a coeficientului $C(T)$ în intervalul perioadelor medii este acceptabilă datorită caracterului aleatoriu, atît al mișcării sesmice, cît și al naturii terenului de fundație. De asemenea, această simplificare contribuie la îmbunătățirea nivelului de asigurare al structurilor cu perioade intermediare. Din același motiv s-a introdus limita $C_{max}/C_{min} = 2,5$. Limitele propuse pentru variația spectrului normalizat de proiectare rezultă prin operații specifice de calibrare.

În cazul sistemelor cu nGLD, se poate determina forța tăietoare de bază (FTB), corespunzătoare modului i, folosind relația (9.3) în care va interveni *încărcarea gravitațională echivalentă sau modală* (8.92)

$$F_i = c_i^* Q_{e,i} = c_i^* \varepsilon_i Q = c_i Q, \tag{9.7}$$

deoarece

$$Q_{e,i} = \varepsilon_i Q, \quad Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k.$$

Așa cum a fost definit și în § 8.2.3, c_i reprezintă *coeficientul seismic al FTB (modal)*, avînd expresia

$$c_i = c_0 \cdot C(T_i) \cdot c_R \cdot \varepsilon_i, \tag{9.8}$$

în care intervine coeficientul de echivalență modal ε_i (8.95). Cunoscînd FTB (modală), rezultă forțele seismice de nivel (modale) FSN, prin intermediul factorilor de distribuție (8.82).

Trebuie subliniat că din punct de vedere practic, numai *coeficientul seismic fundamental al FTB* are semnificație, deoarece în acest caz FSN sînt de același sens, adică

$$c_1 = F_1/Q = c_0 \cdot C(T_1) \cdot c_R \cdot \varepsilon_1. \tag{9.9}$$

Din acest motiv, în majoritatea normelor internaționale se prevede delimitarea $c_{1,\,min} \leqslant c_1 \leqslant c_{1,\,max}$, care rezultă din condiția de siguranță ($c_{1,\,min}$) și din condiția de calibrare ($c_{1,\,max}$).

Normele internaționale sînt diferențiate în funcție de variația coeficientului spectral $C(T)$ și modul în care sînt calibrați ceilalți coeficienți. Importanța construcției, precum și influența interacțiunii cu terenul, intervin în unele standarde prin coeficienți expliciți, iar în altele, prin prevederea unor condiții suplimentare stipulate prin reglementări speciale.

Deplasările relative dintre două niveluri consecutive k și j, care se limitează prin valori admise exprimate în funcție de înălțimea etajului h_{jk}, se obțin cu relația (10.1)

$$\Delta_{kj} = x_k - x_j, \tag{9.10}$$

iar deplasările absolute maxime de la nivelurile k și j se determină astfel

$$x_k \simeq R x_{k,\,e}, \qquad x_j \simeq R x_{k,\,e}.$$

S-au notat cu $x_{k,\,e}$ și $x_{j,\,e}$ deplasările laterale rezultate printr-o analiză elastică. Relația (9.10) permite calculul deplasărilor relative de nivel maxime (ținînd seama de comportarea postelastică), pe baza cărora se face verificarea la starea limită de deformare a structurii. Deplasările relative maxime admise Δ_a diferă de la o structură la alta și, de asemenea, de la o normă la alta. Astfel, ATC [234] prescrie pentru deplasarea relativă maximă *postelastică* valorile

$$\Delta_{a,\,pe} = (0{,}01 \ldots 0{,}015)\, h_{jk},$$

iar CEB [237] pentru deplasarea relativă maximă *elastică*

$$\Delta_{a,\,e} \simeq 0{,}0035\, h_{jk}.$$

Deplasarea laterală maximă corespunzătoare modului fundamental de vibrație poate fi calculată cu suficientă exactitate dacă se utilizează relațiile (8.64), (8.67), (8.69), (8.98) și (9.9) și dacă se admite că $A_1 = P_1^*/M_1^* \simeq 1{,}41$ (8.67). Se obțin astfel pentru deplasarea maximă *elastică* sau *postelastică* (în cm) următoarele formule directe:

$$x_{max,\,e} = 35 T_1^2 [c_0 \cdot C(T) \cdot c_R] = 35 T_1^2 \frac{c_1}{\varepsilon_1}, \tag{9.11}$$

$$x_{max,\,pe} = 35 T_1^2 [c_0 \cdot C(T)] = 35 T_1^2 \frac{c_1}{c_R \varepsilon_1}. \tag{9.12}$$

Conceptul de evaluare a forțelor) seismice din *normativul românesc* P. 100—81 se poate încadra în formularea cu caracter general dată anterior. Astfel *FTB* modală se obține cu o formulă identică cu (9.7), iar coeficienții care intervin în (9.8) diferă ca notații și au semnificațiile următoare

$K_s = c_0$ reprezintă coeficientul de intensitate seismică;
$\beta(T_i) = C(T_i)$ — coeficientul dinamic (cu caracter modal);
$\psi = c_R$ — coeficientul de reducere a răspunsului seismic.

Deoarece în componenta N-S a mișcării seismice înregistrată la 4 martie 1977 conține accelerația maximă $\ddot{u}_{0,\,max} \simeq 0{,}2$ g, s-a admis pentru coeficientul de intensitate seismică valoarea $K_s = 0{,}20$ (9.6), ceea ce corespunde gradului 8 de protecție antiseismică (v. harta de macrozonare din fig. 7.38). Coeficienții de reducere au valori $\psi = 0{,}15 \ldots 0{,}35$ în funcție de tipul sistemului structural.

Față de vechiul normativ P. 13—70, valabil pînă la cutremurul din 4 martie 1977, în actualul normativ s-a produs o modificare calitativă substanțială a configurației coeficientului β. Variația coeficientului β, valabil în norma-

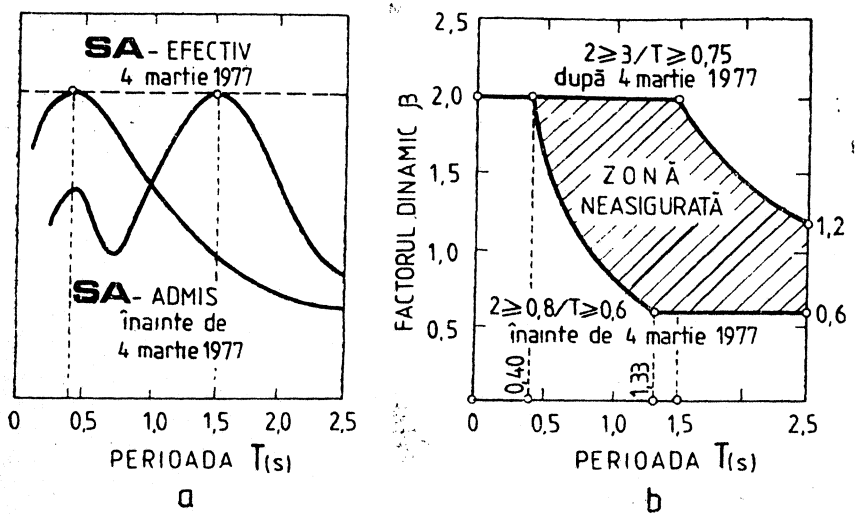


Fig. 9.22

tivul P. 13—70, s-a bazat pe un spectru al accelerațiilor absolute SA admis (fig. 9,22, *a*), corespunzător unui cutremur așteptat de tip californian (cu perioade predominante joase). Mișcarea seismică înregistrată la 4 martie 1977 (în stația INCERC — București) a pus în evidență o compoziție spectrală caracterizată prin perioade lungi, care a condus la un SA efectiv cu configurație contradictorie (fig. 9.22, *a*). De aceea, coeficienții dinamici β (P. 13—70) și β (P. 100—81) au variații atît de diferite, așa cum rezultă din figura 9,22, *b*. De altfel, prin această inadvertență dintre SA așteptat și SA efectiv, se poate justifica în mare măsură (făcînd abstracție de intensitatea ridicată a cutremurului), diferențierea netă a degradărilor observate la construcțiile rigide și la cele semirigide sau flexibile situate în Municipiul București.

În general, în reglementările internaționale, normarea se face direct prin intermediul *FSN* (8.75) sau indirect prin *FTB* (8.77), (8.81).

9.6.3. Recomandări cu caracter general asupra protecției antiseismice a structurilor

Practica actuală, cu privire la concepția și proiectarea structurilor antiseismice, este destul de diferită în funcție de tipul sistemului structural adoptat. Proiectarea construcțiilor curente, poate fi guvernată în mod corespunzător prin normative de protecție antiseismică ale căror cerințe minime pot să contribuie la evitarea avariilor importante în timpul cutermurelor puternice. În această privință, proprietățile și capacitatea postelastică de deformație au un rol decisiv. Din cele expuse anterior, rezultă că o structură ductilă poate supraviețui, prin incursiuni postelastice și deformații mari (consumatoare de energie indusă), în condiții satisfăcătoare pe durata unui cutremur. În schimb, o structură fragilă (casantă) este supusă în permanență la riscul unei prăbușiri. Deoarece cerințele unui normativ se rezumă la specificarea analizelor inginerești minime, este necesar să se acorde o atenție specială

relației forță-deplasare și mecanismului de cedare posibil pe timpul istoric al procesului de degradare structurală.

Este necesar ca în proiectare să se facă o distincție netă între componentele structurale și componentele nestructurale. Datorită interacțiunii existente între aceste componente, rezultă modificări esențiale în ceea ce privește răspunsul seismic, cu consecințe directe asupra capacității de rezistență și de deformare (inclusiv asupra deplasărilor laterale).

Pentru a preveni efectele distructive, necontrolabile, ale structurilor supuse la cutremure de mare intensitate, *se recomandă unele măsuri cu caracter general* ce urmează a fi luate încă din faza inițială de concepție și proiectare.

- Se vor evita pe cît posibil *discontinuități* cu caracter *inerțial, disipativ* și *elastic*.
- *Configurația geometrică* trebuie să fie cît mai simplă și clară, preferîndu-se forme simetrice în plan și în elevație, fără retrageri. Se va urmări ca centrele de greutate *C.G* de la fiecare nivel, să fie cît mai apropiate de centrele de rigiditate *C.R*, pentru a evita *apariția fenomenelor de torsiune* ale căror efecte defavorabile se manifestă în special asupra stîlpilor marginali și de colț. În situația în care există un cuplaj puternic între mișcările de translație (pe două direcții ortogonale) și mișcarea de torsiune (rotație) este necesară o analiză tridimensională (spațială) a răspunsului seismic.
- Este necesar ca unitățile structurale (în care sînt incluse și elementele nestructurale) să fie cît mai *ușoare*. Prin reducerea maselor proprii, rezultă forțe seismice (de natură inerțială) moderate. Este avantajos ca distribuția maselor să fie cît mai uniformă pe înălțimea construcției.
- *Energia eliberată* de cutremur și transmisă structurii va trebui să fie absorbită și disipată, prin deformații postelastice, fără avarii semnificative. În acest sens, trebuie să se asigure *un nivel de ductilitate* diferențiat, tuturor componentelor structurale și conexiunilor.

În cazul structurilor speciale, la care dimensionarea este dictată de limitarea deformațiilor (centrale nucleare electrice, rezervoare, baraje etc.), se vor limita incursiunile cu caracter postelastic.

- Între unitățile structurale cu configurații geometrice sau caracteristici elastice diferite, se vor prevedea *rosturi de separare*. În acest fel se va evita contactul, datorită deformărilor, în timpul cutremurului, evitînd astfel deteriorări locale sau chiar avarii majore.
- *Componentele nestructurale* vor fi tratate în mod special, fie prin integrarea acestora în structura principală de rezistență, fie prin completa lor izolare.
- Se vor *limita deplasările laterale* (chiar dacă se află în limite admise), întrucît pot produce avarierea elementelor nestructurale, generînd eforturi suplimentare prin efectul $P - \Delta$ și, de asemenea, deplasările exagerate creează disconfort psihofiziologic asupra oamenilor.
- Se va acorda o atenție deosebită *confinării* tuturor componentelor structurale (stîlpi, grinzi, noduri, diafragme, bare de cuplare și conexiuni) în vederea evitării ruperilor casante (fragile) și apariției unor mecanisme de cedare premature. Stîlpii supuși la solicitări puternice, rezultate din efectul combinat al momentelor încovoietoare, forțelor de compresiune și în special al forțelor tăietoare, vor fi confinați cu spirale elicoidale, a căror eficacitate este mult mai mare decît cea a armării cu etrieri, grătare sau agrafe.
- *Conexiunile* dintre componentele cuplate trebuie să asigure compatibilitatea tridimensională a deformațiilor, transferul solicitărilor între elementele de rezistență și asamblarea spațială a unităților structurale, fără să cedeze chiar la șocuri seismice de mare intensitate. Conexiunile trebuie să asigure

formarea articulațiilor plastice la extremitățile componentelor orizontale dominant încovoiate.

- Vor fi evitate cu desăvîrșire *sensibilități elastice* la etajele inferioare și mai ales la nivelul parterului (partere „deschise" sau flexibile). Concentrarea deformațiilor în stîlpii de la parter poate conduce la un mecanism de cedare prematur prin apariția articulațiilor plastice la capetele acestora.
- În funcție de tipul sistemului structural și intensitatea seismică, se va urmări realizarea unei balanțe raționale între *cerințele de rigiditate, rezistență* și *ductilitate*.
- Se vor identifica și dimensiona în mod corespunzător *componentele structurale captive* (casa scării, parapeții, tuburile de ascensoare), precum și cele care pot deveni captive (stîlpi, grinzi) prin tratarea întîmplătoare a pereților de compartimentare sau închidere.
- Pentru a evita apariția unor *tasări diferențiate*, precum și a fenomenelor de torsiune accidentală, generate de *caracterul asincron al mișcării seismice*, suprafețele de contact dintre construcție și teren vor fi limitate (tronsonate prin rosturi), iar forma geometrică cît mai concentrată (cu dimensiuni comparabile și moderate).
- La *structurile în cadre* de B/A se va urmări limitarea deplasărilor laterale, protecția suplimentară a stîlpilor de la parter (cu precădere a celor marginali și de colț), precum și dirijarea apariției articulațiilor plastice la capetele grinzilor. Se vor evita structurile formate din dale groase (fără grinzi) și stîlpi, întrucît nu se poate realiza totdeauna o conexiune satisfăcătoare.
- La *structurile în diafragme* de B/A se vor evita ruperi casante în pereți, prin armarea conturului golurilor (înrămare), tratarea atentă a îmbinărilor, concentrarea armăturilor în bulbi și confinarea acestora etc. Dispunerea armăturilor în barele de cuplare și asigurarea unei ductilizări corespunzătoare se vor face în funcție de intensitatea solicitărilor secționale care depind de înălțimea diafragmelor. Se va asigura continuitatea geometrică și elastică pe verticală (simetria golurilor), iar perforările ulterioare trebuie asigurate prin armături de contur.
- În cazul structurilor înalte din B/A se preferă *asocierea* cadrelor ductile cu diafragme de rigidizare sau cu cadre diagonalizate, care contribuie la limitarea deplasărilor laterale și îmbunătățirea capacității de rezistență.
- La proiectarea construcțiilor mai importante, la *definirea sistemului de fundație* se va ține seama de caracteristicile fizico-mecanice și dinamice ale terenului din amplasament pentru a se evita fenomene de tasare diferențiată, de lichefiere sau de amplificare seismică. De asemenea, se vor analiza efectele produse de influența interacțiunii dintre teren și structură.
- Proiectarea inițială a configurației unităților structurale se va face *în concept dinamic*, prin analiza valorilor și vectorilor proprii, care pot caracteriza structurile din punctul de vedere al acțiunilor seismice. În acest sens, poate fi identificată rigiditatea dinamică a structurii (tipul de sistem dinamic), precum și discontinuitățile elastice prin intermediul deplasărilor relative de nivel furnizate de variația formei fundamentale de vibrație. În același timp, valorile proprii permit acordarea sistemului cu configurația spectrelor de răspuns (vezi § 9.4).
- Cel mai important aspect al proiectării unei structuri situate în zone seismice constă în a i se asigura cel puțin *două linii de apărare (de rezistență)*, înaintea stadiului ultim, sau *bariere de apărare ductilă*. În această privință,

se vor evita ruperile casante (fragile) prin dirijarea apariției articulațiilor plastice în secțiunile componentelor orizontale de rezistență în urma curgerii armăturilor întinse. În cazul cutremurelor puternice se admit *degradări cu caracter ductil*, specifice unor *mecanisme de cedare ultimă cît mai complicate.*

● Adoptarea unor *sisteme naturale sau artificiale de izolare* a structurii de mediul de contact, cu scopul reducerii efectelor seismice. Este evident că succesul deplin în activitatea de protecție antiseismică, va fi asigurat și printr-o execuție de calitate ireproșabilă.

9.7. COMPORTAREA STRUCTURILOR LA CUTREMURE PUTERNICE

Examinarea și interpretarea efectelor produse de mișcările seismice puternice asupra componentelor structurale și nestructurale, precum și extrapolarea acestora, trebuie făcută cu mult discernămînt și precauție deoarece fiecare construcție reprezintă un caz particular cu comportare dinamică specifică. În operația de investigare postseismică a structurilor, intervine un număr mare de parametri, dintre care, în figura 9.23, sînt menționați cei mai importanți. Cercetarea unei construcții afectate de cutremur comportă multe faze de verificare și control, și anume, *observații directe, testări instrumentale* și *analize teoretice*. În aceste condiții, factorii care se au în vedere sînt următorii:

— tipul sistemului structural, forma în plan, înălțimea, calitățile materialelor asociate, vîrsta;

— conceptul proiectării inițiale (gravitațional sau antiseismic) și metodele de calcul utilizate;

— caracteristicile amplasamentului și condițiile locale de teren;

— compoziția spectrală a mișcării seismice înregistrate.

În afara acestor factori se mai pot lua în considerare comportarea postelastică, proprietățile inițiale de rigiditate, rezistență și ductilitate, interacțiunea componentelor structurale cu cele nestructurale, realizarea conexiunilor etc.

Este cunoscut faptul că o structură proiectată rațional, supusă unei mișcări seismice de intensitate similară cu cea la care a fost dimensionată, trebuie să disipeze și să absoarbă cea mai mare parte din energie prin deformări elastice și postelastice, încît degradările componentelor principale de rezistență să fie minime. De aceea, gradul efectiv de avariere se va datora în primul rînd conceptului structural adoptat inițial în proiectare, precum și modului în care a fost tratată infrastructura. În acest sens, s-a constatat că o structură asigurată corect prin concepție și execuție poate avea o comportare satisfăcătoare, fără degradări sau avarii severe, chiar dacă cutremurul a depășit sensibil gradul de protecție admis.

În anumite cazuri, s-au semnalat comportări pronunțat diferențiate ale unor sisteme structurale, datorită contradicției existente între răspunsul real și răspunsul rezultat prin aplicarea normativelor. O asemenea situație s-a produs în București, la cutremurul din 4 martie 1977, deoarece configurația spectrului seismic efectiv (cu amplificări în zona perioadelor înalte) a fost total diferită de configurația spectrului seismic de proiectare (cu amplificări în zona perioadelor joase), așa cum rezultă din § 9.6. Datorită dezacordării dintre caracteristicile dinamice proprii și cele spectrale ale mișcării terenului (vezi § 9.4) nivelul de asigurare real al construcțiilor rigide a crescut în detrimentul celor flexibile. Analiza superficială a acestor deficiențe de ordin calita-

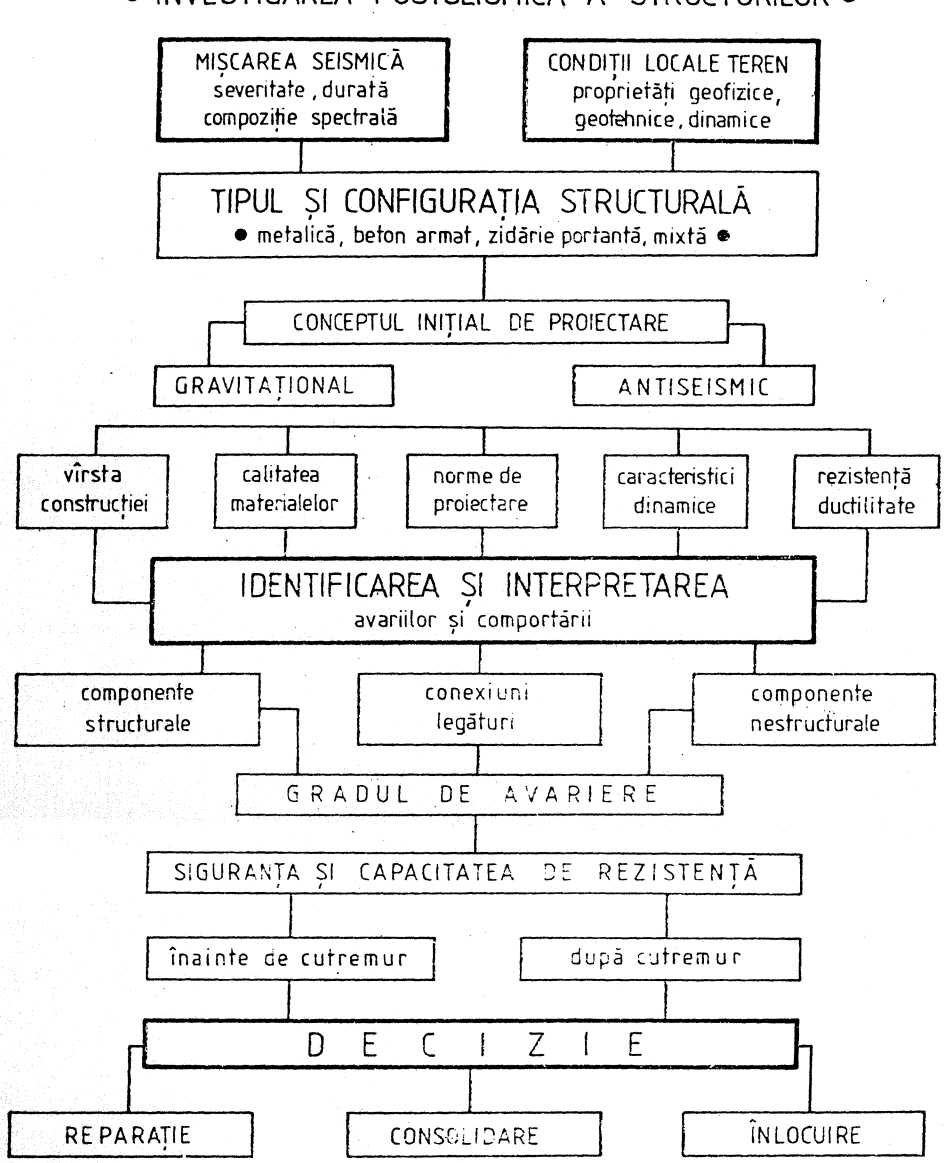


Fig. 9.23

tiv poate conduce la concluzii false și la absolutizarea anumitor sisteme structurale, a căror comportare favorabilă a fost exclusiv conjuncturală și nu obiectivă.

Cele mai frecvente *degradări și avarii* tipice, care se înregistrează la toate categoriile structurale, sînt următoarele:

- avarierea severă, localizată la parterele deschise (flexibile) sau limitată la etajele inferioare;
- deteriorarea elementelor structurale și nestructurale ale construcțiilor flexibile, cu deplasări laterale relative pronunțate, la care a intervenit și contribuția defavorabilă a efectului $P - \Delta$;
- crăpături diagonale caracteristice în stîlpii cadrelor și pereții diafragmelor de B/A, în pereții de zidărie portantă sau de compartimentare, ca efect al forței tăietoare dominante;
- crăpături și avarii la extremitățile elementelor de rezistență, produse de efectul combinat al momentului încovoietor și forței tăietoare (în cazul grinzilor cadrelor și barelor de cuplare ale diafragmelor) și al momentului încovoietor, forței tăietoare și forței axiale (în cazul stîlpilor, pereților diafragmelor înalte, conexiunilor);
- localizarea degradărilor majore la stîlpi marginali și în special la cei de colț, datorită fenomenului de torsiune generală;
- apariția articulațiilor plastice la capetele grinzilor și stîlpilor;
- procese locale de degradare a betonului și armăturilor (sfărîmarea și expulzarea masei de beton, exfolieri, dislocări, flambarea barelor de oțel etc.);
- cedări în elementele infrastructurii sau ale terenului de fundație;
- avarierea componentelor structurale „captive", ca urmare a modificării rezemării grinzilor și scurtării înălțimii libere a stîlpilor datorate unei tratări necorespunzătoare a pereților de închidere sau de compartimentare.

Efectele distructive care au fost descrise se referă la comportarea unor structuri corect executate, făcîndu-se astfel abstracție de avariile posibile datorate în exclusivitate erorilor de execuție.

Investigările postseismice ale structurilor, în special ale celor asigurate prin concepție și calcul la acțiuni laterale și executate în condiții riguroase, reprezintă surse de informații fundamentale pentru progresul teoretic și practic al ingineriei seismice. Trebuie însă subliniat faptul că este necesar ca rezultatele obținute să fie asociate cu caracteristicile mișcării seismice și proprietățile dinamice ale terenului din amplasamentul respectiv. În această privință este recomandabil să se dispună de o vastă rețea seismică de înregistrare și supraveghere care să includă, pe lîngă stațiile specializate, și o serie de clădiri mai semnificative din punctul de vedere al sistemului structural.

În figurile 9.24 ... 9.53 se prezintă o serie de exemple de avarii și distrugeri reprezentative, privind comportarea unor categorii de construcții cu ocazia unor cutremure puternice.

9.8. ASPECTE FUNDAMENTALE CU PRIVIRE LA REPARAREA ȘI CONSOLIDAREA CONSTRUCȚIILOR AFECTATE DE CUTREMUR

Investigarea construcțiilor afectate de cutremure de mare intensitate furnizează informații de mare importanță teoretică și practică care pot contribui la:

— identificarea cauzelor care au generat procese de degradare a elementelor structurale și nestructurale;

— comportarea terenului de fundație și influența condițiilor locale;

— definirea unor modele ameliorate de analiză numerică, care să permită predicația răspunsului dinamic la cutremure așteptate;

— revizuirea normelor de proiectare și protecție antiseismică;

— obținerea unor învățăminte cu privire la sistemele structurale cele mai vulnerabile sau cele mai eficiente, corespunzătoare anumitor zone sau amplasamente;

— îmbunătățirea metodelor și tehnologiilor de execuție;

— estimarea posibilităților de restaurare, prin lucrări de reparație sau consolidare, pentru construcțiile degradate sau avariate;

— acumularea unor cunoștințe noi cu privire la influența mecanismului de focar, proprietăților terenului din amplasament și caracteristicilor unităților structurale, în vederea perfecționării concepției de proiectare și realizare a construcțiilor, la un nivel ridicat de asigurare antiseismică;

— evaluarea aspectelor de ordin social și economic.

Operațiile cele mai semnificative cu privire la investigarea postseismică a construcțiilor avariate de cutremure sînt redate în figura 9.23.

Dintre principalele aspecte specifice ciclului construcție-acțiune seismică-avariere-reconstrucție, se vor expune selectiv numai cele care privesc diferențierea gradului de avariere, criteriile care stau la baza stabilirii soluțiilor de restaurare, precum și criteriile de verificare a eficacității lucrărilor de consolidare [107], [108], [109], [110], [111].

Diferențierea gradului de degradare sau de avariere al construcțiilor afectate de cutremure distructive permite evaluarea lucrărilor de reparație sau de consolidare, care să asigure structurilor capacitatea portantă la acțiuni gravitaționale și laterale. La aprecierea gradului de avariere și definitivarea soluțiilor de consolidare, este necesar să se analizeze caracteristicile inerțiale, disipative, elastice, de rezistență și de ductilitate ale structurilor, parametri esențiali care guvernează comportarea unei construcții în ansamblu la mișcările seismice puternice.

În funcție de gradul de avariere, activitatea de consolidare a structurilor de rezistență, în concept dinamic, constă în

- menținerea configurației inițiale a structurii;
- modificarea sistemului de rezistență prin componente suplimentare.

Schimbarea concepției inițiale de conformare structurală, prin introducerea unor componente noi, cu proprietăți de rigiditate, rezistență și ductilitate adecvate, contribuie la modificarea modului de comportare al unității structurale, în conformitate cu acordarea noilor proprietăți dinamice cu caracteristicile spectrale specifice amplasamentului (fig. 9.2 și 9.5). Se subliniază faptul că procesul de consolidare este mult mai dificil și complicat decît proiectarea unei construcții noi. Stabilirea soluțiilor de consolidare, elaborarea proiectelor de rezistență, precum și tehnologiile de execuție implică cunoștințe tehnice multiple și o vastă experiență profesională. În figura 9.54 se prezintă sintetic succesiunea etapelor în actul de decizie cu privire la reabilitarea construcțiilor afectate de cutremure.

Conceptul dinamic de proiectare a lucrărilor de consolidare trebuie să aibă în vedere acțiunea cutremurelor intensive viitoare (așteptate), mai ales în cazul construcțiilor neasigurate inițial la acțiuni seismice.

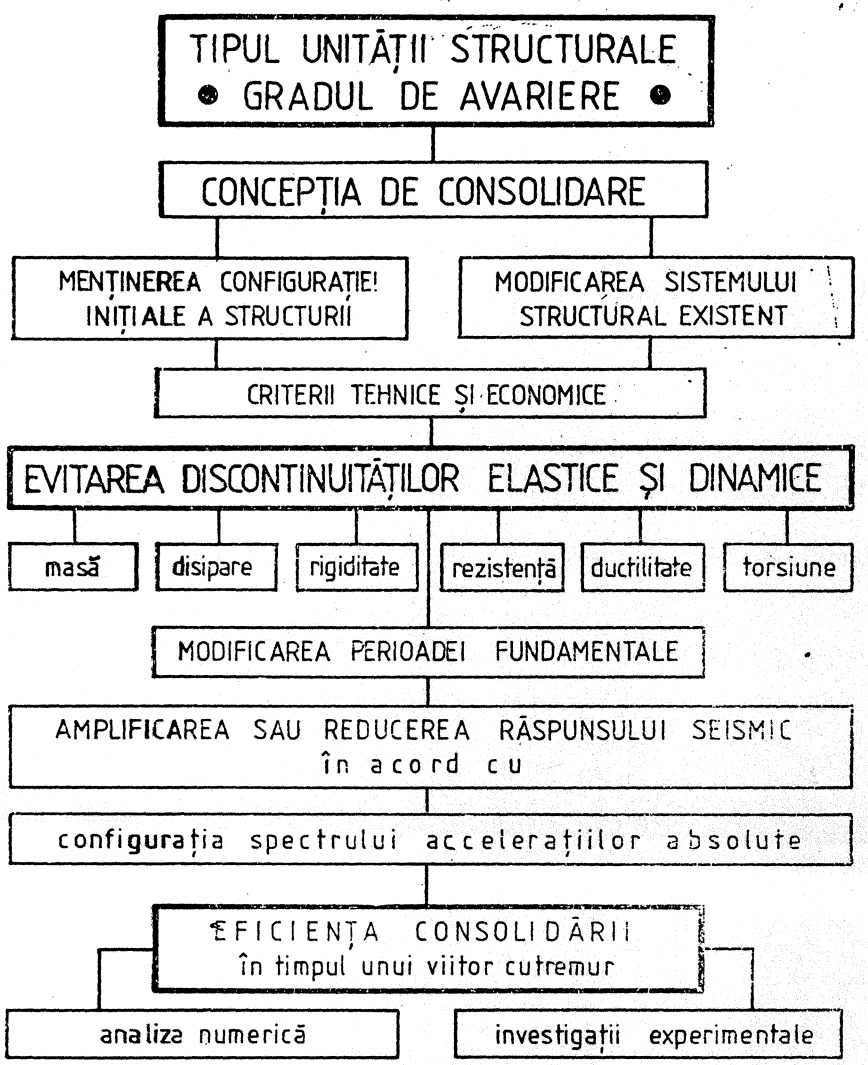


Fig. 9.54

9.8.1. Cauze care diferențiază gradul de avariere al construcțiilor

Gradul de avariere al construcțiilor trebuie diferențiat în funcție de concepția care a stat la baza proiectării inițiale a structurilor de rezistență. În acest sens, construcțiile ce urmează a fi cercetate se clasifică global astfel:

• Structuri concepute și proiectate exclusiv gravitațional avînd o asigurare întîmplătoare la acțiuni orizontale.

• Structuri concepute și proiectate antiseismic, în conformitate cu prevederile codurilor și regulamentelor în vigoare.

Criteriul expus mai sus este fundamental în ceea ce privește cercetarea avariilor, urmînd a fi coroborat cu sistemul structural specific fiecărei construcții în parte. Este evident că fiecare obiect analizat reprezintă un „caz particular" care poate pune în evidență diferențieri importante ale efectelor seismice, uneori chiar contradictorii.

Diferențierea avariilor, în funcție de nivelul de asigurare la acțiuni laterale și sistemul structural specific, precum și identificarea acestora prin observații directe, măsurători instrumentale și analize numerice, furnizează informații de bază în privința stabilirii soluțiilor de consolidare.

În urma prelucrării statistice a efectelor produse de cutremurele puternice, *avariile* pot fi clasificate și diferențiate, într-o primă fază cu caracter general, astfel:

• *Avarii slabe* (minore), nesemnificative din punctul de vedere al capacității de rezistență a structurilor. În acest caz nu sînt necesare lucrări de consolidare propriu-zise, ci numai reparații sau refaceri ale „elementelor nestructurale" și ale finisajelor.

• *Avarii moderate*, localizate numai în anumite elemente de rezistență verticale și orizontale situate în zonele puternic solicitate. Măsurile de consolidare vor avea un caracter limitativ, intervenindu-se numai asupra componentelor structurale parțial afectate, cu scopul restabilirii sau îmbunătățirii gradului de asigurare la acțiuni laterale.

• *Avarii pronunțate* (majore), care antrenează zone importante ale structurii de rezistență, cu extindere în plan orizontal și pe verticală. Lucrările de consolidare vor avea un caracter mai amplu care să garanteze redresarea de ansamblu a structurii, din punctul de vedere al rigidității, rezistenței și ductilității.

• *Avarii puternice* (severe), cu consecințe distructive generalizate, care afectează majoritatea elementelor de rezistență și a căror refacere ar necesita lucrări complexe și costisitoare. În aceste cazuri se recomandă dezafectarea construcțiilor respective și eventuala reconstrucție integrală.

Evaluarea eficienței lucrărilor de consolidare rezultă din corelarea nivelului de asigurare seismică obținut, complexitatea soluțiilor tehnice adoptate și investiția economică necesară.

Cele mai frecvente *cauze* (datorate în special erorilor de concepție și de execuție) care diferențiază gradul de avariere al structurilor sînt următoarele:

• Mișcarea seismică (caracterizată prin intensitate, directivitate, durată și compoziție spectrală) total diferită de cea descrisă prin regulamentele sau normele de protecție la acțiuni laterale.

• Disimetrii geometrice pronunțate ale configurației structurale.

• Distribuții neraționale ale maselor care generează efecte inerțiale defavorabile.

• Disproporții pronunțate în variația rigidităților elementelor de rezistență și structurii, în plan orizontal și pe verticală.

• Discontinuități importante în variația rigidităților relative dintre etajele consecutive, în special cele inferioare.

• Descentrarea poziției centrelor de torsiune (rigiditate) în raport cu centrele masice și în general, influența oricărei sensibilități structurale.

- Insuficienta ductilizare a elementelor de rezistență și inadaptabilitate postelastică a structurii în ansamblu.
- Supraîncărcarea anumitor elemente verticale de rezistență și apariția unor eforturi de compresiune excesiv de mari în stîlpii și diafragmele din beton armat.
- Modificarea sau chiar degradarea caracteristicilor structurale (inerțiale, disipative și elastice), precum și a proprietăților fizico-mecanice ale materialelor în timp.
- Natura terenului de fundație din amplasament asociată cu fenomenul de interacțiune teren-structură. Lipsa sau tratarea incorectă a rosturilor de separare între construcțiile învecinate.
- Lipsa unor informații cu privire la proprietățile dinamice ale terenului din zonă: perioadă predominantă, amplificare, focalizare și filtrare dinamică.
- Calitatea materialelor utilizate (betoane, armături, cărămidă, mortare, lemn etc.).
- Defecte de execuție (segregări ale betonului, armături greșit poziționate și incorect ancorate, deplasarea sau lipsa etrierilor), turnarea betonului în condiții tehnologice de temperatură sau de umiditate inadmisibile, crearea unor rosturi de execuție în secțiuni sau zone sensibile din punct de vedere seismic etc.
- Aplicarea unor metode de calcul eronate, precum și analiza răspunsului în domeniul exclusiv elastic.

9.8.2. Principii generale privind consolidarea structurilor

Conceptul elaborării soluției de consolidare a unei construcții avariate de un cutremur puternic constă în reconsiderarea comportării dinamice a structurii prin redresarea caracteristicilor inerțiale, disipative și elastice, precum și prin reconsiderarea capacității de rezistență și de ductilitate a elementelor afectate în maniera descrisă în continuare.

- Redresarea caracteristicilor inerțiale prin evitarea supraîncărcărilor locale, renunțarea la elementele arhitecturale masive, uniformizarea pereților de compartimentare folosind materiale ușoare, eliminarea depozitării unor materiale excesiv de grele la etajele superioare, eventuale schimbări ale destinației construcției și chiar dezafectarea unor etaje superioare etc.
- Redresarea caracteristicilor disipative prin utilizarea unor materiale sau dispozitive cu funcție disipativă. În acest sens se recomandă prevederea unor pereți de compartimentare suplimentari la structurile în cadre flexibile de B/A, reducerea golurilor la construcțiile din zidărie portantă cu pereți excesiv de perforați și umplerea acestora cu materiale energetic absorbante, închiderea unor goluri nefuncționale la structurile în diafragme din B/A cu materiale mai deformabile etc.
- Redresarea caracteristicilor elastice prin redimensionarea corectă a rigidității elementelor de rezistență avariate (grinzi, stîlpi, diafragme), nodurilor, îmbinărilor, subansamblurilor structurale sau chiar a întregii structuri prin intervenții locale sau mai ample, proporționarea variației rigidităților relative de nivel (în special la parter și primele etaje), limitarea deplasărilor laterale și centrarea pozițiilor centrelor de torsiune (de rigiditate) în raport cu centrele masice etc.

- Refacerea capacității de rezistență și a ductilității, prin proiectarea rațională a elementelor afectate și utilizarea unor materiale specifice, în conformitate cu gradul de siguranță prestabilit.

Unele măsuri de detaliu ce se recomandă în vederea elaborării proiectului de consolidare, și care derivă direct din principiile generale expuse anterior, pot fi sistematizate astfel:

- Identificarea tuturor avariilor și degradărilor suferite de elementele „structurale" ale construcțiilor, analiza și interpretarea acestora din punct de vedere static și dinamic și localizarea zonelor mai vulnerabile.
- Determinarea proprietăților fizico-mecanice ale terenului de fundație, identificarea nivelului apelor subterane, posibilitatea apariției fenomenului de interacțiune teren-structură, influența construcțiilor învecinate, orientarea față de direcția dominantă a acțiunii seismice etc., cu scopul precizării influenței condițiilor locale (specifice) de amplasament asupra efectelor ce pot fi produse de cutremure viitoare.
- Cercetarea complexă a întregii structuri de rezistență, reconstituirea geometrică a elementelor de rezistență și identificarea armăturilor (cînd nu se dispune de proiectul inițial), evitînd limitarea investigațiilor numai la elementele vizibil afectate.
- Analiza instrumentală a calității materialelor, precum și determinarea experimentală a caracteristicilor dinamice structurale înainte și după efectuarea lucrărilor de consolidare.
- Stabilirea prin calcul a capacității portante la acțiuni laterale a structurii, în situația anterioară cutremurului, în stadiul de avariere și în situația finală consolidată.
- Adaptarea soluției de consolidare la particularitățile fiecărui sistem structural, precum și la modul specific în care s-au manifestat avariile în componentele constitutive ale construcției.
- Proporționarea elementelor de rezistență consolidate, în condițiile realizării unui echilibru spațial static și dinamic satisfăcător (la încărcări gravitaționale și la acțiuni seismice viitoare), care să asigure pentru întreaga structură obținerea unor deplasări laterale în limite tolerabile.
- Implementarea unor elemente de rezistență verticale și orizontale asociate structurii existente, închiderea unor goluri nefuncționale și moderarea încărcărilor excesive.
- Corectarea configurației structurale, incorect proiectată inițial la acțiuni laterale, care să conducă la evitarea apariției fenomenului defavorabil de torsiune generală și eliminarea sensibilităților locale.
- Asigurarea ductilității elementelor de consolidare în concordanță cu ductilitatea celorlalte elemente neconsolidate, acordîndu-se atenție deosebită ductilizării conexiunilor, care să permită transferul energiei de deformație între toate elementele de rezistență în stadiul elastic și postelastic de solicitare.
- Asigurarea conlucrării locale și spațiale dintre elementele consolidate și restul structurii prin realizarea continuității între elementele de rezistență ale suprastructurii cu cele ale fundației, respectînd criteriile de asociere structurală dintre materialele și elementele vechi și noi (compatibilitate de material).
- Excluderea totală a tendinței care se manifestă deseori de a se lua măsuri exclusiv empirice și improvizate de consolidare.

● Aplicarea de tehnologii simple de execuție a lucrărilor de consolidare și utilizarea unor materiale de calitate superioară.

● Eficiența economică a lucrărilor de consolidare raportată la valoarea de înlocuire și importanța socială a construcției respective.

Trebuie subliniat faptul esențial că soluțiile aplicate prin proiect și execuție individualizează structura afectată de acțiunea seismică și nu tipul de consolidare adoptat.

9.8.3. Criterii de verificare a eficacității lucrărilor de consolidare

Prin analiză numerică se poate compara răspunsul structurii proiectate inițial cu răspunsul structurii consolidate, considerînd în ambele situații aceeași mișcare seismică care a generat avarierea construcției. Dacă se ține seama de degradarea componentelor structurale, se pot evalua rezervele de rezistență ale construcției avariate. Aceste operații analitice pot furniza informații calitative și cantitative asupra nivelului de asigurare a construcției consolidate la șocuri seismice viitoare. În majoritatea situațiilor, soluția de consolidare trebuie să îmbunătățească nivelul de asigurare prevăzut în concepția inițială de proiectare.

Prin analiză instrumentală (experimentală) se pot determina caracteristicile proprii de vibrație ale structurii în stare avariată și finală (consolidată). Investigațiile instrumentale sînt bazate fie pe înregistrarea răspunsului structurii la agitația microseismică, fie pe înregistrarea vibrațiilor libere produse de surse artificiale tranzitorii sau permanente.

Concluziile ce se pot obține devin mai complete dacă se cunosc caracteristicile dinamice inițiale ale structurii, înainte de a fi fost afectată de cutremur.

Datele experimentale obținute, prelucrarea și interpretarea lor permit să se verifice global comportarea probabilă a structurii consolidate la acțiunea unui viitor cutremur puternic (așteptat). Se pot astfel obține informații importante asupra: perioadelor proprii de translație și de rotație, formelor proprii de vibrație, valorilor fracțiunii din amortizarea critică, variațiilor rigidităților relative de nivel, poziției centrelor de rigiditate (torsiune), direcțiilor principale de vibrație etc.

Situațiile care pot interveni în privința aprecierii „rigidității dinamice" globale a structurilor avariate sau consolidate (exprimată prin perioada fundamentală) sînt reprezentate în figura 9.55, în care s-au introdus notațiile:

T_0 — perioada fundamentală înainte de cutremur (inițială);
T_A — perioada fundamentală în stare avariată;
T_C — perioada fundamentală în stare consolidată.

În acest sens, se definesc următorii parametri:

● *factorul de avariere*

$$F.A = (T_A/T_0)^2 \geqslant 1;$$

● *coeficientul de eficacitate al consolidării*

$$C.E.C = (T_A/T_C)^2.$$

Întrucît în majoritatea cazurilor nu se cunosc perioadele fundamentale inițiale, unicul parametru care permite evaluarea gradului de consolidare este *C.E.C.* În conformitate cu variantele descrise în figura 9.55 rezultă

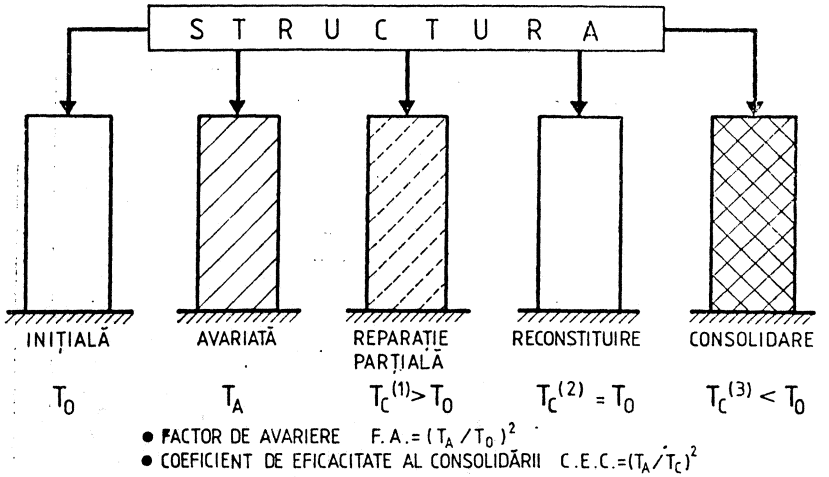


Fig. 9.55

următoarele categorii de lucrări de restaurare a construcțiilor degradate seismic:

● *reparații* (fără protecție antiseismică) $C.E.C = (T_A/T_C^{(1)})^2 < 1$,
● *reconstituire* (cu protecție întîmplătoare) $C.E.C = (T_A/T_C^{(2)})^2 = 1$,
● *consolidare* (cu protecție satisfăcătoare) $C.E.C = (T_A/T_C^{(3)})^2 > 1$.

În funcție de situația inițială a structurii (înainte de cutremur) și starea efectivă de avariere (după cutremur), pot fi stabilite limite de variație pentru *C.E.C.* Acest coeficient caracterizează global și aproximativ rigiditatea de ansamblu a structurii consolidate.

Observațiile vizuale și analizele instrumentale ale efectelor distructive produse în timpul cutremurelor puternice au pus în evidență funcția dinamică importantă a tuturor elementelor constitutive ale unei construcții, numite impropriu „structurale" și „nestructurale".

În concepția dinamică de conformare și proiectare, toate componentele contribuie în mod decisiv la comportarea unei construcții la acțiuni seismice. Noțiunea de „element nestructural" trebuie reconsiderată în cazul acțiunilor seismice și menținută numai pentru solicitările gravitaționale.

În vederea exemplificării modului practic în care se pot utiliza investigații experimentale în vederea verificării eficacității soluțiilor de consolidare, se prezintă unul din studiile efectuate de autorul acestei lucrări [109] asupra unei clădiri din București după cutremurul din 4 martie 1977. În figurile 9.56 și 9.57 se prezintă înregistrările obținute în stare avariată (fig. 9.56, *a* și fig. 9.57, *a*), precum și în situația finală consolidată (fig. 9.56, *b* și 9.57, *b*), pe direcțiile transversală, respectiv longitudinală. Printr-o proporționare corespunzătoare a rigidității componentelor avariate, precum și prin aplicarea altor măsuri suplimentare s-a obținut o echilibrare dinamică de ansamblu pe cele două direcții așa cum rezultă din valorile *C.E.C.* De asemenea, s-a realizat o acordare satisfăcătoare între proprietățile dinamice efective ale structurii consolidate (T și ν) cu caracteristicile spectrale ale mișcării seismice (fig. 8.22...8.27). Aspecte din timpul execuției lucrărilor de consolidare sînt prezentate în figurile 9.58 și 9.59*.

* La elaborarea proiectului de consolidare, precum și la asistența tehnică în timpul execuției au colaborat dr. ing. M. Alexandrescu și ing. V. Szolga, din I. C. B.

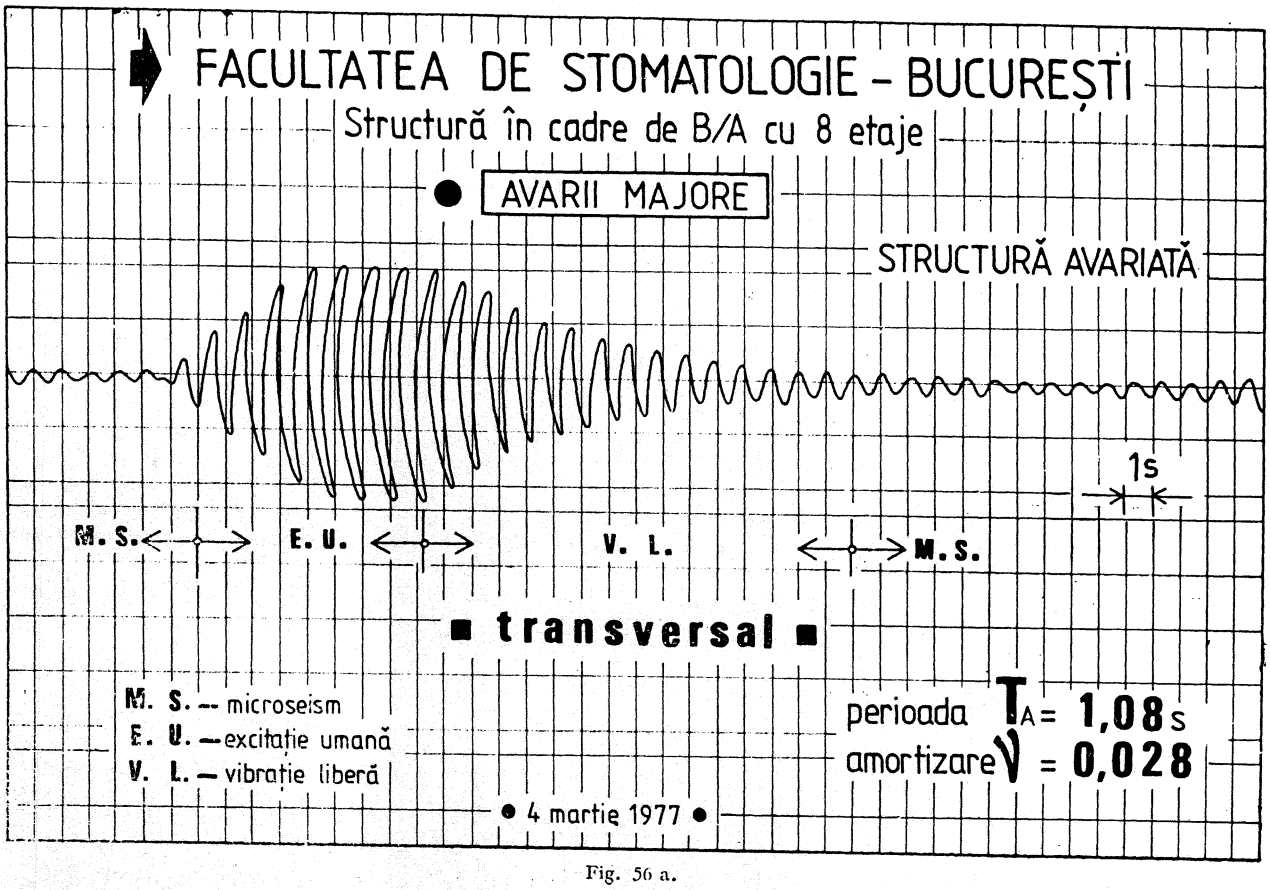


Fig. 56 a.

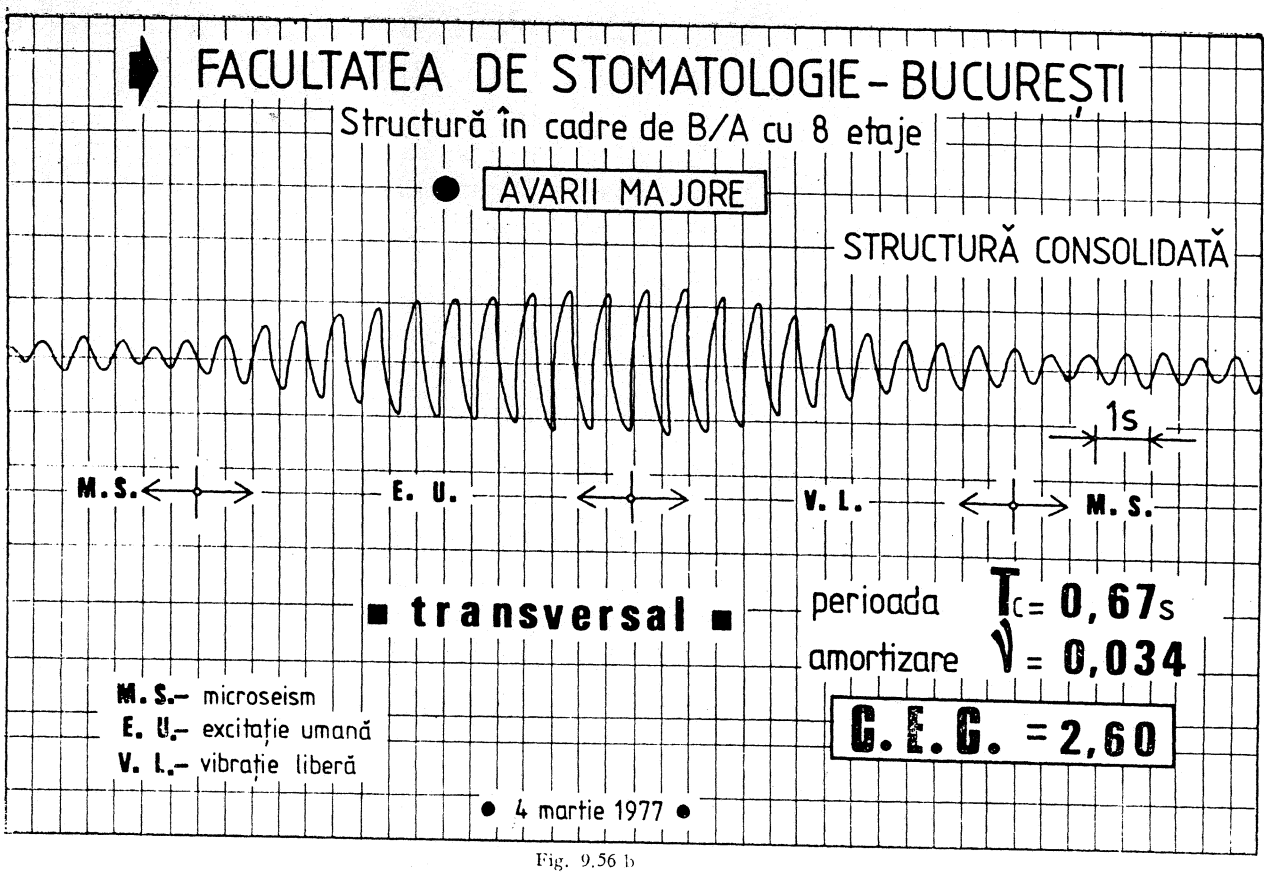


Fig. 9.56 b

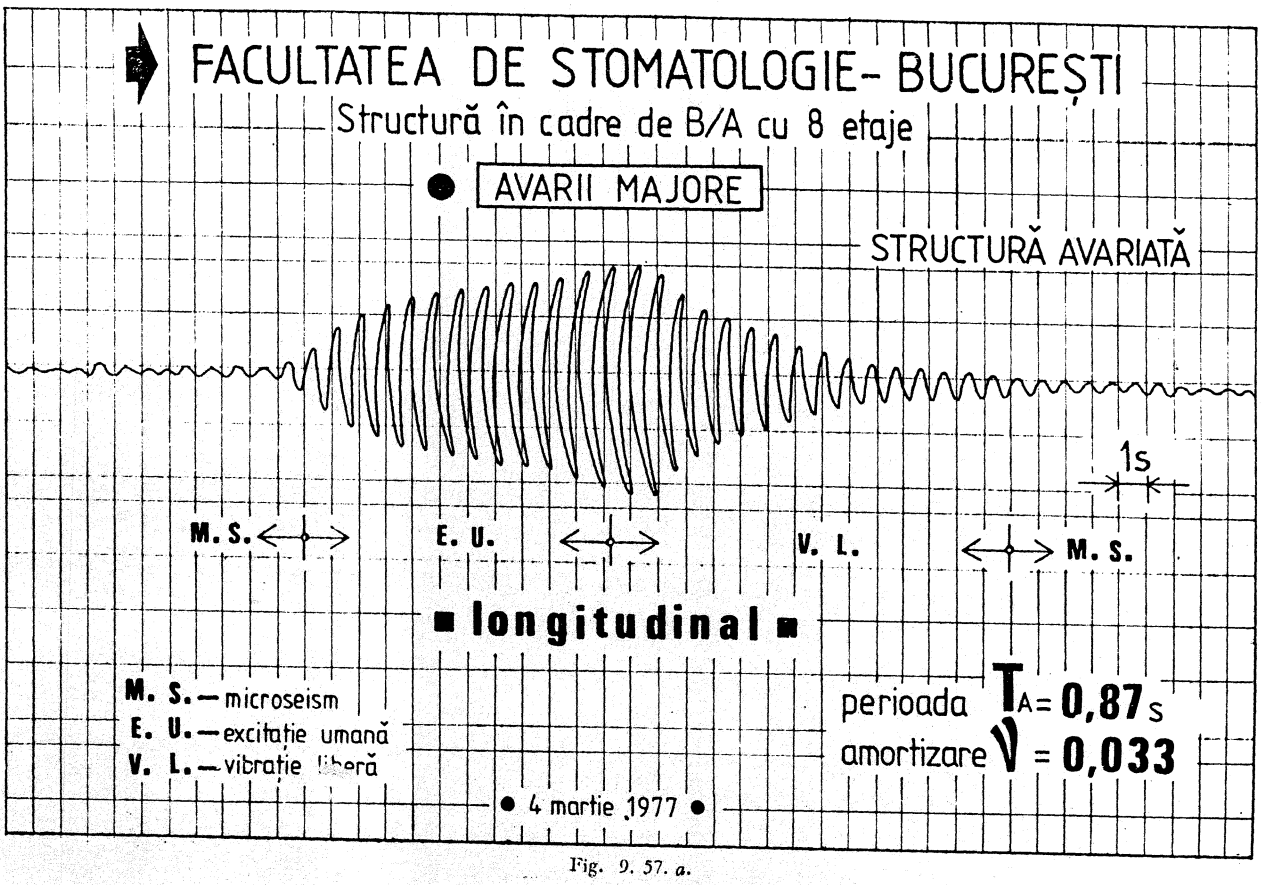


Fig. 9. 57. *a*.

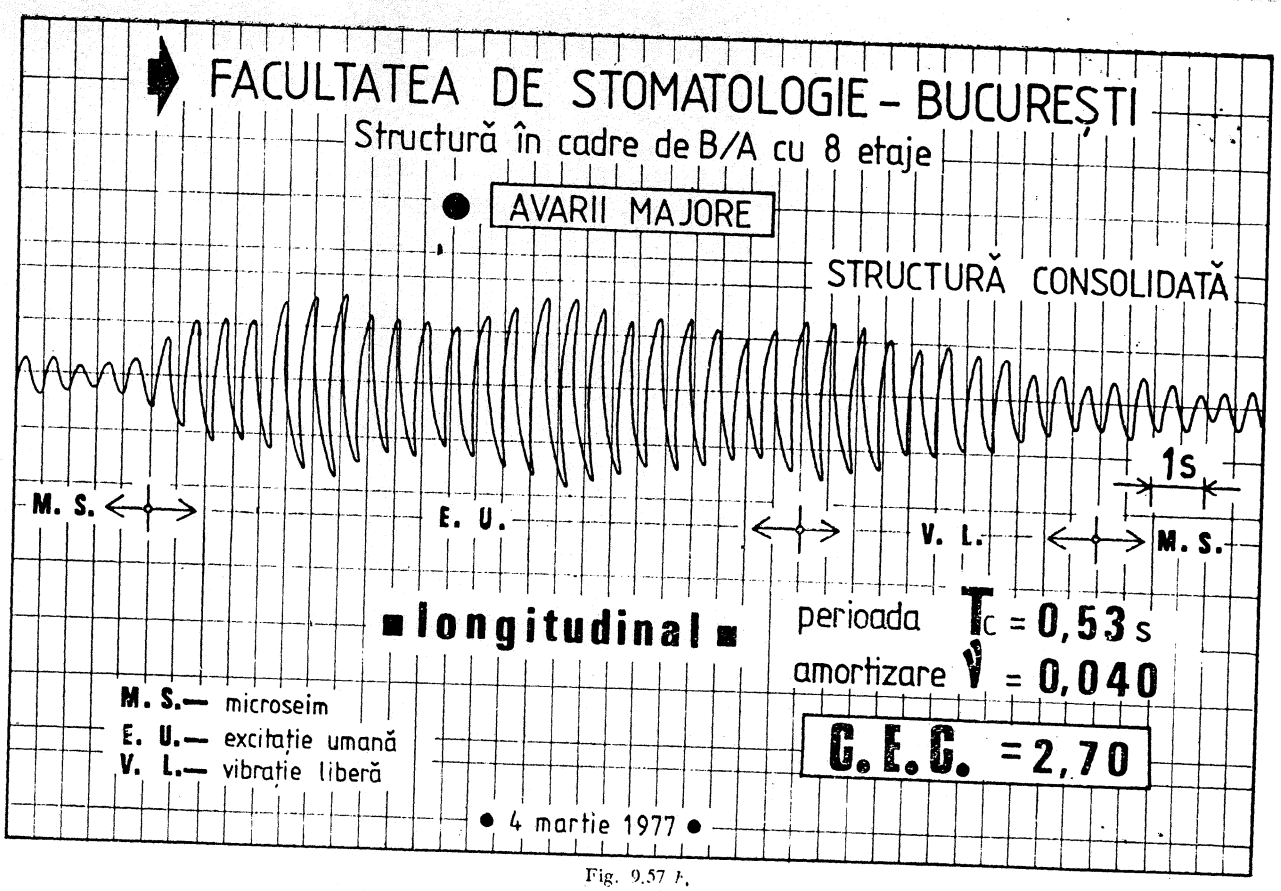


Fig. 9.57 *b*.

9.9. FACTORI DE INCERTITUDINE ȘI DE RISC ÎN PROTECȚIA ANTISEISMICĂ A STRUCTURILOR

Diferențierea comportării construcțiilor la cutremure, cu toate măsurile ce sînt aplicate în baza cunoștințelor actuale de inginerie seismică, se datorează unui mare număr de factori de incertitudine pe care cercetarea seismologică și inginerească nu a reușit să-i elucideze în totalitate pînă în prezent. *Factorii de incertitudine* și *de risc* pot avea un *caracter obiectiv*, situație în care inginerul proiectant, avînd cunoștință de existența lor, poate lua decizii corespunzătoare de prevenire, sau un *caracter subiectiv*, în care caz, datorită posibilității întîmplătoare de apariție, nu este totdeauna posibilă preconizarea unor măsuri de evitare. De altfel, precauțiile exagerate în ceea ce privește protecția antiseismică la fenomene aleatoare cum sînt cele generate de incertitudinile obiective și subiective ar conduce la investiții economice total necorespunzătoare.

În cele ce urmează vor fi expuse succint unele aspecte mai semnificative cu privire la factorii de incertitudine și de risc care, în funcție de caracterul lor, pot fi studiați prin mijloace științifice sau excluși prin măsuri de ordin administrativ și educațional.

9.9.1. Factori obiectivi de incertitudine și de risc

● *Mișcarea seismică.* Conceptul fundamental al proiectării antiseismice îl constituie protecția construcțiilor la un cutremur viitor (așteptat). Criteriile de predicție elaborate pînă în prezent sînt destul de aproximative deși, în ultimii ani, s-au realizat progrese notabile în această privință. Dintre numeroasele variabile care intervin se semnalează:

— *mecanismul de producere a cutremurului așteptat*, acumularea de tensiuni în focar (datorită unor fenomene mecanice, chimice sau termodinamice), periodicitatea eliberării energiei, directivitatea etc.;

— *variabilitatea și configurația mișcării terenului* prin reprezentări deterministe sau aleatoare;

— *intensitatea maximă* a cutremurului așteptat care se manifestă direct în spectrele de răspuns:

— *compoziția spectrală* (compoziția de frecvență) a mișcării, asociată cu proprietățile locale ale terenului, care definește variația spectrelor seismice;

— *durata mișcării seismice*, care deși nu se reflectă explicit în spectre seismice liniare, se manifestă în mod semnificativ la structurile de tip flexibil cu comportare postelastică;

— *distanța epicentrală* așteptată, în cazul focarelor potențiale și natura mediului geologic de propagare.

● *Concepția structurală*, de care s-a mai amintit în § 9.3.1, poate conține erori de *configurare geometrică*, *inerțială*, *elastică* și *ductilă*, precum și de supraevaluare a *capacității portante* a unor componente structurale la efectul combinat al *acțiunilor gravitaționale și laterale*. Aceste aspecte fundamentale, specifice configurațiilor antiseismice, depind de asocierea compatibilă sau incompatibilă (din punct de vedere dinamic, elastic și postelastic), a tuturor componentelor structurale și „nestructurale" care definesc o unitate structurală. Existența unor erori de concepție poate genera o diversitate de incertitudini asupra comportării construcțiilor în timpul cutremurelor puternice, prin apariția unor concentratori inerțiali, elastici și energetici care favorizează fenomene de *vulnerabilitate și sensibilitate* structurală.

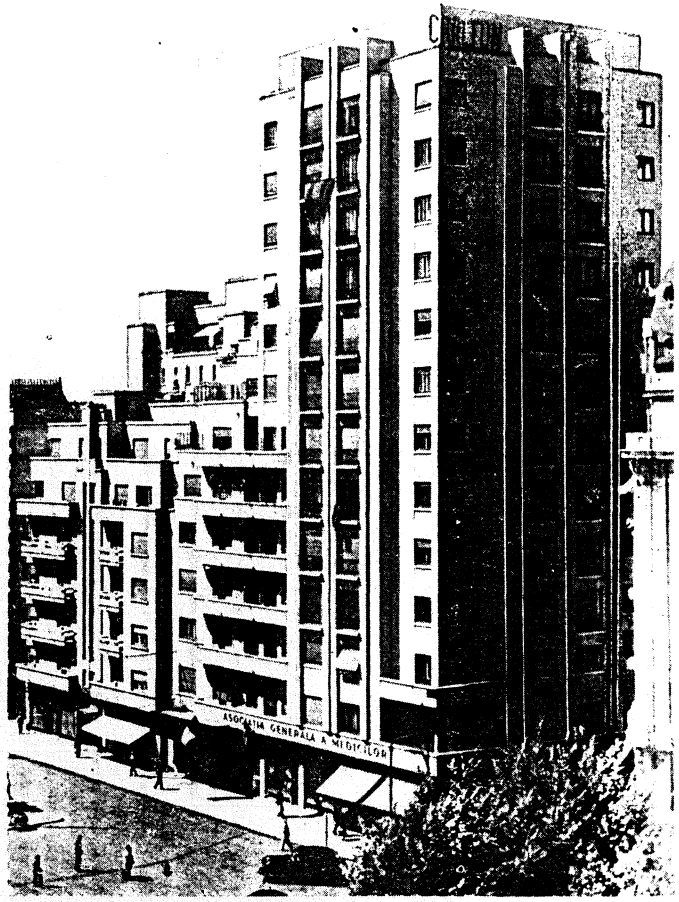


Fig. 9.24
București. Blocul Carlton, situat pe bd. N. Bălcescu, construcție cu structura în cadre de B/A avînd 12 etaje și 2 subsoluri, înaintea cutremurului din 10 noiembrie 1940.



Fig. 9.25.
București, 10 *noiembrie* 1940. Prăbușirea completă a blocului Carlton, proiectat exclusiv în concept gravitațional.



Fig. 9.26
Fukui/*Japonia*/, *28 iunie 1948*. Avarierea totală a unei structuri din B/A, fără rosturi de separație între tronsoane, situată într-un teren aluvionar.

Fig. 9.27
Anchorage/*Alaska*/, *27 martie 1964*. Flambajul unui stîlp de B/A cu armătură rigidă, la o construcție cu parter și 14 etaje.

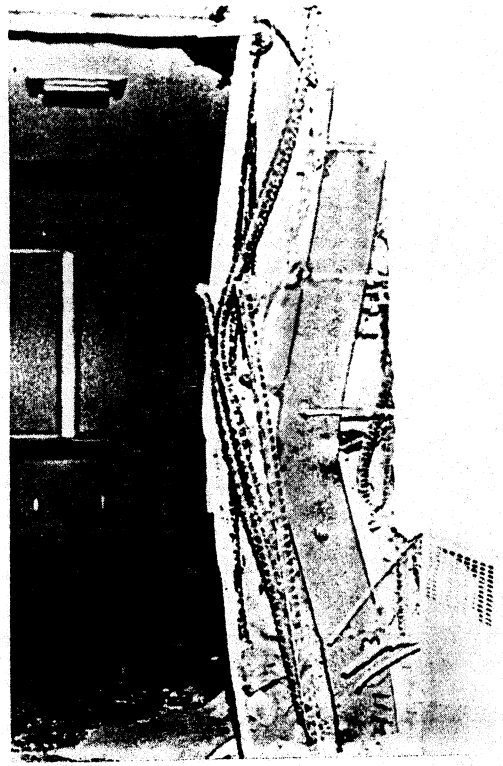


Fig. 9.28
Anchorage/*Alaska*/, *27 martie 1964*. Cedări casante în riglele de cuplare și pereții unei structuri în diafragme de B/A, la o clădire cu parter și 13 etaje.



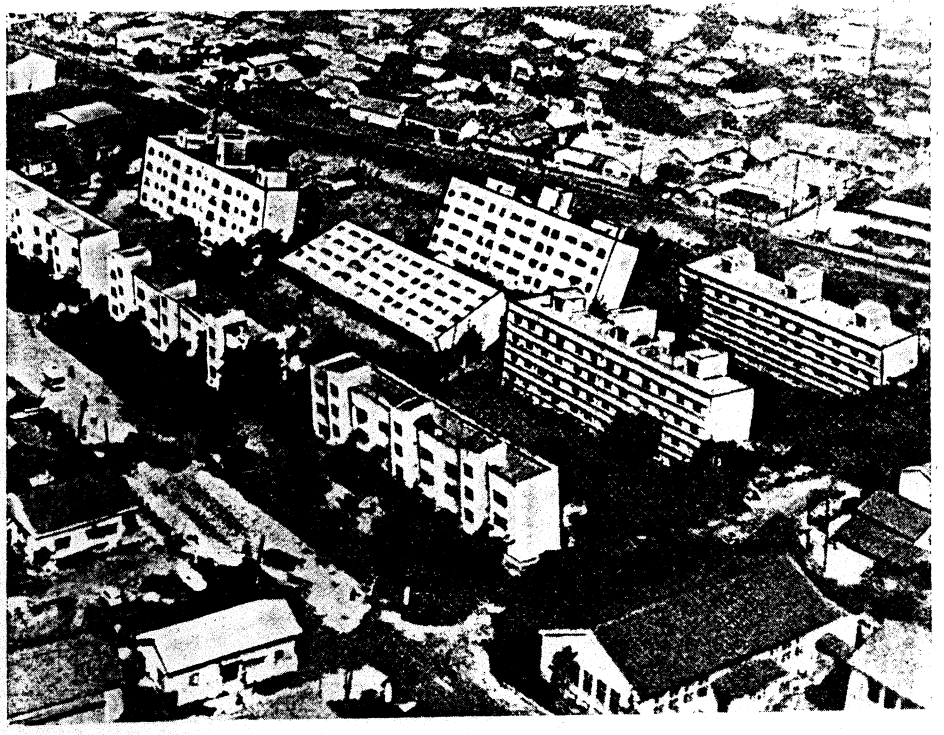


Fig. 9.29.
Niigata/*Japonia*/, *16 iunie 1964*. Construcții din B/A de tip rigid, înclinate sau răsturnate datorită fenomenului de tasare și lichefiere a terenului.



Fig. 9.30
Niigata/*Japonia*/, *16 iunie 1964*. Una dintre clădirile din figura 9.29 complet răsturnată.

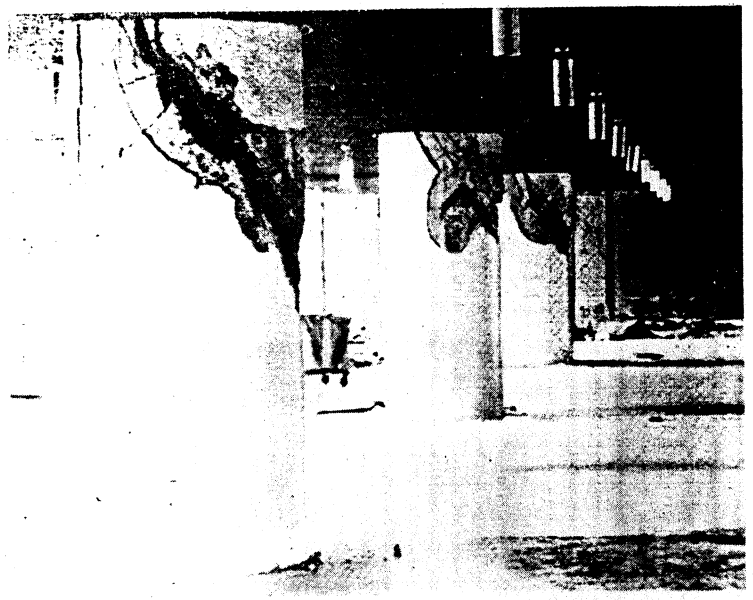


Fig. 9.31
Caracas/ *Venezuela*/, *29 iulie 1967.* Ruperea casantă a stîlpilor de la parterul unei structuri de B/A.

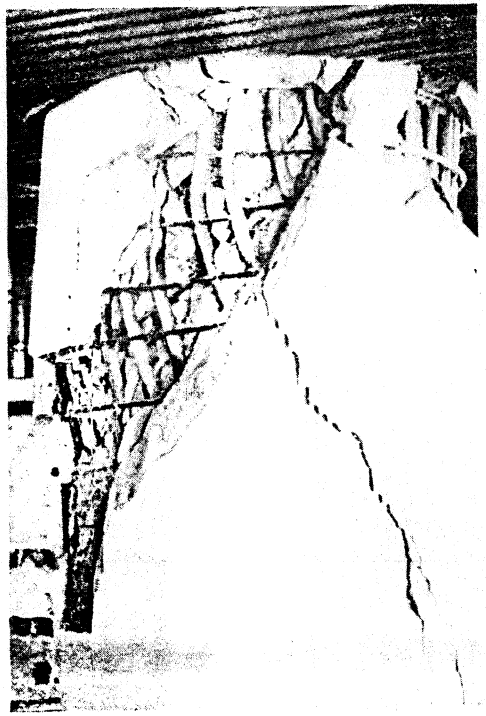


Fig. 9.32
Caracas/*Venezuela*/, *29 iulie 1967.* Detaliu de cedare casantă a unui stîlp din figura 9.31.

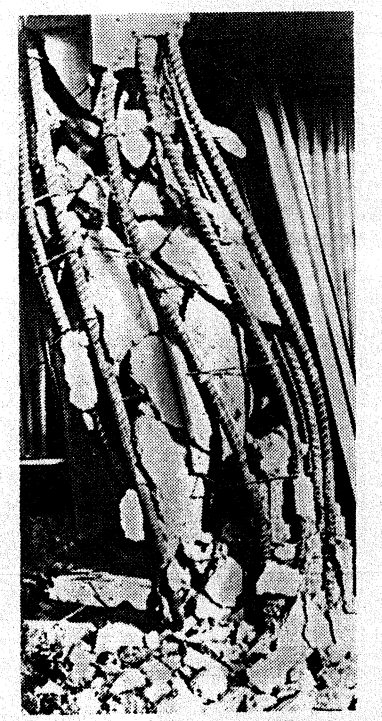


Fig. *9.33*
San Fernando/*California*/, *9 februarie 1971*, Cedarea casantă a unui stîlp de B/A insuficient confinat cu ştrieri.

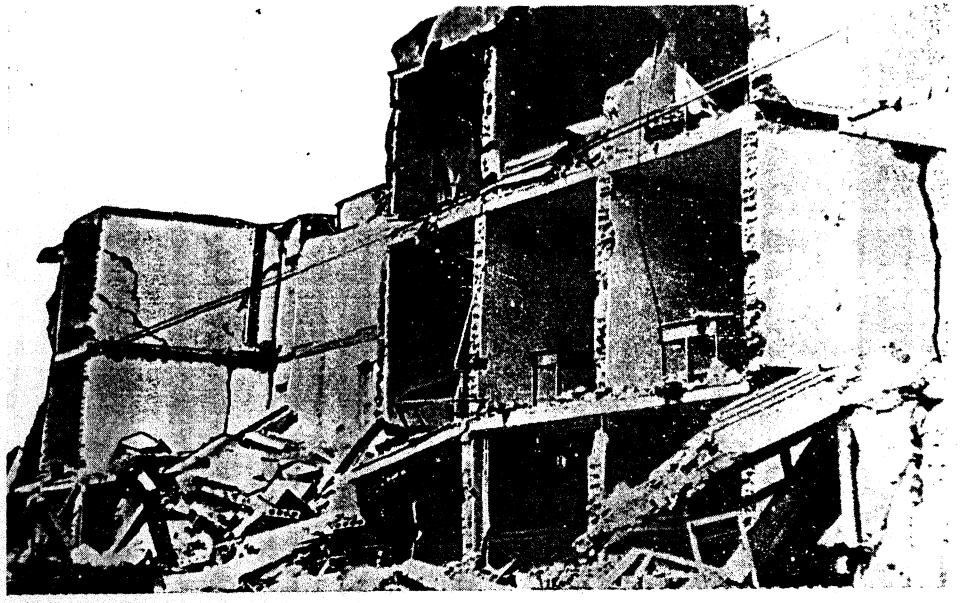


Fig. 9.34
Tangshan/*China*/, *28 iulie 1976.* Colaps parţial al unei clădiri cu pereţi din zidărie portantă nearmată şi planşee din B/A prefabricate.

Fig. 9.35
Tangshan/*China*/, *28 iulie 1976.* Flambajul liniilor de cale ferată datorită deformaţiilor terenului.

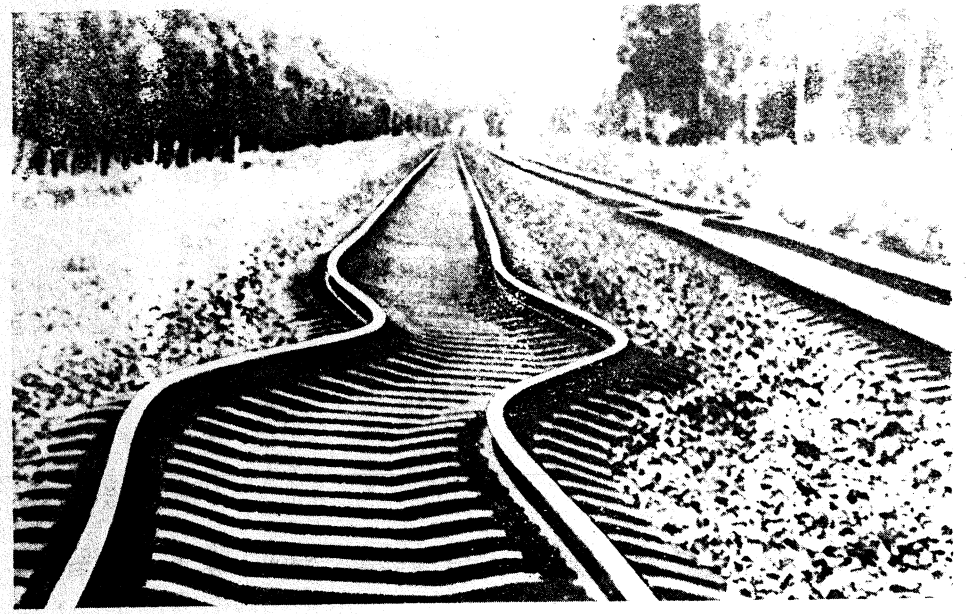




Fig. 9.36
București, *4 martie 1977.* Cedarea totală a stilpilor de la parterul unui tronson al unei structuri de B/A, construită înainte de 10 noiembrie 1940.



Fig. 9.37
București, *4 martie 1977.* Colaps parțial al unei structuri de B/A construită înainte de 10 noiembrie, 1940.



Fig. 9.38
București, *4 martie 1977.* Colaps parțial al unei structuri de B/A construită înainte de 10 noiembrie 1940.



Fig. 9.39
București, *4 martie 1977.* Prăbușirea unui tronson al unei structuri de B/A cu parter flexibil, construită înainte de 10 noiembrie 1940.



Fig. 9.40
București, *4 martie 1977.* Deschiderea unui rost de separare și dislocarea unui stîlp, în dreptul suprafeței de întrerupere a turnării betonului.



Fig. 9.41.
București, *4 martie 1977.* Cedarea casantă a unui nod de cadru din B/A.

Fig. 9.42
București, *4 martie 1977.* Avarierea unui stîlp armat longitudinal întîmplător și fără etrieri.



Fig. 9.43
București, *4 martie 1977.* Avarierea unui stîlp datorită discontinuității geometrice și întreruperii armăturilor neconfinate.



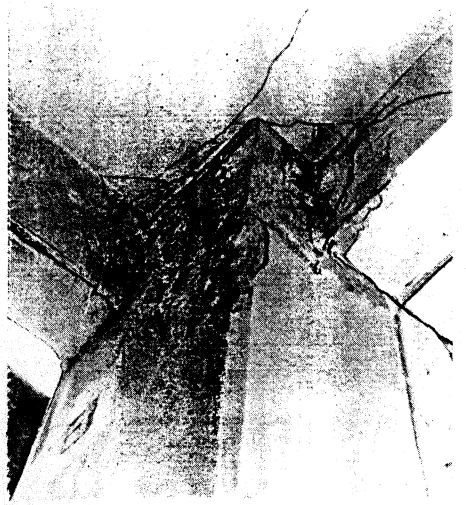


Fig. 9.44
București, *4 martie 1977.* Degradări cu caracter ductil ale secțiunilor de la extremitățile unor grinzi, conectate excentric cu un stîlp rigid.

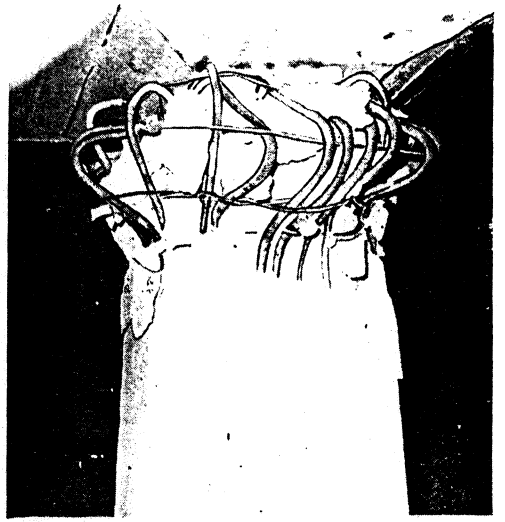


Fig. 9.45
București, *4 martie 1977.* Cedarea casantă a capătului superior al unui stîlp, din efectul combinat al solicitărilor.

Fig. 9.46
București, *4 martie 1977.* Rupere casantă a unui stîlp din beton de marcă inferioară, cu armături eronat poziționate și fără etrieri.



Fig. 9.47
București, *4 martie 1977.* Cedare casantă a unui stîlp subdimensionat și necorespunzător confinat.





Fig. 9.48
București, *4 martie 1977.* Distrugerea casantă a unui stilp prin forfecare, datorită lipsei armăturilor de confinare.

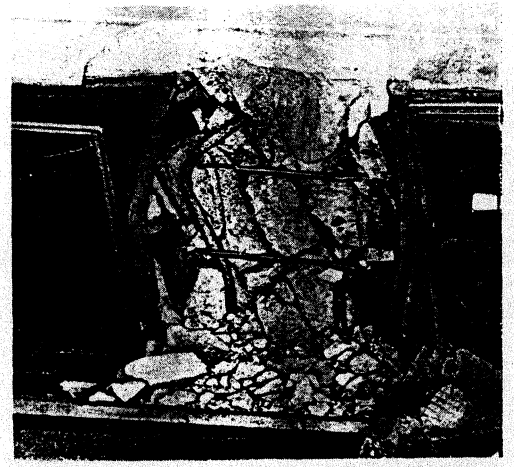


Fig. 9.49
București, *4 martie 1977.* Cedarea casantă a unui stilp „captiv", având o confinare subdimensionată.

Fig. 9.50
București, *4 martie 1977.* Ruperea unui stilp la bază din efectul combinat al solicitărilor, datorită unei confinări locale necorespunzătoare.



Fig. 9.51
București, *4 martie 1977.* Cedare caracteristică a unui stilp scurt, insuficient armat și confinat.



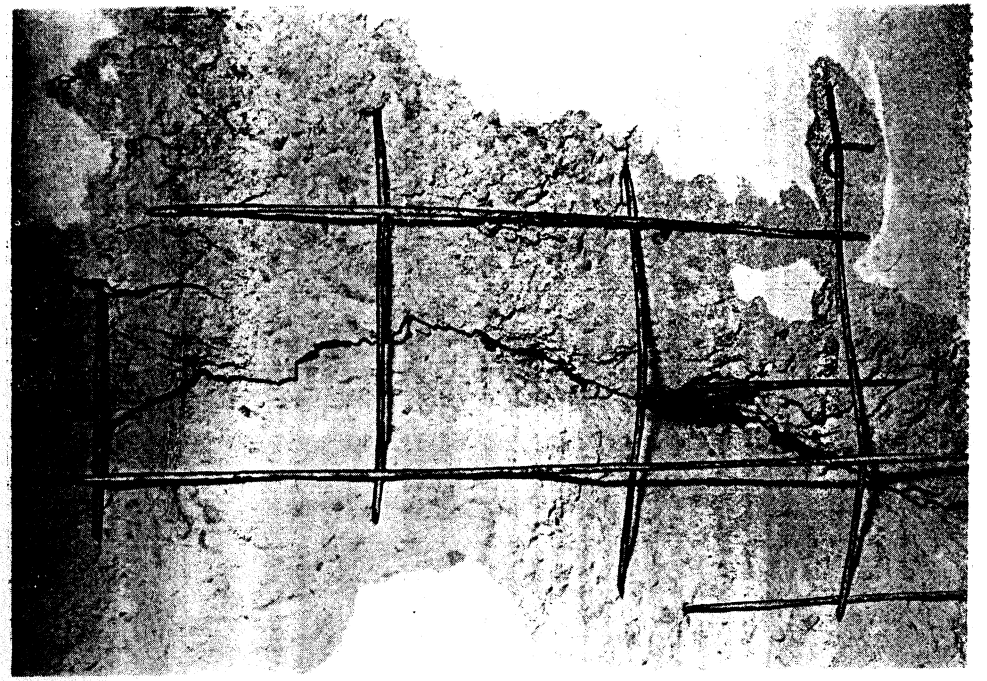


Fig. 9.52
București, *4 martie 1977.* Fracturarea peretelui unei diafragme slab armată.

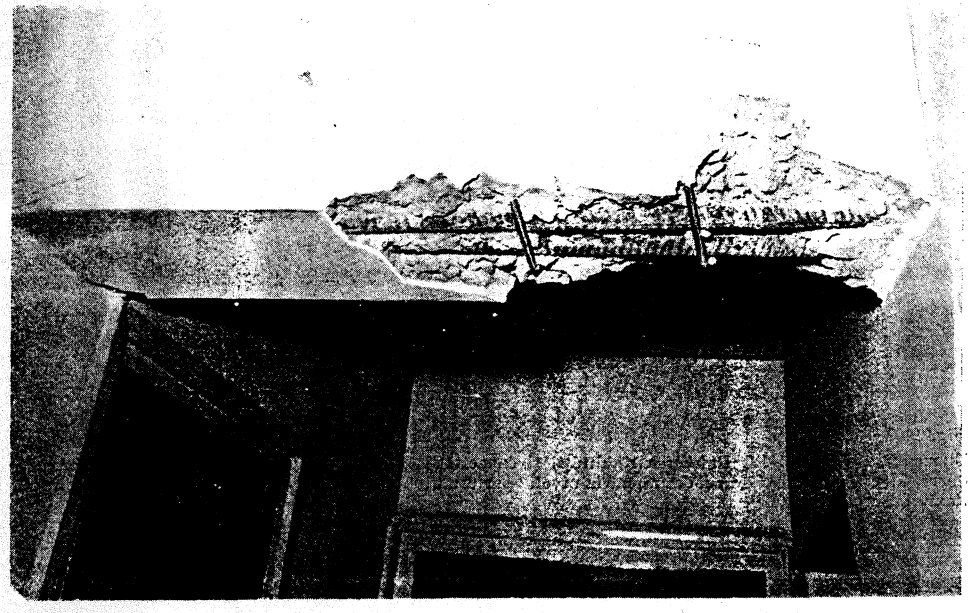


Fig. 9.53
București, *4 martie 1977.* Degradarea riglei de cuplare a unei diafragme, incorect ductilizată.

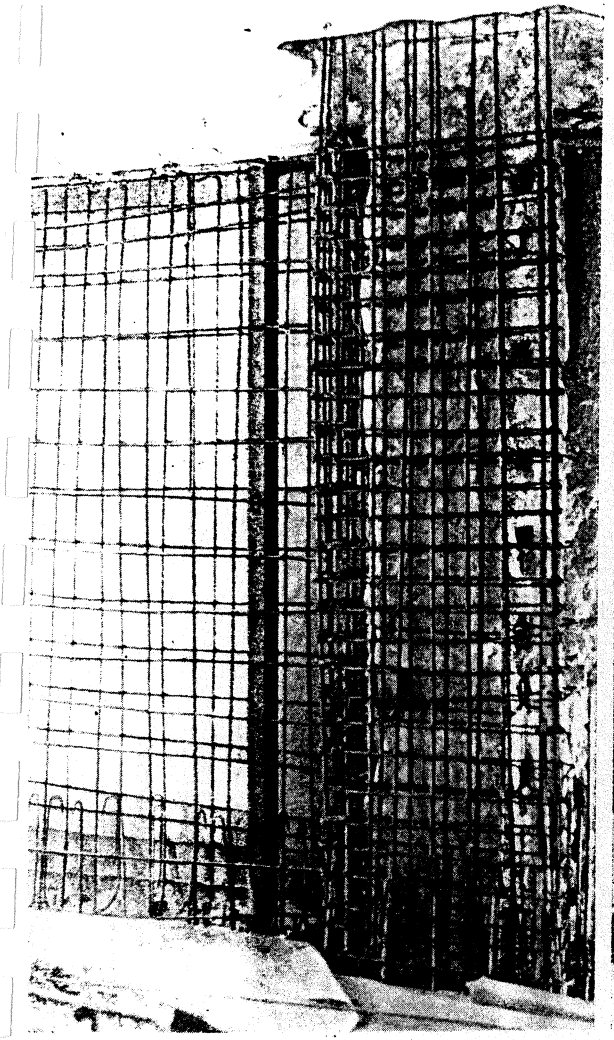


Fig. 9.58
București, *4 martie 1977.* Refacerea rigidității și capacității de rezistență, prin crearea unei diafragme la nivelul parterului flexibil.



Fig. 9.59
București, *4 martie 1977.* Refacerea integrală a unui stîlp complet avariat.

Dintre implicațiile de ordin tehnic care rezultă din incertitudinile privitoare la configurare și comportare seismică a unităților structurale, se menționează:

— descentrarea pozițiilor centrelor de rigiditate *C.R* în raport cu centrele de greutate (masice) *C.G*, care contribuie la apariția fenomenului defavorabil de *torsiune generală* (în mod deosebit la construcțiile avînd forme în plan nesimetrice (L, T, U, Y, Z) sau lamelare);

— *deplasări laterale excesive*, în special la structurile în cadre flexibile sau în diafragme cu parter deschis, care afectează componentele structurale și „nestructurale" verticale, generînd momente suplimentare prin efectul $P - \Delta$ de ordinul II;

— *transfer defavorabil al deformațiilor* între componentele verticale și orizontale, prin intermediul conexiunilor, și apariția aleatoare a degradărilor locale și articulațiilor plastice;

— *concentrarea și localizarea solicitărilor maxime* la nivelul parterului și primului etaj al structurii, creîndu-se astfel *posibilitatea formării prematuri a mecanismelor de cedare*;

— solicitări neuniforme în elementele verticale de rezistență (stîlpi și pereți portanți) care pot produce *cedări cu caracter casant*;

— *tendințe de dislocare* și chiar separarea completă a componentelor sau subansamblurilor structurale, a căror rigiditate este cu mult diferită de a celor cu care sînt conectate (incompatibilitate elastică);

— *degradări locale sau cedări* ale componentelor structurale cu sensibilități seismice importante, fără proprietăți postelastice și incompatibil asociate cu ansamblul structural;

— *dezechilibrări puternice* ale unităților structurale, precum și degradarea *componentelor de rezistență captive*, ca urmare a distribuției întîmplătoare a elementelor „nestructurale" de tipul pereților de închidere și de compartimentare;

— *amplificări* datorate acordării întîmplătoare a caracteristicilor dinamice structurale cu cele specifice mișcării seismice (spectrale);

— *definirea capacității de disipare* (amortizare) și absorbție prin deformații elastice, postelastice și fenomene de histerezis.

Incertitudini în privința comportării și factorii de risc potențiali pot genera și erorile existente în *detaliile constructive:* transmiteri indirecte ale încărcărilor, disproporții elastice și dezaxări geometrice ale componentelor conectate, dispoziția defectuoasă a armăturii în elemente și conexiuni, ductilizarea întîmplătoare a unor componente structurale (în special la forfecare sau compresiune), inadaptabilitate postelastică a zonelor critice datorită confinării reduse, insuficienta acoperire cu beton a armăturilor, compartimentări excentrice, inexistența rosturilor de separație (sau prea înguste), fenomene de oboseală, coroziune și degradare în timp etc.

● *Condițiile locale ale terenului din amplasament*, menționate și în § 9.3.2, prezintă numeroase incertitudini în privința definirii poziției rocii de bază, a stratigrafiei și a proprietăților fizico-mecanice și dinamice (caracteristici elastice, viteze de propagare, perioade predominante, fenomene posibile de amplificare, focalizare și de filtrare dinamică). Încă nu este pe deplin elucidat fenomenul de interacțiune teren-structură, precum și influența tipului de fundație adoptat. În elaborarea proiectelor de rezistență există încă serioase incertitudini asupra evaluării masei de teren aferente structurii în timpul mișcării, precum și asupra modului de deformare a terenului și rezistenței la forfecare în regim dinamic. De asemenea, sînt dificil de anti-

cipat fenomenele posibile de modificare a suprafeței libere a terenului prin fenomene de faliere, alunecare, tasare, lichefiere etc., care reprezintă factori de risc potențiali.

● *Analiza numerică* bazată pe modele mecanice și matematice convenționale reprezintă o sursă de risc dintre cele mai importante. Ipotezele care stau la baza modelării unităților structurale, începînd cu proprietățile materialelor puse în operă și terminînd cu schematizările geometrice, conțin numeroase incertitudini de care elaboratorii proiectelor sînt avizați. Numeroasele metode de analiză, în domeniul elastic și postelastic, care s-au dezvoltat în ultimul timp au creat confuzie și chiar suspiciuni în rîndul beneficiarilor, avînd în vedere și rezultatele contradictorii care se obțin în anumite situații. Analiza numerică nu poate furniza certitudini cu privire la aspectele fenomenologice, ci numai asupra rezolvărilor sofisticate din punct de vedere matematic prin tehnică de calcul de vîrf. În același timp metodele de dimensionare și asigurare ale componentelor de rezistență (mai ales ale structurilor din B/A) prezintă încă incertitudini majore, în special în cazul solicitărilor compuse.

● *Normativele de proiectare antiseismică* sînt acte provizorii (cu caracter tranzitoriu) în care se stipulează procedee de calcul simplificate și măsuri constructive corespunzătoare, pe baza experienței acumulate într-o anumită perioadă de dezvoltare a ingineriei seismice. În asemenea norme intervin numeroase incertitudini și factori de risc cu privire la modul simplist în care sînt evaluate caracteristicile mișcării seismice și ale structurilor, influența terenului de fundație, capacitatea de amortizare, precum și nivelul forțelor de proiectare bazat pe comportarea elastică a structurilor.

● *Starea efectivă a construcției*, în momentul producerii cutremurului, prezintă multe incertitudini cu privire la conservarea în timp a caracteristicilor structurale și funcționale ale construcțiilor. În decursul timpului, proprietățile fizico-mecanice se alterează, înregistrîndu-se degradări ale elementelor de rezistență și prin fenomene de curgere lentă (sau fluaj), coroziune, oboseală etc., ceea ce contribuie la modificarea răspunsului așteptat, precum și la comportarea întîmplătoare pe durata mișcării seismice.

● *Cercetarea teoretică și experimentală*, cu toate progresele înregistrate, se confruntă încă cu incertitudini care pot deveni importanți factori de risc dacă extrapolarea rezultatelor obținute nu se face cu discernămînt. Investigațiile efectuate pînă în prezent n-au condus încă la un concept unitar și general cu privire la stabilitatea unui model de calcul care să reflecte complexitatea fenomenelor care guvernează comportarea reală a structurilor, indiferent de configurația și particularitățile constructive. În multe situații, efectele cutremurelor au infirmat modelele de analiză propuse de cercetările efectuate pe machete sau pe prototipuri. Încă nu au fost clarificate în suficientă măsură proprietățile postelastice și histeretice ale componentelor și unităților structurale, aspectele energetice cumulative, degradările controlate, mecanismele optime de cedare ultimă etc. la acțiuni ciclice intensive. Analizele probabilistice și studiile parametrice vor putea în viitor să dea un răspuns favorabil numeroaselor probleme rămase în domeniul incertitudinilor.

● *Calitatea execuției și materialelor*, așa cum rezultă din întreaga literatură de specialitate, deține primul loc în privința incertitudinilor și factorilor de risc, întrucît este responsabilă în majoritatea cazurilor, de marile dezastre înregistrate. În acest sens, dacă în procesul de execuție nu se respectă cu rigurozitate calitățile materialelor și tehnologiile de realizare prevăzute, proiectul va reprezenta o construcție convențională, fără corespondent în realitate. Principalii factori de risc și de incertitudine în comportare provin din abateri geometrice peste limitele tolerabile, transportul și punerea în operă a betoanelor în condiții climatice nefavorabile, segregarea betonului, ancorări insuficiente, înnădirea armăturilor în zonele critice, lipsa etrierilor sau deplasarea acestora, noduri nearmate, întreruperea turnării betonului în secțiuni periculoase, închiderea unor rosturi de separație între tronsoanele clădirilor etc. În aceste condiții inginerul structurist concepe și calculează de fapt un desen de construcție, căruia îi atribuie apriori anumite proprietăți materiale. Dacă prevederile proiectului nu sînt respectate cu strictețe, atunci ciclul proiectare-execuție nu se va închide niciodată în favoarea rezistenței, stabilității și durabilității structurilor.

● *Pregătirea profesională* a celor investiți cu responsabilitatea proiectării sau executării construcțiilor rezistente la cutremure. Lipsa unui personal calificat în activitățile specifice de inginerie seismică s-a manifestat negativ în multe țări situate în zone seismice. Transmiterea cunoștințelor, cu caracter general sau de strictă specialitate, trebuie realizată de la primele trepte ale învățămîntului tehnic și continuate, prin selecție, pînă la cursurile cu caracter postuniversitar. Practica a arătat că slaba pregătire profesională a provocat uneori daune mai mari chiar decît fenomenul seismic ca atare, reprezentînd un factor de risc major.

9.9.2. Factori subiectivi de incertitudine și de risc

Experiența internațională a cutremurelor puternice a pus în evidență existența unor factori de incertitudine și de risc necontrolabili în procesul inițial de elaborare a proiectelor de rezistență și de execuție a lucrărilor. Din păcate, numai consecințele nefaste, uneori dezastruoase, ale cutremurelor, au permis identificarea acestor factori, asupra cărora este încă destul de dificil de acționat.

Dintre factorii de risc și de incertitudine subiectivi se menționează cei mai frecvent semnalați pe baza investigațiilor postseismice:

● Gradul de aglomerare al construcției în momentul producerii cutremurului.

● Momentul producerii cutremurului (ziua, noaptea, anotimpul etc.).

● Panica generată de efectele psihofiziologice.

● Educarea „seismică" a populației, în vederea cunoașterii măsurilor minime de prevenire a unor accidente.

● Superficialitate și incompetență profesională.

● Frauda personalului care asigură calitatea și cantitatea materialelor puse în operă.

● Decizii eronate ale factorilor responsabili (de decizie).

● Accidente de circulație (rutiere sau C.F).

● Incendii, explozii sau inundații.

● Alunecări masive de terenuri.

● Nesincronismul accentuat al mișcării seismice, care poate produce descentrări importante ale construcțiilor.

Toți factorii de risc și de incertitudine au caracter aleator. Analiza acestora poate fi abordată pe baze probabilistice, în vederea stabilirii unor măsuri concrete care să contribuie la limitarea sau evitarea efectelor sociale și economice negative, la un viitor cutremur.

9.10. UNELE OBSERVAȚII ȘI CONCLUZII

Experiența seismică din ultimele decenii a contribuit în mod substanțial la progresul științific și tehnic în asigurarea protecției antiseismice a construcțiilor. Cei mai importanți factori, cu rol hotărîtor în privința comportării favorabile a unei structuri sînt reprezentați prin *conceptul de bază al configurării inițiale a sistemului de rezistență, calitatea materialelor și corectitudinea execuției*.

În toate etapele de decizie asupra criteriilor și parametrilor care intervin în evaluarea nivelului de asigurare sau riscului seismic, se vor avea în vedere *consecințele sociale și economice* ale unui viitor cutremur. Protecția antiseismică a construcțiilor constituie o activitate colectivă la care își aduc contribuția, pe lîngă inginerii constructori, seismologii, geologii, geofizicienii, geodezii etc.

Recentele evenimente seismice, printre care și cutremurul din România din 4 martie 1977, au arătat că tratarea corectă din toate punctele de vedere a unei structuri (în corelare directă cu intensitatea cutremurului și condițiile locale de teren), poate asigura o comportare satisfăcătoare a construcției chiar la acțiuni mai intensive decît cele așteptate.

Realizarea construcțiilor rezistente la cutremure puternice, care să protejeze în condiții de siguranță viețile și bunurile materiale, reprezintă un act moral care implică atît responsabilitate tehnică, cît și socială și economică, unde incompetența și improvizația tehnică sînt total excluse.

Proiectarea antiseismică a structurilor (indiferent de importanța sau destinația acestora) este o operă de creație și concepție, care pretinde din partea celui angajat într-o asemenea activitate vaste cunoștințe teoretice și practice și o probitate profesională desăvîrșită.

Spre deosebire de proiectarea structurilor în concept gravitațional, în procesul proiectării antiseismice intervin judecăți și interacțiuni atît de complexe încît, de fiecare dată, proiectantul se află în fața unei situații unice a cărei tratare individualizează, nu numai construcția respectivă, ci și pe creatorul ei.

Cerințele referitoare la pregătirea profesională multilaterală a inginerilor de concepție reies și din remarca făcută de profesorii N.M. Newmark și E. Rosenblueth [147]: *If a civil engineer is to acquire fruitful experience in a brief span of time, expose him to concepts of earthquake engineering, no matter if he is later not to work in earthquake country*" (Dacă un inginer constructor vrea să acumuleze experiență fructuoasă într-un interval de timp scurt, el trebuie să-și însușească conceptele ingineriei seismice, chiar dacă nu va lucra ulterior în acest domeniu).

Paradoxal este faptul că mișcarea seismică reprezintă unicul eveniment natural în timpul căruia omul își părăsește propria sa creație. Avînd în vedere aria de proliferare și proporțiile unor posibile distrugeri, efectele devastatoare și psihologice ale cutremurelor puternice nu pot fi comparate cu nici o altă calamitate naturală sau chiar artificială.

Asigurarea integrității unei construcții pe timpul unui cutremur depinde de numeroși factori cu caracter mai mult sau mai puțin obiectiv. Niciodată însă nu se vor putea justifica, prin argumente și criterii economice, dezastrele și tragediile umane.

Partea a III-a

METODE SIMPLIFICATE DE CALCUL

10

EVALUAREA CARACTERISTICILOR ELASTICE ŞI DINAMICE ALE STRUCTURILOR

În vederea efectuării unei analize seismice directe, se vor prezenta unele metode şi procedee aproximative de calcul care permit evaluarea principalelor caracteristici structurale, în limite acceptabile de valabilitate.

Exprimarea răspunsului seismic prin efectuarea unei analize dinamice în timpul istoric al aplicării acţiunii, prin aplicarea teoriei spectrelor de răspuns sau pe baza normelor avansate de protecţie antiseismică, necesită determinarea prealabilă a valorilor (perioade, frecvenţe, pulsaţii) şi vectorilor (forme) proprii, care reprezintă caracteristici dinamice proprii ale structurilor. Din studiul sistemelor cu mai multe grade de libertate (nGLD), prezentat în capitolele 3 şi 4, a rezultat că determinarea valorilor şi vectorilor proprii se bazează pe cunoaşterea caracteristicilor elastice structurale definite prin matricele de flexibilitate sau de rigiditate. De asemenea, în operaţia de distribuţie a forţelor seismice la componentele constitutive ale structurii de rezistenţă, intervin caracteristicile elastice ale elementelor structurale asociate. În cazul structurilor etajate acţionate de forţe orizontale, cea mai semnificativă caracteristică elastică o reprezintă rigiditatea, întrucît oferă o imagine mai clară asupra proprietăţilor de deformabilitate ale modelului dinamic adoptat. În general se poate afirma că mărimea şi distribuţia rigidităţilor laterale (pe direcţia GLD) constituie factorii esenţiali care guvernează comportarea de ansamblu a unei structuri la acţiuni orizontale provenite din mişcări seismice, vînt în rafale, explozii etc. De altfel, proporţionarea şi dimensionarea rigidităţilor elementelor de rezistenţă, a substructurilor componente şi în final a structurii în totalitatea sa, definesc configuraţia elastică a sistemului dinamic.

În cuprinsul acestui capitol vor fi expuse unele metode şi procedee directe pentru calculul rigidităţilor laterale, perioadelor şi formelor proprii de vibraţie. Scopul final al acestor formulări, cu caracter aproximativ, constă în simplificarea operaţiilor numerice în proiectarea antiseismică bazată pe conceptul de prescripţie de calcul, precum şi în furnizarea unor valori iniţiale la proiectarea preliminară a structurilor speciale.

10.1. RIGIDITĂŢI RELATIVE DE NIVEL ALE STRUCTURILOR PLANE

Definirea riguroasă a caracteristicilor de rigiditate în raport cu coordonatele dinamice ale modelului elastic admis pentru structurile plane a fost expusă în capitolul 1. Rigidităţile unui sistem elastic, notate prin R, reprezintă în general un ansamblu de acţiuni cu caracter particular care produce deplasări egale cu unitatea pe anumite direcţii impuse. Întrucît o structură se poate defini ca o asociere a unor elemente de rezistenţă componente, într-un anumit sistem specific de conexiuni, rezultă că pot fi puse în evidenţă trei categorii de caracteristici de rigiditate, şi anume: *rigiditate de element* (fig. 10.1, *a*), *rigiditate de substructură* sau subansamblu structural (fig. 10.1, *b*) şi *rigiditate*

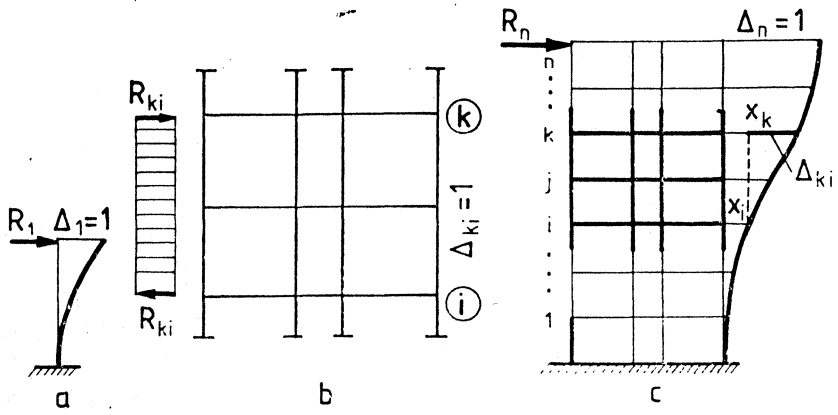


Fig. 10.1

de structură sau ansamblu structural (fig. 10.1, *c*). În categoria rigidităţilor de substructură (parţiale) se încadrează şi rigidităţile relative de nivel, deoarece permit caracterizarea completă a comportării unei structuri la acţiuni laterale.

10.1.1. Structuri în cadre formate din bare drepte

Se consideră structura etajată din figura 10.2 avînd n niveluri ($k = 1,2 \ldots n$) şi m şiruri de stîlpi ($s = 1,2, \ldots m$), acţionată lateral pe direcţia gradelor de libertate dinamice (GLD) cu un sistem de forţe F_k. Prin definiţie, rigiditatea relativă dintre două niveluri consecutive k şi j, numită şi *rigiditate relativă de nivel*, reprezintă raportul dintre forţa tăietoare de etaj $\mathcal{T}_{jk}$ şi deplasarea relativă Δ_{kj} dintre nivelurile k şi j, adică

$$R_{kj} = \frac{\mathcal{T}_{jk}}{\Delta_{kj}}.$$

Din această definiţie rezultă că rigiditatea relativă de nivel depinde de încărcările laterale efective, precum şi de configuraţia deformatei sistemului structural. Cu toate acestea, rigiditatea relativă de nivel poate fi definită independent de sistemul de acţiuni laterale, prin forţa tăietoare localizată la etajul (j, k) care produce o deplasare relativă între nivelurile k şi j egală cu

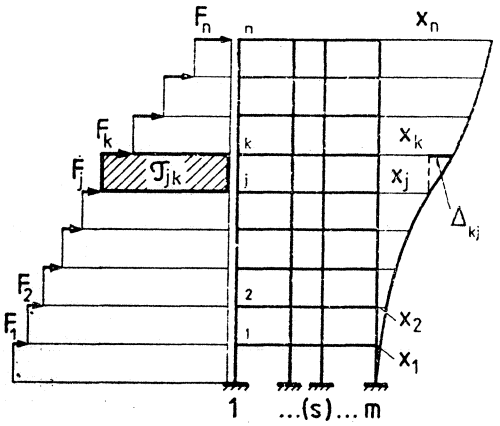


Fig. 10.2

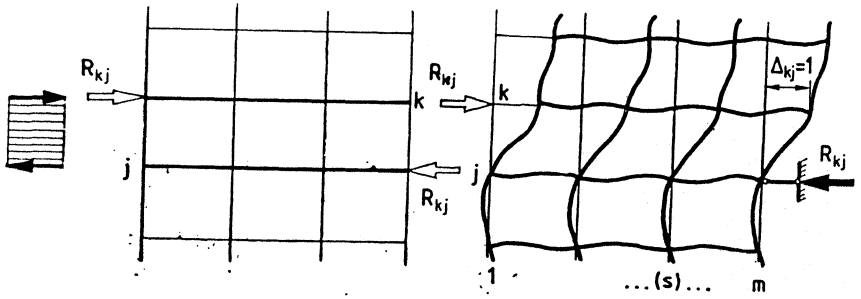


Fig. 10.3

unitatea ($\Delta_{kj} = 1$). Această ultimă definiție corespunde sistemului particular de forțe admis în figura 10.3.

Conceptul de rigiditate relativă de nivel, în analiza elastică a structurilor etajate acționate de forțe orizontale, a fost introdus pentru prima dată de T. Naito [142] în Japonia. Studii ulterioare în această privință au fost elaborate de K. Muto [139], J. B. Wilbur [201], J. A. Blume, N. M. Newmark, J. A. Corning [28], C. Palacios [152], Em. Țițaru, Al. Cișmigiu [191], B. Cardan [37], M. Ifrim [94], [96], [99], [101], [104].

Cunoscînd rigiditățile relative de nivel, se poate genera matricea de rigiditate laterală a structurii și de asemenea se pot determina direct deplasările orizontale relative și absolute produse de orice sistem de acțiuni laterale:

$$x_k = x_j + \Delta_{kj} = \sum_{i=1}^{k} \Delta_{i,i-1} \qquad (10.1)$$

unde

$$\Delta_{i,i-1} = \frac{\mathcal{T}_{i-1,i}}{R_{i,i-1}} \quad (i = 1, 2, ...)$$

Pe baza anumitor modele elastice simplificatoare, unii autori au stabilit expresii directe pentru calculul rigidităților relative de nivel ale structurilor etajate plane, formate din bare drepte cu secțiune constantă. Aceste formule, accesibile aplicațiilor numerice din proiectarea antiseismică a structurilor în cadre și satisfăcătoare în cazul sistemelor cu configurație obișnuită, au fost propuse de K. Muto [139], J.B. Wilbur [201], J.A. Blume, N.M. Newmark, J.A. Corning [28], [29] și M. Ifrim [94], [99], [101].

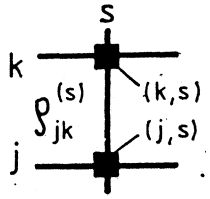
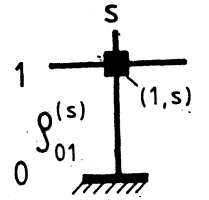
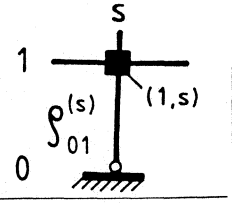
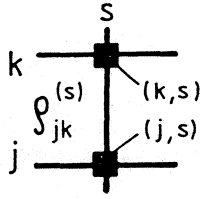
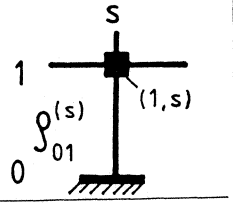
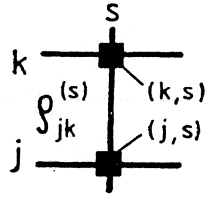
În tabelul 10.1 sînt prezentate formulele care permit evaluarea directă a rigidităților relative de nivel, exprimate într-o formă unitară pe baza transformărilor și notațiilor care se expun în continuare.

Rigiditatea relativă de nivel a unui stîlp s oarecare, cuprins între etajele k și j ale structurii din figura 10.2, se exprimă prin următoarea relație:

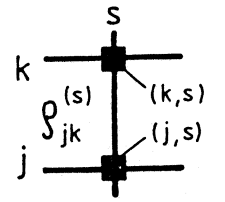
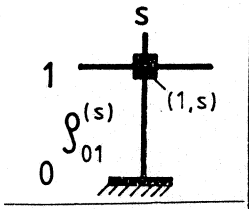
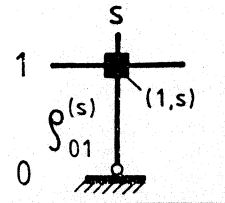
$$R_{kj}^{(s)} = A_{kj}^{(s)} R_{kj}^{(s)}(\infty), \qquad (10.2)$$

unde $R_{kj}^{(s)}(\infty)$ definește rigiditatea stîlpului s în cazul în care nodurile (k, s) și (j, s) au numai deplasări de translație (fără să se rotească), ceea ce corespunde situației în care grinzile ar fi perfect rigide (cu rigiditate infinită), iar

TABELUL 10.1

NR.	NUMELE AUTORULUI	SCHEMA DE CALCUL	EXPRESIA FACTORULUI $A_{kj}^{(s)}$
1	K. MUTO		$\frac{\bar{\rho}_{jk}^{(s)}}{2 + \bar{\rho}_{jk}^{(s)}}$
			$\frac{0,5 + \bar{\rho}_{01}^{(s)}}{2 + \bar{\rho}_{01}^{(s)}}$
			$\frac{0,5\,\bar{\rho}_{01}^{(s)}}{1 + 2\bar{\rho}_{01}^{(s)}}$
2	J. B. WILBUR		$1 - 0,5(d_{jk}^{(s)} + d_{j,j-1}^{(s)} + d_{kj}^{(s)} + d_{k,k+1}^{(s)})$
			$1 - 0,5(d_{1,0}^{(s)} + d_{1,2}^{(s)})$
3	J. A. BLUME N. M. NEWMARK J. A. CORNING		$1 - (d_{jk}^{(s)} + d_{kj}^{(s)})$

TABELUL 10.1 (continuare)

NR.	NUMELE AUTORULUI	SCHEMA DE CALCUL	EXPRESIA FACTORULUI $A_{kj}^{(s)}$
4	M. IFRIM		$1 - 0{,}75(d_{jk}^{(s)} + d_{kj}^{(s)} - d_{jk}^{(s)} d_{kj}^{(s)})$
			$1 - 0{,}75 d_{1,0}^{(s)}$
			$0{,}25(1 - d_{1,0}^{(s)})$

$A_{kj}^{(s)}$ reprezintă *factorul de corecție* prin care se introduce influența rotirii nodurilor (k, s) și (j, s), datorită flexibilităților efective ale grinzilor și a deformabilităților stîlpilor de la etajele adiacente celui analizat (j, k). Definirea acestor mărimi rezultă și din figurile 10.4, *a* și *b*.

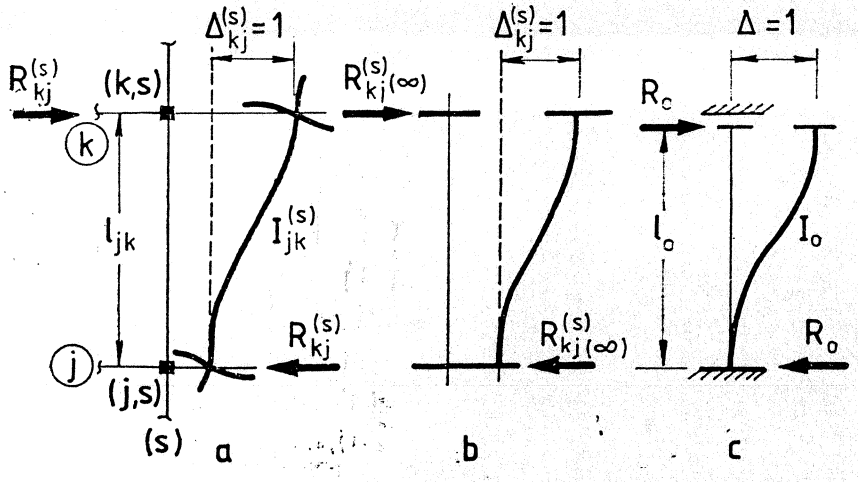


Fig. 10.4

Pentru simplificarea expresiilor de calcul ale rigidităților relative (10.2), se vor introduce următoarele notații cu privire la exprimarea caracteristicilor geometrice și elastice ale structurii:

$I_{jk}^{(s)} = k_{jk}^{(s)} I_0$ — momentul de inerție efectiv al stîlpului *s* de la etajul (j, k);

$l_{jk} = \lambda_{jk} l_0$ — distanța dintre nivelurile *j* și *k*, egală cu înălțimea etajului (j, k) considerată constantă la fiecare nivel;

$\rho_{jk}^{(s)} = \dfrac{k_{jk}^{(s)}}{\lambda_{jk}}$ — rigiditatea convențională (adimensională) a stîlpului considerat.

În aceste notații, I_0 și l_0 reprezintă mărimi arbitrare, de referință, pentru momentele de inerție și pentru barele structurii. Prin utilizarea acestor notații rezultă:

$$R_{kj}^{(s)}(\infty) = \frac{12EI_{jk}^{(s)}}{l_{jk}^3} = \frac{\rho_{jk}^{(s)}}{\lambda_{jk}^2} \cdot \frac{12EI_0}{l_0^3} = \frac{\rho_{jk}^{(s)}}{\lambda_{jk}^2} R_0, \tag{10.3}$$

iar prin înlocuire în relația (10.2)

$$R_{kj}^{(s)} = \frac{\rho_{jk}^{(s)}}{\lambda_{jk}^2} A_{kj}^{(s)} R_0 = r_{kj}^{(s)} R_0. \tag{10.4}$$

În expresia (10.4) s-a notat cu

$$R_0 = \frac{12EI_0}{l_0^3}, \tag{10.5}$$

rigiditatea absolută de referință (dimensională) a stîlpilor, așa cum rezultă și din figura 10.4, *c*, iar cu

$$r_{kj}^{(s)} = \frac{\rho_{jk}^{(s)}}{\lambda_{jk}^2} A_{kj}^{(s)}, \tag{10.6}$$

coeficientul de rigiditate relativă de nivel (adimensional) corespunzător stîlpului *s* situat între nivelurile *k* și *j*. Coeficientul (10.6), care depinde de caracteristicile geometrice și elastice convenționale, se calculează prin intermediul factorului de corecție $A_{kj}^{(s)}$. Evaluarea numerică a acestui coeficient se face cu relațiile date în tabelul 10.1

Rigiditatea relativă a tuturor stîlpilor situați la etajul (j, k) rezultă

$$R_{kj} = \sum_{s=1}^{m} R_{kj}^{(s)}. \tag{10.7}$$

Dacă se ține seama de relațiile (10.2) și (10.4) se obține expresia generală a rigidității relative totale de nivel,

$$R_{kj} = \sum_{s=1}^{m} A_{kj}^{(s)} R_{kj}^{(s)}(\infty), \tag{10.8}$$

sau

$$R_{kj} = \sum_{s=1}^{m} r_{kj}^{(s)} R_0 = r_{kj} R_0, \tag{10.9}$$

unde

$$r_{kj} = \sum_{s=1}^{m} r_{kj}^{(s)} = \frac{1}{\lambda_{jk}^2} \sum_{s=1}^{m} \rho_{jk}^{(s)} A_{kj}^{(s)}, \tag{10.10}$$

reprezintă *coeficientul de rigiditate relativă totală de nivel*, corespunzător întregului etaj (j, k).

Utilizarea expresiei (10.9) în aplicațiile numerice este mai semnificativă întrucît pune în evidență variația rigidităților relative de nivel în funcție de coeficientul adimensional η_{kj} (10.10). În vederea proporționării rigidităților relative de nivel pe înălțimea unei structuri, operație necesară la stabilirea configurației structurale preliminare, coeficienții η permit identificarea elementelor de rezistență a căror rigiditate proprie ar urma să fie modificată. În acest mod se poate asigura o distribuție rațională a rigidităților laterale și evitarea unor discontinuități elastice, ceea ce contribuie la buna comportare a structurii în ansamblu la acțiuni seismice puternice.

Pentru a putea aplica și compara expresiile factorului de corecție propuse de autorii menționați în tabelul 10.1 a fost necesară unificarea tuturor notațiilor care intervin. În acest sens, ținînd seama de schema prezentată în figura 10.5, simbolurile utilizate în tabelul 10.1 au următoarele semnificații:

— în formulele propuse de *Muto*

$$\bar{\rho}_{jk}^{(s)} = \frac{\rho_{s-1,s}^{(k)} + \rho_{s,s+1}^{(k)} + \rho_{s-1,s}^{(j)} + \rho_{s,s+1}^{(j)}}{2\rho_{jk}^{(s)}}, \tag{10.11}$$

$$\bar{\rho}_{01}^{(s)} = \frac{\rho_{s-1,s}^{(1)} + \rho_{s,s+1}^{(1)}}{\rho_{01}^{(s)}} \tag{10.12}$$

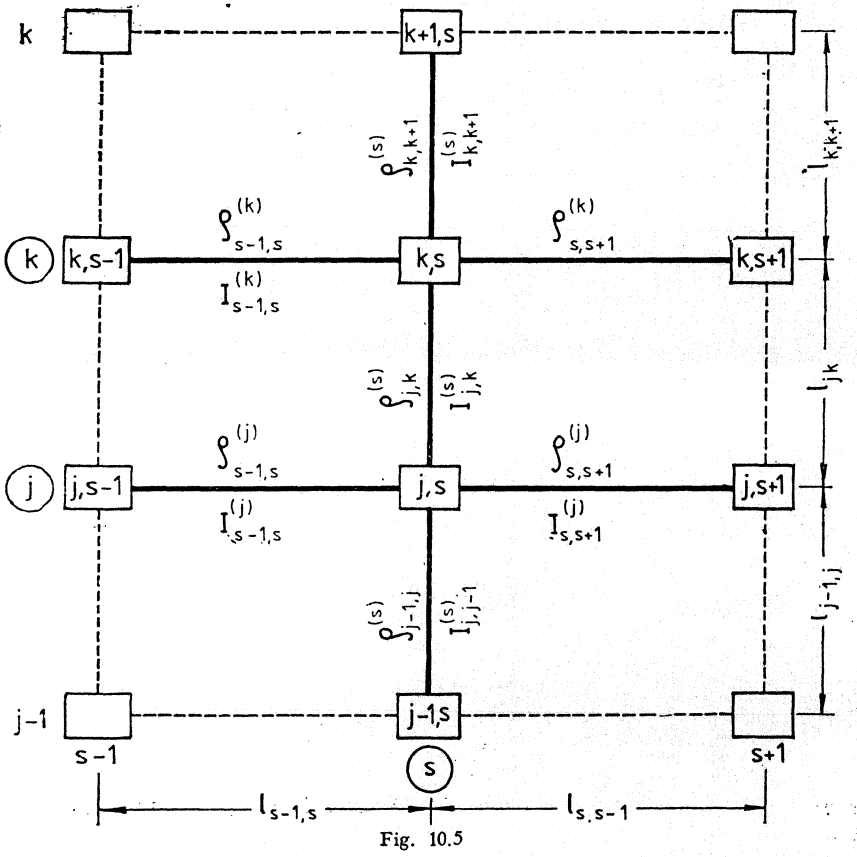


Fig. 10.5

— în formulele propuse de *Wilbur*, *Blume* și *Ifrim*

$$d_{jk}^{(s)} = \frac{\rho_{jk}^{(s)}}{\sum_{(j,s)} \rho}, \quad d_{kj}^{(s)} = \frac{\rho_{jk}^{(s)}}{\sum_{(k,s)} \rho} \tag{10.13}$$

unde

$$\sum_{(j,s)} \rho = \rho_{s-1,s}^{(j)} + \rho_{s,s+1}^{(j)} + \rho_{j-1,j}^{(s)} + \rho_{jk}^{(s)} \tag{10.14}$$

$$\sum_{(k,s)} \rho = \rho_{s-1,s}^{(k)} + \rho_{s,s+1}^{(k)} + \rho_{jk}^{(s)} + \rho_{k,k+1}^{(s)} \tag{10.15}$$

Relațiile (10.13) au semnificația unor coeficienți de distribuție, iar (10.14) și (10.15) reprezintă rigiditățile convenționale ale nodurilor (j, s) și (k, s). Pentru stîlpii situați la parterul structurii rezultă

$$d_{01}^{(s)} = 0, \quad d_{10}^{(s)} = \frac{\rho_{01}^{(s)}}{\sum_{(1,s)} \rho}, \tag{10.16}$$

unde

$$\sum_{(1,s)} \rho = \rho_{s-1,s}^{(1)} + \rho_{s,s+1}^{(1)} + \rho_{01}^{(s)} + \rho_{12}^{(s)}. \tag{10.17}$$

În general, formulele propuse de Muto, Wilbur și Blume dau rezultate satisfăcătoare cînd la fiecare etaj este îndeplinită relația

$$\frac{\Sigma\rho\ (grinzi)}{\Sigma\rho\ (stîlpi)} \geqslant 0{,}5 \tag{10.18}$$

Formulele de la poziția 4 din tabelul 10.1 au un domeniu mai larg de aplicabilitate fără a se cere restricții atît de severe în privința raportului (10.18). Se impune condiția ca momentele din stîlpii fiecărui etaj să schimbe de semn, adică să existe puncte de inflexiune pe înălțimea tuturor stîlpilor. Aplicațiile numerice efectuate [99], considerîndu-se o varietate de tipuri de structuri etajate cu configurații obișnuite, au demonstrat că rezultatele ce se obțin, prin utilizarea acestor formule diferă cu circa 5% de cele obținute printr-un calcul exact. Se menționează faptul că toate operațiile de calcul, avînd un pronunțat caracter elementar, se pot efectua sistematizat direct pe schema geometrică a structurii, așa cum rezultă din exemplul de calcul de la sfîrșitul capitolului.

În situația particulară și ipotetică a structurilor cu riglele perfect rigide ($I = \infty$) relațiile de mai sus devin

$$A_{kj}^{(s)} = 1, \quad \eta_{kj} = \frac{1}{\lambda_{jk}^{o}} \sum_{s=1}^{m} \rho_{jk},$$

și în consecință, expresia rigidității relative totale de nivel se reduce la forma simplă cunoscută. În cazul structurilor etajate obișnuite, totdeauna

$$0 < A_{kj}^{(s)} < 1.$$

Toate expresiile de calcul conținute în tabelul 10.1 sînt deosebit de simple și ușor de aplicat, furnizînd rezultate satisfăcătoare din punct de vedere ingineresc. Utilizarea lor, mai ales în conformarea elastică preliminară a struc-

turilor, contribuie la evitarea unor operații de calcul laborioase care la rîndul lor pot constitui surse de erori.

Un studiu comparativ asupra expresiilor propuse pentru determinarea rigidităților relative de nivel, precum și definirea limitelor de valabilitate ale acestora a fost făcut în lucrarea [99].

10.1.2. Structuri în diafragme perforate

În lucrarea [104] au fost stabilite relațiile directe de calcul care permit evaluarea aproximativă a rigidităților relative de nivel ale structurilor etajate, alcătuite din diafragme perforate (cu goluri), din beton armat. Principalele ipoteze admise au fost următoarele: diafragmele au în general o geometrie uniformă, golurile sînt centrate pe verticală, înălțimea etajelor egală, numărul de niveluri suficient de mare (intervin și deformațiile de încovoiere), punctele de inflexiune se află la mijlocul deschiderii buiandrugilor, structura planșeelor este perfect rigidă în plan orizontal (disc rigid), iar comportarea pereților și buiandrugilor se situează în domeniul elastic. Caracteristicile geometrice ale elementelor structurale, precum și notațiile folosite sînt date în figura 10.6.

La stabilirea expresiilor de calcul ale rigidităților relative de nivel s-au luat în considerare atît efectul deformațiilor de încovoiere și de lunecare, cît și influența rotației secțiunilor transversale ale pereților (numiți și șpaleți) de la nivelul fiecărui planșeu.

Pentru calculul rigidităților relative dintre două niveluri consecutive, corespunzătoare unui singur șpalete s, ținînd seama și de contribuția buiandrugilor, s-a stabilit o relație asemănătoare cu (10.4)

$$R^{(s)}_{nivel} = \frac{12EI_s}{h^3} A^{(s)}_{nivel}, \tag{10.19}$$

unde, factorul de corecție $A^{(s)}_{nivel}$ are expresia:

$$A^{(s)}_{nivel} = \frac{1}{4 + 6(1-\alpha_s)\dfrac{d}{h} - 12\alpha_s\left(\dfrac{d}{h}\right)^2 + \dfrac{35}{h^2}\left(\dfrac{I_s}{A_s}\right)}. \tag{10.20}$$

Parametrul α_s care intervine în (10.20) se calculează astfel:

– pentru șpaleții marginali (fig. 10.6, *b*)

$$\alpha_1 = \frac{1}{\dfrac{1}{12}\dfrac{b^3}{dh^2}\left(\dfrac{I_1}{I_b}\right) + \dfrac{2d}{h}}, \quad d = d_1, \tag{10.21}$$

– pentru șpaleții interiori (fig. 10.6, *c*)

$$\alpha_s = \frac{1}{\dfrac{1}{24}\dfrac{b^3}{dh^2}\left(\dfrac{I_s}{I_b}\right) + \dfrac{2d}{h}}, \quad d = \frac{1}{2}(d'_s + d''_s). \tag{10.22}$$

Pentru întreaga diafragmă, rigiditatea relativă totală de nivel va fi

$$R_{nivel} = \sum_{s=1}^{m} R^{(s)}_{nivel}. \tag{10.23}$$

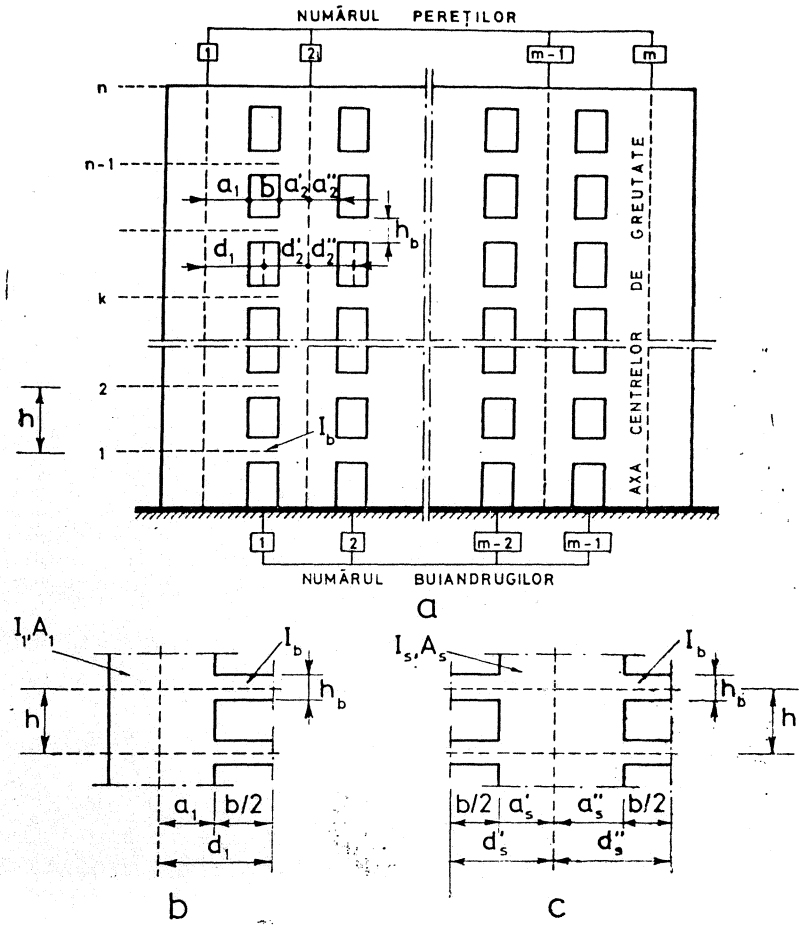


Fig. 10.6

10.1.3. Structuri în cadre cu pereți asociați

În situațiile în care structurile în cadre sînt prevăzute cu pereți de zidărie cu capacitate de rezistență la acțiuni laterale, în stadiul elastic de comportare intervine și influența rigidității acestora. Rigiditatea relativă de nivel totală se va exprima prin relația [99]:

$$R^*_{kj} = R_{kj} + R^z_{kj}, \tag{10.24}$$

unde R_{kj} reprezintă contribuția structurii (10.7), iar R^z_{kj} contribuția pereților de zidărie la rigiditatea relativă totală, avînd în vedere realizarea unei conlucrări intime cadru-perete.

Dacă se consideră în mod aproximativ numai influența deformațiilor de lunecare, expresia rigidității relative a unui perete de zidărie situat între nivelurile j și k rezultă

$$R_{kj}^{z} = \frac{G_z A_{net}}{c h_{jk}}, \tag{10.25}$$

în care s-au introdus notațiile:

A_{net} — suprafața netă a secțiunii transversale prin pereții de zidărie de la etajul (j, k);
G_z — modulul de elasticitate transversală a zidăriei;
c — coeficientul de formă al secțiunii, care în cazul formelor dreptunghiulare are valoarea 1,2;
h_{jk} — înălțimea efectivă a pereților de la etajul (j, k).

Pentru pereții din zidărie de cărămidă se poate admite $G_z \simeq 0{,}25\, E_z$ (E_z reprezentînd modulul de elasticitate longitudinală), încît formula (10.25) devine

$$R_{kj}^{z} \simeq 0{,}2 \frac{E_z A_{net}}{h_{jk}}. \tag{10.26}$$

Influența pereților de zidărie asupra rigidității relative totale poate fi pusă în evidență dacă relația (10.24) se scrie sub forma

$$R_{kj}^{*} = R_{kj}\left(1 + \frac{R_{kj}^{z}}{R_{kj}}\right) = \zeta_{kj} R_{kj}, \tag{10.27}$$

în care coeficientul

$$\zeta_{kj} = 1 + \frac{R_{kj}^{z}}{R_{kj}}, \tag{10.28}$$

are semnificația unui factor de participare a zidăriei la rigiditatea relativă totală. În general $\zeta_{kj} > 1$, iar în cazul în care pereții nu mai conlucrează cu structura de rezistență sau sînt deja fisurați, ca urmare a unui cutremur violent, factorul de participare devine egal cu unitatea ($\zeta_{kj} = 1$) și deci $R_{kj}^{*} = R_{kj}$. Această situație rezultă extrem de periculoasă dacă conlucrarea pereților cu structura a încetat în primele secvențe ale unui cutremur, deoarece solicitările seismice urmează a fi preluate integral de structura propriu-zisă. De aceea, introducerea influenței pereților de zidărie în analizele antiseismice trebuie să se facă cu mult discernămînt și precauție, prevăzîndu-se măsuri corespunzătoare de asigurare a conlucrării, atît în domeniul elastic, cît și în cel postelastic (prin înrămare sau armare), pe toată durata mișcării seismice. Este evident că rigiditățile relative de nivel ale unei structuri cu pereți din zidărie portantă se vor putea determina în mod aproximativ cu relația (10.26). Problemele specifice asocierii structurilor în cadre de beton armat cu pereții de zidărie, precum și efectele interacțiunii elastice și dinamice, sînt tratate, în mod aprofundat și sub toate aspectele, în lucrarea [42].

* * *

În privința determinării caracteristicilor inițiale (geometrice și fizice) ale structurilor care intervin în calculul rigidităților relative de nivel sînt necesare unele precizări care se prezintă în continuare.

● În cazul solicitărilor dinamice de scurtă durată, specifice acțiunilor seismice, modulul de elasticitate longitudinală al betonului crește cu 15 ... 25% față de cel corespunzător solicitărilor statice.

● Dacă o structură în cadre de beton armat este proiectată la acțiuni seismice puternice, iar grinzile au un factor de ductilitate $\mu \geqslant 4$, efectul fisurării betonului conduce la o reducere a momentelor de inerție, în special în elementele orizontale de rezistență. Reducerea momentului de inerție inițial, ca urmare a procesului de fisurare, depinde de mulți factori dintre care se menționează: clasa (marca) betonului, cantitatea de armătură întinsă și comprimată (procentele de armare), raportul dintre modulele de elasticitate longitudinală ale oțelului și betonului, solicitările maxime efective etc. În medie, se poate considera că momentul de inerție al secțiunii fisurate se obține prin reducerea momentului de inerție al secțiunii inițiale (nefisurate) cu 15... ... 25% [103]. În această situație, se poate considera în mod aproximativ că rigiditatea secțională la încovoiere EI a grinzilor nu se modifică față de valoarea inițială.

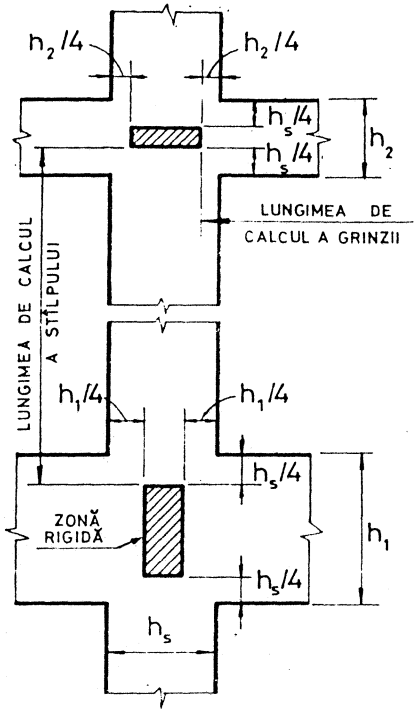


Fig. 10.7

● Schematizarea geometrică a barelor unei structuri, în special cînd stîlpii și grinzile au dimensiuni importante, poate fi făcută prin adoptarea lungimilor de calcul date în figura 10.7 [140]. Se remarcă în schema din figura 10.7 existența unei zone rigide în interiorul nodului care nu participă la deformarea cadrului în ansamblu și la transferul deformațiilor de la elementele verticale la cele orizontale.

● Deschiderea de calcul a buiandrugilor diafragmelor cu goluri se poate admite identică cu cea a grinzilor (v. fig. 10.7).

10.2. METODE ANALITICE SIMPLIFICATE PENTRU CALCULUL PERIOADELOR PROPRII DE VIBRAȚIE

Problema generală cu privire la determinarea valorilor și vectorilor proprii a fost formulată în capitolele 3 și 6. În cazul particular al structurilor plane multietajate, formate din bare drepte cu secțiune constantă, au fost elaborate de diferiți autori unele metode și procedee simplificate pentru calculul perioadelor proprii de vibrație, ținînd seama de specificul acestor structuri. Bazate pe o analiză dinamică aproximativă a vibrațiilor proprii, expresiile analitice care vor fi descrise succint în cuprinsul acestui paragraf, pot fi folosite cu succes mai ales în situațiile în care nu se impune o analiză dinamică riguroasă. Unele din aceste expresii de calcul au limite de valabilitate restrînse și de aceea pot fi aplicate numai la rezolvarea unor structuri de importanță redusă. Așa cum va rezulta, o serie de formulări analitice au un caracter mai

general, încît pot furniza rezultate mai precise în proiectarea preliminară a structurilor sau pot reprezenta valori inițiale într-o analiză numerică exactă.

În anumite situații, utilizarea procedeelor aproximative se justifică și prin faptul că însești metodele denumite exacte au la bază o serie de ipoteze simplificatoare și schematizări ale caracteristicilor fizice, elastice și geometrice, unanim admise în mecanica aplicată. Se vor prezenta, în ordinea alfabetică a autorilor, acele metode simplificate care deși nu necesită dezvoltări matematice laborioase, corespund cerințelor practice din proiectarea antiseismică a structurilor.

10.2.1. Metoda Holzer

Aplicarea acestei metode în maniera descrisă în capitolul 4 permite evaluarea simultană a valorilor și vectorilor proprii corespunzători tuturor modurilor de vibrație. Deoarece are un caracter iterativ și o bază teoretică riguroasă, este evident că exactitatea rezultatelor va depinde de gradul de aproximare admis inițial. Operațiile numerice de calcul pot fi efectuate și automat, datorită condițiilor limită relativ simple de simulare a configurațiilor geometrice ale formelor proprii de vibrație. Extinderea metodei în cazul vibrațiilor de translație ale structurilor etajate a fost expusă în lucrările [96], [97], [99].

În conformitate cu figura 10.2, relația de recurență (6.57) între ordonatele vectorului propriu i are forma

$$\Phi_{j,i} = \Phi_{k,i} - \frac{\varphi_i}{r_{kj}} \sum_{r=k}^{n} \alpha_r \Phi_{r,i}, \tag{10.29}$$

în care s-au folosit notațiile definite în capitolul 6.

În urma efectuării proceselor iterative, se obțin pentru orice mod i de vibrație forma proprie $\{\Phi\}_i$, precum și caracteristica de frecvență φ_i, iar prin intermediul formulei (6.59) se calculează perioada proprie de ordinul i astfel:

$$T_i = \psi_i \sqrt{\frac{m_0}{R_0}}, \tag{10.30}$$

unde

$$\psi_i = \frac{2\pi}{\sqrt{\varphi_i}}. \tag{10.31}$$

Coeficienții de rigiditate relativă totală de nivel r_{ij} se determină cu relațiile (10.4) și (10.9). Se face mențiunea că metoda Holzer se poate aplica în mod identic și pentru calculul perioadelor și formelor proprii de torsiune în situația în care coordonatele de rotație și de translație sînt decuplate.

10.2.2. Metoda R. Husid [86], [87]

Perioada fundamentală de vibrație a unei structuri etajate cu n niveluri se calculează prin intermediul relației

$$T_1 = 4 \sqrt{\frac{2x_{ST_1 max}}{g}}, \tag{10.32}$$

în care

$$x_{ST,max} = \frac{n(n+1)}{2R} Q,$$

reprezintă deplasarea statică maximă a structurii, produsă de acțiunea încărcărilor gravitaționale $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_k = \ldots = Q_n = Q$, aplicate pe direcția GLD (v. fig. 10.8, *a*), iar R-rigiditatea relativă a fiecărui nivel, considerată constantă pe toată înălțimea structurii.

Formula (10.32) are un domeniu limitat de aplicabilitate deoarece este valabilă numai pentru structurile particulare, cu distribuția uniformă a maselor și rigidităților relative p e înălțime, numite și structuri „uniforme".

10.2.3. Metoda M. Ifrim [89], [90], [91], [92], [94], [95], [99]

Prin utilizarea criteriilor energetice în analiza vibrațiilor proprii și în urma delimitării domeniilor de existență ale valorilor proprii ale structurilor etajate, s-a dedus următoarea expresie pentru calculul perioadei fundamentale de vibrație

$$T_1 = \psi_1 \sqrt{\frac{m_0}{R_0}}, \tag{10.33}$$

unde

$$\psi_1 = \frac{2\pi}{\nu_n} \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k^* \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{10.34}$$

reprezintă un coeficient adimensional care depinde de caracteristicile elastice ale structurii și de numărul gradelor de libertate dinamică.

În expresia coeficientului ψ_1 intervin următoarele notații:

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{m_0}, \quad \ldots \quad \alpha_k = \frac{m_k}{m_0}, \quad \ldots \quad \alpha_n = \frac{m_n}{m_0},$$

$$R_1 = r_{i1} R_0, \ldots R_k = r_{ik} R_0, \ldots R_n = r_{in} R_0,$$

$$u_1 = \frac{1}{r_{i1}}, \quad \ldots \quad u_k = \frac{1}{r_{ik}}, \quad \ldots \quad u_n = \frac{1}{r_{in}},$$

$$u_k^* = \sum_{i=1}^{k} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_k \tag{10.35}$$

în care:

$R_1, \ldots R_k, \ldots R_n$, sînt rigiditățile relative de nivel care se determină cu relația (10.7) avînd în vedere că $R_{kj} = R_k$;

$m_1, \ldots m_k, \ldots m_n$ — masele încărcărilor gravitaționale aferente fiecărui nivel, $m_1 = Q_1/g, \ldots m_k = Q_k/g, \ldots m_n = Q_n/g$;

m_0, R_0 — valori arbitrare (de referință) ale masei și ale rigidității relative, prin intermediul cărora se exprimă celelalte mărimi arătate mai sus;

$\alpha_1, \ldots \alpha_k, \ldots \alpha_n$ — coeficienți de masă;

$r_{i1}, \ldots r_{ik}, \ldots r_{in}$ — coeficienți de rigiditate relativă de nivel care se obțin cu ajutorul relației (10.10), ținînd seama că $r_{ikj} = r_{ik}$;

$\alpha_1, \ldots \alpha_k, \ldots \alpha_n$ — coeficienți de flexibilitate relativă de nivel;
$\alpha_1^*, \ldots \alpha_k^*, \ldots \alpha_n^*$ — coeficienți de flexibilitate de nivel (totali);
n — numărul de niveluri pe care le are structura;
ν_n — coeficient de corecție al perioadei fundamentale, care depinde de numărul de niveluri ale structurii.

În cazul structurilor cu mai mult de trei niveluri ($n \geqslant 3$), pentru coeficientul de corecție ν_n s-a stabilit valoarea medie $\nu_n \simeq 1{,}15$, încît coeficientul ψ_1 va avea expresia

$$\psi_1 = 5{,}45\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \alpha_k^*\right]^{\frac{1}{2}} \quad (n \geqslant 3) \tag{10.36}$$

Este evident că pentru structurile la care $n \leqslant 2$, perioadele proprii de vibrație pot fi obținute suficient de simplu prin rezolvarea ecuației caracteristice, deoarece nu prezintă dificultăți de calcul.

Ținînd seama de relația (10.36), *perioada fundamentală de vibrație* a structurilor multietajate se va determina cu expresia

$$T_1 = 5{,}45\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \alpha_k^*\right]^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{m_0}{R_0}}. \quad (n \geqslant 3) \tag{10.37}$$

Prin aplicarea acestei formule, care presupune cunoscută distribuția rigidităților relative de la toate nivelurile structurii, se obțin rezultate foarte apropiate de cele determinate printr-un calcul exact. Diferențele nu depășesc 5%, ceea ce reprezintă o aproximație satisfăcătoare din punct de vedere ingineresc. Aplicarea formulei (10.37) este simplă și directă, fără a necesita operații complicate de calcul, așa cum rezultă și din exemplul dat la sfîrșitul capitolului.

Dacă structura este de tip „uniform", adică cu distribuție monotonă a maselor m_0 și rigidităților relative de nivel R_0, expresia coeficientului ψ_1 devine

$$\psi_1 = 5{,}45\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (n \geqslant 3)$$

Pentru determinarea perioadelor de ordin superior T_i, se propune formula

$$T_i \simeq \frac{T_1}{1{,}3i}, \quad (i = 2, 3, \ldots n), \tag{10.38}$$

în care i reprezintă ordinul modului de vibrație considerat. Formula de mai sus aproximează destul de corect perioadele proprii ale primelor moduri superioare. Dacă se urmărește un calcul mai exact, valorile ce se obțin cu această formulă pot constitui valori inițiale în vederea utilizării metodei Holzer, în care caz

$$\varphi_i \simeq 1{,}7i^2\varphi_1, \quad (i \geqslant 2)$$

deoarece

$$\psi_i = 2\pi/\sqrt{\varphi_i}.$$

10.2.4. Metoda R. G. Merritt — G. W. Housner [16]

Considerînd că distribuția maselor și rigidităților este uniformă pe înălțimea structurii, iar riglele sînt perfect rigide, se propune următoarea expresie aproximativă pentru calculul perioadei fundamentale de vibrație

$$T_1 = \frac{\pi}{\sin\dfrac{\pi}{4n+2}}\sqrt{\frac{m}{R}}, \tag{10.39}$$

unde

m este masa concentrată în dreptul fiecărui nivel și aceeași la toate etajele;
R — rigiditatea relativă de nivel (egală pentru toate etajele structurii), care se obține cu relația (10.8) considerînd $A_{kj}^{(s)} = 1$;
n — numărul de niveluri.

10.2.5. Metoda M. G. Salvadori [17]

Admițînd ipoteza riglelor perfect rigide, în care caz oscilațiile se produc numai ca urmare a deformabilității stîlpilor, Salvadori a stabilit o formulă directă pentru calculul perioadelor proprii corespunzătoare oricărui mod i de vibrație. Formula a fost dedusă prin aplicarea teoriei generale a vibrațiilor libere, admițînd anumite simplificări și aproximații.

Expresia perioadei proprii de ordinul i are forma:

$$T_i = \frac{4}{2i-1}\sqrt{\frac{n\sum_{k=1}^{n} m_k}{\dfrac{1}{H}\sum_{k=1}^{n} R_k h_k}}, \tag{10.40}$$

în care s-a notat cu

m_k — masa aferentă nivelului k;
h_k — înălțimea etajului;
H — înălțimea totală a structurii;
n — numărul de niveluri;
R_k — rigiditatea relativă dintre nivelurile k și j ($R_k = R_{kj}$), care se poate determina cu relația (10.8) în care se consideră $A_{kj}^{(s)} = 1$, deoarece riglele structurii au rigiditatea infinită (ca în metoda precedentă).

Se poate observa că numitorul fracției de sub radical are semnificația unei rigidități medii, distribuită uniform pe toată înălțimea structurii. Ipoteza riglelor perfect rigide este destul de aproximativă și nu reflectă totdeauna comportarea reală a unei structuri multietajate. Aplicarea formulelor (10.39) și (10.40) poate da rezultate parțial satisfăcătoare numai în cazul structurilor semirigide.

10.2.6. **Metoda M. P. White [198]**

Această metodă are la bază aceleași ipoteze expuse în § 10.2.2. Pentru perioada fundamentală de vibrație de ordinul i, a structurilor „uniforme", White a dedus următoarea formulă

$$T_i = \frac{\pi}{\sin\frac{2i-1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{m}{R}}. \tag{10.41}$$

Simbolurile care intervin în (10.41) au aceeași semnificație cu cele definite anterior.

10.2.7. **Metoda Rayleigh — directă [99]**

Formula (6.25) se poate particulariza pentru modul fundamental de vibrație astfel

$$\omega_1^2 = \frac{\{x\}_1^T [R]\{x\}_1}{\{x\}_1^T [M]\{x\}_1}. \tag{10.42}$$

Dacă se admite că deformata dinamică fundamentală are aceeași configurație cu variația deplasărilor statice, produse de acțiunea forțelor gravitaționale aplicate pe direcția GLD ale sistemului (fig. 10.8, *a*), se obține

$$\omega_1^2 = \frac{\{x\}_{ST}^T [R]\{x\}_{ST}}{\{x\}_{ST}^T [M]\{x\}_{ST}} = \frac{\{x\}_{ST}^T \{Q\}}{\{x\}_{ST}^T [M]\{x\}_{ST}}, \tag{10.43}$$

deoarece

$$\{Q\} = [R]\{x\}_{ST},$$

reprezintă coloana rezultantei încărcărilor gravitaționale aferente fiecărui nivel $k = 1, 2, \ldots n$.

Dacă se exprimă vectorul deplasărilor statice prin vectorul adimensional $\{\Phi\}_1$, pivotat în raport cu ordonata $\{\Phi\}_{n,1} = 1$, conform figurii 10.8, *b* rezultă

$$\{x\}_{ST} = x_{n,ST}\{\Phi\}_1 = x_{ST,max}\{\Phi\}_1,$$

încît relația (10.43) devine

$$\omega_1^2 = \frac{g}{x_{ST,max}}\cdot\frac{\{\Phi\}_1^T\{Q\}}{\{\Phi\}_1^T [Q]\{\Phi\}_1} = \frac{g}{x_{ST,max}} A_{n,1}. \tag{10.44}$$

Întrucît produsul scalar de la numărătorul expresiei (10.44) este comutativ, iar $\Phi_{n,1} = 1$, se constată că $A_{n,1}$ reprezintă *coeficientul de formă* (definit în cap. 8) corespunzător gradului de libertate n

$$A_{n,1} = \frac{\{Q\}^T\{\Phi\}_1}{\{\Phi\}_1^T [Q]\{\Phi\}_1}\Phi_{n,1} = \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k\Phi_{k,1}}{\sum_{k=1}^{n} Q_k\Phi_{k,1}^2}. \tag{10.45}$$

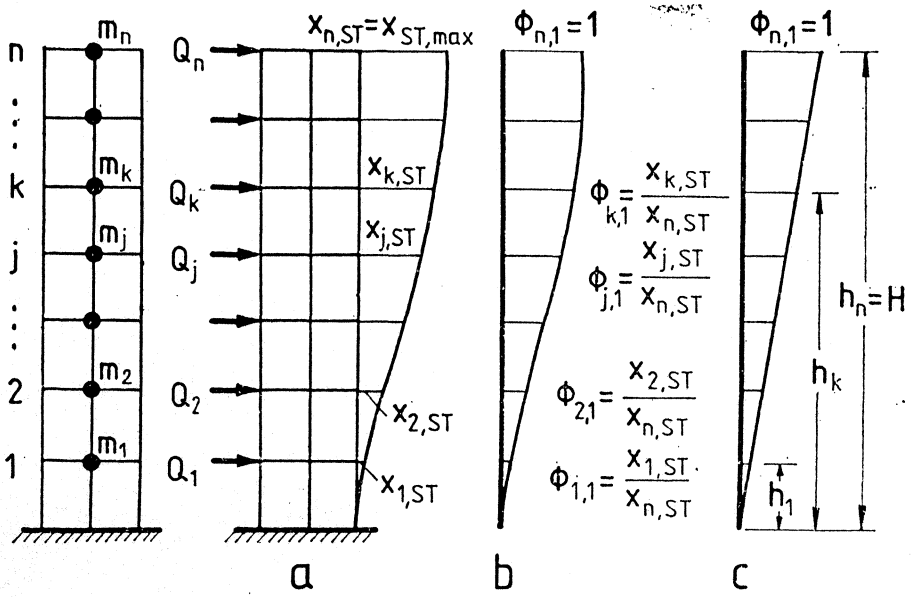


Fig. 10.8

În lucrarea [99] s-a demonstrat că în cazul structurilor etajate, cu configurații obișnuite, factorul de formă (10.45) pentru structurile etajate are valoarea medie $A_{n,1} \simeq 1{,}41$ și deci pulsația fundamentală va avea expresia

$$\omega_1^2 \simeq 1{,}41\frac{g}{x_{ST,max}}, \quad \omega_1 \simeq 1{,}187\sqrt{\frac{g}{x_{ST,max}}},$$

iar perioada fundamentală

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \simeq 5{,}293\sqrt{\frac{x_{ST,max}}{g}}.$$

În situația în care se exprimă deplasarea statică maximă în centimetri, iar $g = 981$ cm s^2, se obține următoarea relație simplă

$$T_1 \simeq 0{,}17\sqrt{x_{ST,max}}, \tag{10.46}$$

a cărei formă este asemănătoare cu cea obținută în cazul sistemelor cu 1GLD.

Se mai pot opera unele simplificări asupra formulei (10.46) admițînd anumite configurații particulare pentru variația vectorului propriu fundamental. Astfel, dacă se consideră vectorul $\{\Phi\}_1 = \{1\}$, ceea ce corespunde unei forme proprii incompatibile cu legăturile deoarece toate ordonatele $\Phi_{k,1}$ devin constante ($k = 1,2, \ldots n$), se obține $A_{n,1} = 1$, iar pentru pulsația fundamentală relația

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{x_{ST,max}}}$$

și deci

$$T_1 = 0{,}2\sqrt{x_{ST,\,max}},$$

adică formula lui Geiger (6.40) stabilită în capitolul 6.

O aproximare mai satisfăcătoare rezultă dacă vectorul fundamental $\{\Phi\}_1$ se estimează printr-o variație liniară [90], [93], [99] reprezentată în figura 10.8, *c*. Înlocuind vectorul

$$\{\Phi\}_1 = \frac{1}{h_n}\{h\}, \tag{10.47}$$

în (10.44), se obține formula

$$\omega_1^2 = \frac{g}{x_{ST,\,max}}\left[h_n \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k h_k}{\sum_{k=1}^{n} Q_k h_k^2}\right], \tag{10.48}$$

iar dacă înălțimea etajelor h este egală, adică $h_k = kh$ rezultă

$$\{\Phi\}_1 = \frac{1}{n}\{k\}, \quad \omega_1^2 = \frac{g}{x_{ST,\,max}} \cdot \frac{n\sum_{k=1}^{n} kQ_k}{\sum_{k=1}^{n} k^2 Q_k}. \tag{10.49}$$

În cazul particular în care și încărcările gravitaționale sînt identice la toate etajele $Q_1 = Q_2 = \ldots = Q_k = \ldots Q_n$, expresia pulsației fundamentale (10.49) devine

$$\omega_1^2 = \frac{g}{x_{ST,\,max}} \frac{n\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \frac{g}{x_{ST,\,max}} \frac{3n}{2n+1} \tag{10.50}$$

în care

$$A_{n,1} = \frac{3n}{2n+1}. \tag{10.51}$$

Exprimînd perioada fundamentală sub forma simplă

$$T_1 = \xi_n \sqrt{x_{ST,\,max}}, \tag{10.52}$$

unde

$$\xi_n = \frac{2\pi}{\sqrt{gA_{n,1}}}, \tag{10.53}$$

și ținînd seama de (10.51), pentru coeficientul ξ_n se pot lua următoarele valori numerice medii, în funcție de numărul de etaje ale structurii:

- pentru $n = 1$, $\xi_n = 0{,}20$;
- pentru $n = 2$, $\xi_n = 0{,}18$;
- pentru $n = 3$ și 4, $\xi_n = 0{,}175$;
- pentru $5 \leqslant n \leqslant 11$, $\xi_n = 0{,}17$;
- pentru $n \geqslant 12$, $\xi_n = 0{,}165$.

Se face mențiunea că particularizările și sistematizările prezentate mai sus, specifice cadrelor etajate, au fost expuse într-un context mai larg în lucrările [20], [95], [99].

Deplasarea statică maximă poate fi calculată prin metodele cunoscute în statica construcțiilor, folosind matricele de rigiditate sau de flexibilitate, exprimate în raport cu coordonatele dinamice ale sistemului (v. cap. 1), adică

$$x_{n,\,ST} = x_{ST,\,max} = \{\delta\}_n^T \cdot \{Q\},$$

sau prin intermediul rigidităților relative de nivel

$$x_{n,\,ST} = x_{ST,\,max} = \sum_1^n \Delta_{kj} = \sum_1^n \mathfrak{F}_{jk}/R_{kj}.$$

10.2.8. Metoda M. Suko-P. F. Adams [180], [181]

Metoda se referă la structuri din beton armat alcătuite din bare drepte, de tipul cadrelor etajate (fig. 10.2), avînd n niveluri ($k = 1,2, \ldots n$) și m stîlpi ($s = 1,2, \ldots m$). Perioada fundamentală de vibrație, dedusă pe baza unor elemente empirice și analitice se calculează cu formula

$$T_1 = T_0 h \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cdot \frac{n}{10}. \tag{10.54}$$

Notațiile și exprimările care intervin în (10.54), adaptate celor definite în acest capitol, sînt următoarele:

$$h = \frac{H}{nh_0}, \quad \alpha = \frac{R(stîlpi)}{R_0}, \quad \beta = \frac{Q_{s,\,mediu}}{Q_0} \frac{m-0{,}6}{m-1},$$

iar T_0 se determină din graficul dat în figura 10.9 în funcție de factorul

$$\gamma = \frac{R\,(grinzi)}{R\,(stîlpi)} = \frac{m}{m-1} \frac{\Sigma\rho\,(grinzi)}{\Sigma\rho\,(stîlpi)},$$

unde

- $R\,(grinzi) = \dfrac{1}{n(m-1)} \dfrac{EI_0}{l_0} \Sigma\rho$ (grinzi) reprezintă media rigidităților tuturor grinzilor;
- $R\,(stîlpi) = \dfrac{1}{nm} \dfrac{EI_0}{l_0} \Sigma\rho$ (stîlpi), media rigidităților tuturor stîlpilor;
- $Q_{s,\,mediu}$, încărcarea medie pe stîlp și pe etaj;
- H, înălțimea totală a structurii.

În aceste notații intervin valorile dimensionale standard (de referință);

$$h_0 = 366 \text{ cm}; \quad R_0 = 0{,}575 \cdot 10^6 \text{ tfcm}; \quad Q_0 = 31{,}70 \text{ tf}$$

Valorile limită ale perioadei de referință $T_0(s)$ sînt:

$$R\,(grinzi) = R(\infty), \quad \gamma = \infty, \quad T_0 = 0{,}873,$$

$$R\,(grinzi) = 0, \quad \gamma = 0, \quad T_0 = 12{,}40.$$

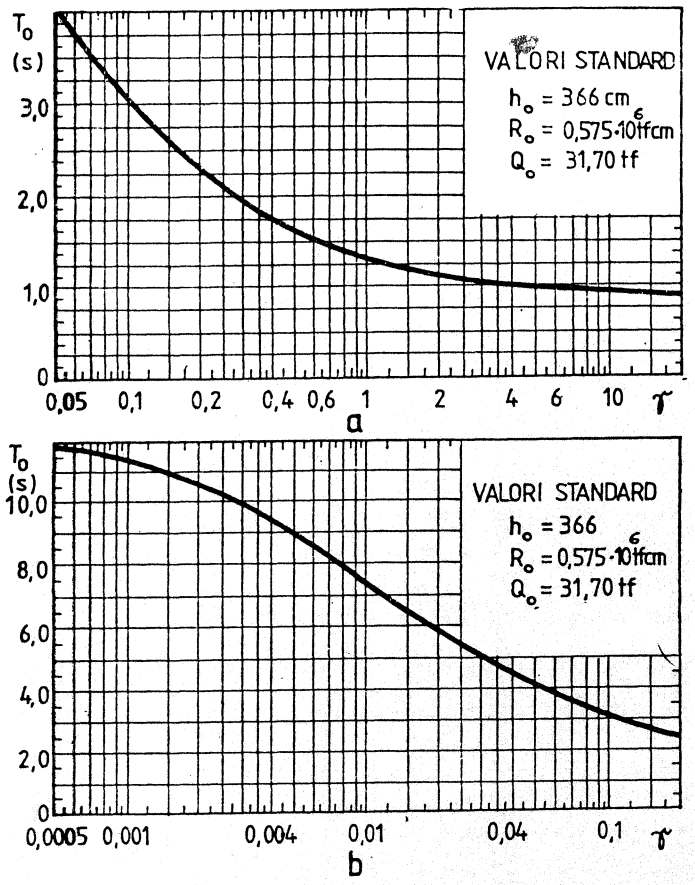


Fig. 10.9

10.3. EVALUAREA PERIOADEI FUNDAMENTALE DE VIBRAȚIE PRIN FORMULE DIRECTE

Pentru aprecierea globală, orientativă, a perioadei fundamentale de vibrație, se pot aplica formule directe de calcul (cu caracter empiric) în care intervin de obicei principalele caracteristici geometrice sau numărul de niveluri ale construcțiilor. În general aceste formule sînt stabilite prin cercetări experimentale, în urma prelucrării statistice a rezultatelor obținute, care uneori sînt corelate și cu aspectele teoretice specifice fenomenelor dinamice. Deși ca mod de exprimare toate relațiile de calcul au elemente comune, se constată discrepanțe destul de mari între rezultatele ce se obțin prin aplicarea anumitor formule. De aceea ele corespund, în majoritatea cazurilor, situațiilor efective ale țărilor cărora aparțin autorii și de asemenea specificului sistemelor structurale din zonele respective. Cu toate acestea, aplicarea acestor formule poate furniza informații utile cu privire la identificarea cantitativă a intervalului de existență a perioadei fundamentale de vibrație, atunci cînd se utilizează o metodă numerică iterativă. În același timp pot constitui un mijloc de control pentru ordinul de mărime al rezultatelor ce se obțin prin aplicarea altor metode mai precise.

În tabelul 10.2 sînt prezentate și comentate sintetic formulele de calcul propuse de diferiți autori sau conținute în anumite prescripții de proiectare antiseismică.

TABELUL 10.2

Nr. crt.	Numele autorului (sursa)	Expresia perioadei fundamentale (T_1, în s)	Observații și comentarii
1	T. TANIGUCHI [183], [184]	$T_1 = (0{,}07 \dots 0{,}09)n$ $T_1 = (0{,}06 \dots 0{,}10)(n + 0{,}5)$ În general $T_1 = (0{,}12 \dots 0{,}4)\sqrt{\frac{2n+1}{3}}$	Se bazează pe investigații experimentale realizate asupra unui număr mare de clădiri din Tokyo și Yokohama. Formulă valabilă pentru toate tipurile de structuri
2	F. P. ULRICH D. S. CARDER [192]	$T_1 = (0{,}01 \dots 0{,}035)H$ $T_1 \simeq 0{,}02H$	Formule determinate prin măsurători efectuate asupra a 400 de clădiri cu diferite structuri de rezistență.
3	E. ROSENBLUETH [168]	$T_1 = (0{,}09 \dots 0{,}10)(n+1)$	Se recomandă numai pentru construcții de locuit și birouri.
4	K. NAKAGAVA [143]	$T_1 = (0{,}10 + 0{,}038\,n) \dots (0{,}20 + 0{,}064\,n)$ $T_1 = (0{,}07 \dots 0{,}13)\frac{H}{\sqrt{B}}$	Au fost studiate experimental 53 de clădiri în funcție de raportul $H/\sqrt{B}$ conținut în Codul Californian.
5	M. TAKEUCHI [182]	$T_1 = \left(\frac{1}{80} \dots \frac{1}{60}\right)[4 + H(1-4d)]$ $T_1 = \frac{H}{60}$	Formula a fost stabilită pe baza măsurătorilor la 60 de clădiri din Tokyo și Osaka. Recomandată pentru construcții izolate pe schelet.
6	A. ARIAS R. HUSID [5]	$T_1 = 0{,}024H^{0{,}71}d^{-0{,}14}$	Aplicabilă la construcțiile din Chile cu structura de beton armat și ziduri de rigidizare.
7	G. W. HOUSNER A. G. BRADY [76]	$T_1 = 0{,}5\sqrt{n} - 0{,}4$	Se recomandă pentru structuri cu schelet metalic.
8	M. BAEZA [7]	$T_1 = 0{,}036\,n$	Valabilă numai pentru structurile din beton armat din Chile.
9	A. ARIAS R. HUSID M. BAEZA [6]	$T_1 = 0{,}012\,H$ $T_1 = 0{,}035\,n$	Obținute prin analiza a 34 clădiri de beton armat avînd între 4 și 17 etaje din provinciile Santiago și Valparaiso.
10	H. SANDI G. ȘERBĂNESCU [172]	În direcție transversală $T_1 = (0{,}045 \dots 0{,}055)\,n$ În direcție longitudinală $T_1 = (0{,}035 \dots 0{,}040)n$ Blocuri turn $T_1 = 0{,}065\frac{H}{\sqrt{B}}$	Formulele au fost stabilite pe cale experimentală prin măsurători efectuate asupra unor construcții civile din București

TABELUL 10.2 (continuare)

Nr. crt.	Numele autorului (sursa)	Expresia perioadei fundamentale (T_1, în s)	Observații și comentarii
11	J. S. CARMONA J. H. CANO [38]	$T_1 = 0{,}012\,H + 0{,}09$ $T_1 = 0{,}07\,\frac{H}{\sqrt{B}}$ $T_1 = H\sqrt{\frac{0{,}003}{B} + \frac{0{,}0002}{1 + 30\,d}}$	Formule obținute experimental în Argentina pentru structuri din beton armat. Pentru structuri din beton armat cu ziduri de rigidizare.
12	R. HUSID W. PIEBER J. ROMO [88]	$T_1 = 0{,}04\,n$ $T_1 = \frac{n}{69}$ $T_1 = 0{,}04\,\frac{H}{\sqrt[3]{B}}$	Recomandate pentru structuri obișnuite din beton armat. Propusă pentru construcțiile înalte din Chile.
13	J. LEDWON [124]	$T_1 = 0{,}02\,H$ $T_2 = 0{,}25\,T_1$ $T_3 = 0{,}10\,T_1$	Formule care aproximează primele trei perioade proprii de vibrație ale coșurilor de fum din beton armat.
14	M. IFRIM [20], [99]	În ambele direcții $T_1 = 0{,}09\,\sqrt{H}$ În direcție longitudinală $T_1 = 0{,}12\,\sqrt{H}$ În direcție transversală $T_1 = 0{,}15\,\sqrt{H}$ $T_1 = 0{,}2\sqrt{H}$	Construcții joase (pereți portanți, cadre cu zidărie), $n \leqslant 6$ Construcții de beton armat cu înălțime medie $7 \leqslant n \leqslant 15$ Construcții înalte, izolate, flexibile, $n \geqslant 16$
15	JOINT COMMITTEE ASCE-SEA [206]	$T_1 = 0{,}09\,\frac{H}{\sqrt{B}}$	Se bazează pe măsurători experimentale la 3 000 de clădiri
16	U.S. COAST AND GEODETIC SURVEY [205]	$T_1 = 0{,}1\,n$	A rezultat din investigații experimentale asupra a 212 clădiri
17	SEISMOLOGY COMMITTEE SEAOC [230]	$T_1 = 0{,}09\,\frac{H}{\sqrt{B}}$ $T_1 = 0{,}1\,n$	Formule recomandate de codul american (U.B.C.) Formulă recomandată pentru structurile în cadre care preiau 100% din încărcarea laterală.
18	NORMA SISMORRESISTENTE P.G.S.-1 (1968) SPANIA [217]	$T_1 = 0{,}06\,\frac{H}{\sqrt{B}} \cdot \frac{H}{2B + h}$ $T_1 = 0{,}09\,\frac{H}{\sqrt{B}}$ $T_1 = 0{,}10\,\frac{H}{\sqrt{B}}$	Pentru construcții din zidărie sau panouri de beton armat (h — înălțimea fiecărui etaj). Structuri din beton armat. Structuri metalice.
19	OFFICE OF CONSTRUCTION VETERAN ADMINISTRATION WASHINGTON [227]	$T_1 = 0{,}05\,n$ $T_1 = 0{,}05\,n$ $T_1 = 0{,}08\,n$ $T_1 = 0{,}12\,n$	Construcții din pereți din zidărie portantă Construcții cu diafragme care preiau min. 50% din forța seismică totală Construcții în cadre de beton armat Construcții cu schelet metalic

TABELUL 10.2. (continuare)

Nr. crt.	Numele autorului (sursa)	Expresia perioadei fundamentale (T_1, în s)	Observații și comentarii
20	NORMATIV P.100-81 ROMÂNIA	În direcție transversală $T_1 = (0{,}045 \ldots 0{,}055)n$ În direcție longitudinală $T_1 = (0{,}040 \ldots 0{,}045)\,n$ Ambele direcții $T_1 = 0{,}065\,\frac{H}{\sqrt{B}}$ $T_1 = 0{,}3 + 0{,}05\,n$ $T_1 = 0{,}1\,n$	Construcții rigide și semirigide de tip „bară" Construcții rigide și semirigide de tip „bloc turn" Construcții flexibile $n \leqslant 5$ $n = (6 \ldots 10)$

Notațiile folosite în expresiile din tabelul 10.2 au următoarele semnificații:

H este înălțimea totală a construcției, în m;

B — dimensiunea în plan orizontal a construcției, măsurată în direcția oscilației considerate;

d — coeficientul prin care se introduce influența „densității pereților" și reprezintă raportul dintre lungimea zidurilor existente în întreaga construcție și suprafața totală desfășurată a clădirii, în m^{-1};

n — numărul de niveluri ale construcției.

10.4. INFLUENȚA DEFORMABILITĂȚII TERENULUI DE FUNDAȚIE ASUPRA PERIOADEI FUNDAMENTALE

În situația în care o structură este amplasată pe un teren de fundație deformabil, datorită cuplajului elastic dintre teren și structură, perioada fundamentală de vibrație se va majora, ca urmare a flexibilității de ansamblu a sistemului dinamic. Această problemă, care comportă o analiză aprofundată și vastă, va fi abordată în mod aproximativ folosind în acest scop relația (10.46). Astfel, dacă se admite că ansamblul teren-structură are o comportare liniară, perioada fundamentală de vibrație se obține cu relația

$$T_1^* \simeq 0{,}17\,\sqrt{x_{n,\,max}}\,, \tag{10.55}$$

unde

$$x_{n,\,max} = x_{n,\,ST} + x_{n,\,\varphi}, \tag{10.56}$$

iar

$x_{n,\,ST}$ este deplasarea laterală maximă produsă de acțiunea încărcărilor gravitaționale Q_k, aplicate pe direcția GLD (fig. 10.8, *a*);

$x_{n,\,\varphi}$ — deplasarea maximă (la nivelul n) provenită din rotirea fundației, datorită deformabilității terenului.

Deplasarea maximă produsă de rotirea φ în jurul unei axe orizontale conținută în suprafața de contact dintre teren și fundație, se determină astfel

$$x_{n,\,\varphi} = \varphi H, \tag{10.57}$$

în care

$$\varphi = \frac{M_0}{C_\varphi I_f}, \tag{10.58}$$

M_0 este momentul rezultant la nivelul suprafeței de contact, produs de acțiunea încărcărilor gravitaționale Q_k, aplicate pe direcția GLD;

I_f — momentul de inerție al suprafeței de contact, în raport cu axa de rotație;

C_φ — coeficientul de elasticitate neuniformă (tasare neuniformă) al terenului, la rotire în jurul unei axe orizontale.

Dacă se ține seama de relația (10.56) și se introduce notația

$$\eta_i = \sqrt{1 + x_{n,i}/x_{n,ST}}, \quad \eta_i \geq 1, \tag{10.59}$$

formula (10.55) se poate exprima sub forma compactă

$$T_1^* = \eta_i T_1, \tag{10.60}$$

introducîndu-se astfel, prin intermediul coeficientului η_i, influența deformabilității terenului de fundație asupra perioadei fundamentale T_1, determinată în ipoteza unui teren perfect rigid. *Coeficientul de cuplaj elastic* η_i depinde de caracteristicile statice, elastice și geometrice ale structurii, fundației și terenului.

În situația în care perioada fundamentală T_1, corespunzătoare ipotezei terenului perfect rigid, a fost obținută prin altă metodă de calcul și nu prin aplicarea formulei (10.46), cuplajul elastic structură-teren se poate exprima și prin coeficientul

$$\eta_i = \sqrt{1 + T_{1,\varphi}^2/T_1^2}, \tag{10.61}$$

rezultat în urma transformării relației (10.59), unde

$$T_{1,\varphi} \simeq 0{,}17\sqrt{x_{n,\varphi}}. \tag{10.62}$$

Expresia (10.60) pune în evidență, printr-o formulare simplă, majorarea perioadei fundamentale de vibrație datorită caracteristicilor de deformabilitate ale terenului de fundație. Majorarea perioadei fundamentale are o influență decisivă asupra comportării structurilor la acțiunea cutremurelor, în special în cazul cînd configurația spectrelor seismice marchează tendințe de amplificare a răspunsului o dată cu creșterea perioadei (v. cap. 8).

Lucrările [10], [12], [72], [99] conțin analize calitative și cantitative cu privire la influența deformabilității terenului asupra caracteristicilor dinamice proprii ale structurilor, precum și asupra răspunsului seismic.

10.5. DETERMINAREA APROXIMATIVĂ A FORMELOR PROPRII DE VIBRAȚIE

10.5.1. Forma proprie fundamentală

Există numeroase situații în care contribuția răspunsului seismic corespunzător formei proprii fundamentale este suficientă pentru a caracteriza complet efectul produs de un cutremur puternic asupra construcțiilor. În acest sens, perioada proprie se calculează cu una din metodele sau formulele prezentate anterior, iar variația formei fundamentale poate fi evaluată printr-o configurație geometrică aproximativă. Configurațiile geometrice care se admit în general și care vor fi descrise în continuare, îndeplinesc parțial condiția de compatibilitate a deformatei dinamice staționare, specifice modului fundamental.

● Aproximarea cea mai simplă printr-o variație liniară, în care caz vectorul fundamental este descris de expresiile (10.47) sau (10.48), conform figurii 10.8, *c*.

● Estimarea formei fundamentale prin deformata statică produsă de acțiunea încărcărilor gravitaționale $\{Q\}$ aplicate pe direcția GLD (v. fig. 10.8, *b*), și anume

$$\{\Phi\}_1 = \frac{1}{x_{n,ST}}\{x\}_{ST}, \quad \{x\}_{ST} = [D]\{Q\}. \tag{10.63}$$

● Aplicarea metodei Holzer, care permite evaluarea simultană a valorilor și vectorilor proprii prin intermediul relației de recurență (10.29).

● Utilizarea rigidităților relative de nivel în conceptul prezentat în § 10.1. Pe baza notațiilor introduse în § 10.2.3, în lucrările [99], [101] se propune pentru variația ordonatelor formei fundamentale de vibrație următoarea expresie:

$$\Phi_{k,1} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} i\alpha_i u_i^* + u_k^* \sum_{i=k}^{n} i\alpha_i}{\sum_{i=1}^{n} i\alpha_i u_i^*}, \tag{10.64}$$

prin aplicarea căreia se obțin rezultate apropiate de cele exacte. Pentru structurile flexibile în locul relației (10.64) se poate folosi forma simplificată $\Phi_{k,1} = u_k^*/u_n^*$ $(k = 1,2, \ldots n)$.

10.5.2. Forme proprii superioare

Relația iterativă Holzer (10.29) permite determinarea oricărui vector al sistemului, întrucît procesul de operare este independent în raport cu modurile proprii de vibrație.

În proiectarea construcțiilor civile curente (comune), cu configurație elastică și inerțială obișnuită, în majoritatea situațiilor intervine cel mult influența primelor trei moduri proprii de vibrație în exprimarea răspunsului seismic total. Dacă vectorul fundamental $\{\Phi\}_1$ se consideră determinat (prin unul din procedeele deja expuse), se pune problema aproximării următoarelor două forme proprii de vibrație. Metoda care va fi prezentată în continuare constă în corectarea unor forme de vibrație admise inițial, utilizînd în acest sens proprietatea de ortogonalitate a vectorilor proprii (3.34). Se vor considera inițial vectorii proprii arbitrari $\{\Phi\}_2^{(0)}$ și $\{\Phi\}_1^{(0)}$, care respectă însă configurațiile geometrice specifice deformatelor dinamice modale.

Formele proprii de vibrație reale de ordinul 2 și 3 se vor exprima prin relațiile:

$$\{\Phi\}_2 = \{\Phi\}_2^{(0)} - a_{12}\{\Phi\}_1, \tag{10.65}$$

$$\{\Phi\}_3 = \{\Phi\}_3^{(0)} - a_{13}\{\Phi\}_1 - a_{23}\{\Phi\}_2, \tag{10.66}$$

unde a_{12}, a_{13} și a_{23}, care au semnificația unor coeficienți de corecție, se determină pe baza condiției generale de ortogonalitate scrisă sub forma

$$\{\Phi\}_i^T [Q] \{\Phi\}_j = 0, \quad (i \neq j).$$

Prin exprimarea condițiilor de ortogonalitate pentru cele trei forme proprii rezultă sistemul de ecuații

$$\{\Phi\}_1^T [Q] \{\Phi\}_2 = \{\Phi\}_1^T [Q] \{\Phi\}_2^{(0)} - a_{12}\{\Phi\}_1^T [Q] \{\Phi\}_1 = 0,$$

$$\{\Phi\}_1^T [Q] \{\Phi\}_3 = \{\Phi\}_1^T [Q] \{\Phi\}_3^{(0)} - a_{13}\{\Phi\}_1^T [Q] \{\Phi\}_1 - a_{23}\{\Phi\}_1^T [Q] \{\Phi\}_2 = 0,$$

$$\{\Phi\}_2^T [Q] \{\Phi\}_3 = \{\Phi\}_2^T [Q] \{\Phi\}_3^{(0)} - a_{13}\{\Phi\}_2^T [Q] \{\Phi\}_1 - a_{23}\{\Phi\}_2^T [Q] \{\Phi\}_2 = 0$$

din care se obțin

$$a_{12} = \frac{\{\Phi\}_1^T [Q] \{\Phi\}_2^{(0)}}{\{\Phi\}_1^T [Q] \{\Phi\}_1} = \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,1} \Phi_{k,2}^0}{\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,1}^2}, \tag{10.67}$$

$$a_{13} = \frac{\{\Phi\}_1^T [Q] \{\Phi\}_3^{(0)}}{\{\Phi\}_1^T [Q] \{\Phi\}_1} = \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,1} \Phi_{k,3}^0}{\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,1}^2}, \tag{10.68}$$

$$a_{23} = \frac{\{\Phi\}_2^T [Q] \{\Phi\}_3^{(0)}}{\{\Phi\}_2^T [Q] \{\Phi\}_2} = \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,2} \Phi_{k,3}^0}{\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,2}^2}. \tag{10.69}$$

Metoda poate fi generalizată pentru toate formele proprii astfel:

$$\{\Phi\}_j = \{\Phi\}_j^{(0)} - \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\{\Phi\}_i, \tag{10.70}$$

$$\{\Phi\}_i^T [Q] \{\Phi\}_j = \{\Phi\}_i^T [Q] \{\Phi\}_j^{(0)} - \{\Phi\}_i^T [Q] \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\{\Phi\}_i = 0$$

de unde rezultă forma generală a coeficienților de corecție

$$a_{ij} = \frac{\{\Phi\}_i^T [Q] \{\Phi\}_j^{(0)}}{\{\Phi\}_i^T [Q] \{\Phi\}_i}. \tag{10.71}$$

După cum se poate constata, metoda corecțiilor succesive este simplă și ușor de aplicat la rezolvarea unor probleme concrete din proiectarea antiseismică a structurilor. Cu cît configurațiile formelor proprii de vibrație propuse inițial sînt mai apropiate de cele reale, cu atît va crește gradul de exactitate al rezultatelor obținute.

Aplicarea unei metode aproximative sau recurgerea la o analiză mai riguroasă reprezintă o problemă exclusiv de opțiune în funcție de particularitățile și importanța structurii care urmează a fi proiectată.

10.6. APLICAȚII

Aplicația 10.6.1. Se cere să se determine încărcările seismice și diagrama de momente pentru cadrul de beton armat din figura 10.10. Dimensiunile geometrice, precum și încărcările gravitaționale sînt date direct pe figură. Principalele caracteristici de referință ale structurii, la care vor fi raportate toate operațiile numerice, sînt următoarele:

$Q_0 = 95$ tf (932 kN),

$m_0 = Q_0/g = 96{,}84$ kgfs²/cm (95 kg),

$I_0 = 48{,}526$ dm⁴ $= 48{,}526 \cdot 10^4$ cm⁴ (35 × 45 cm),

$l_0 = 2{,}9$ m $= 290$ cm,

$E = 3{,}15 \cdot 10^5$ kgf/cm² ($3{,}1 \cdot 10^5$ daN/cm²),

$R_0 = 12\, EI_0/l_0^3 = 75\,210$ kgf/cm (73 780 daN/cm),

$\sqrt{m_0/R_0} = 0{,}0359$ s.

Caracteristicile proprii de vibrație ale structurii vor fi calculate prin intermediul rigidităților relative de nivel, iar încărcările seismice se vor determina în conformitate cu normativul românesc P. 100-81. Se consideră structura de importanță medie și amplasată într-o zonă caracterizată de gradul 7 de intensitate seismică.

● *Calculul rigidităților relative de nivel*

Rigiditățile relative de nivel s-au determinat cu ajutorul formulelor directe conținute în tabelul 10.1 punctul 4. Coeficienții adimensionali $k_{jk} = I_{jk}/I_0$ și $\lambda_{jk} = l_{jk}/l_0$, precum și rigiditățile convenționale de bară $\rho_{jk} = k_{jk}/\lambda_{jk}$ se află în tabelul 10.3. În vederea simplificării operațiilor numerice, coeficienții k și λ se pot stabili direct pe schema structurii (fig. 10.11) și de asemenea rigiditățile convenționale de bară ρ și rigiditățile convenționale de nod $\Sigma\rho$ (fig. 10.12).

TABELUL 10.3

		Secțiuni (cm)	I (dm⁴)	$k = \frac{I}{I_0}$	l (m)	$\lambda = \frac{l}{l_0}$	$\rho = \frac{k}{\lambda}$
RIGLE	CENTRALE	25 × 35	8,9322	0,1840	2,20	0,7586	0,2425
		25 × 45	18,9843	0,3912	2,20	0,7586	0,5156
	MARGINALE	25 × 50	26,0416	0,5366	6,35	2,1896	0,2450
		25 × 65	57,2135	1,1790	6,35	2,1896	0,5384
STÎLPI CENTRALI	ETAJE	30 × 45	22,7812	0,4694	2,90	1,0000	0,4694
		35 × 55	48,5260	1,0000	2,90	1,0000	1,0000
		40 × 60	72,0000	1,4837	2,90	1,0000	1,4837
		45 × 65	102,9843	2,1222	2,90	1,0000	2,1222
	PARTER	45 × 75	158,2031	3,2601	3,40	1,1724	2,7807
STÎLPI MARGINALI	ETAJE	30 × 40	16,0000	0,3297	2,90	1,0000	0,3297
		40 × 40	21,3333	0,4396	2,90	1,0000	0,4396
		40 × 50	41,6666	0,8586	2,90	1,0000	0,8586
	PARTER	40 × 60	72,0000	1,4837	3,40	1,1724	1,2655

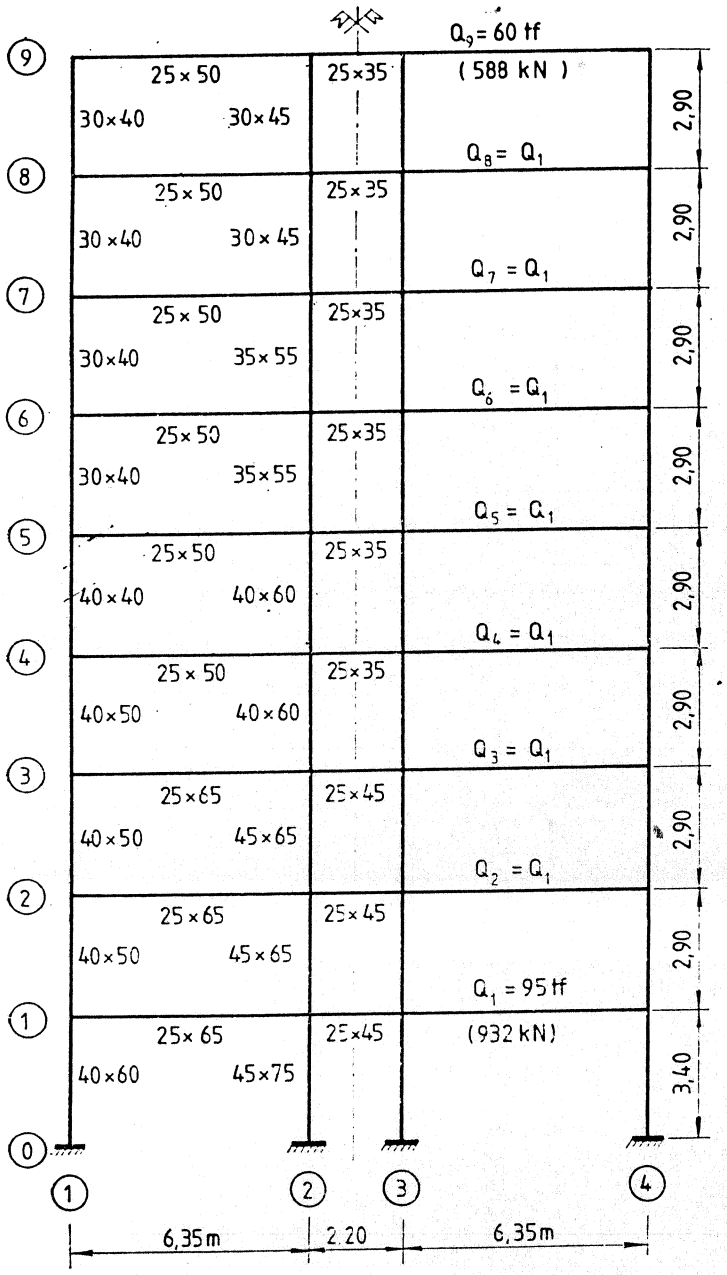


Fig. 10.10

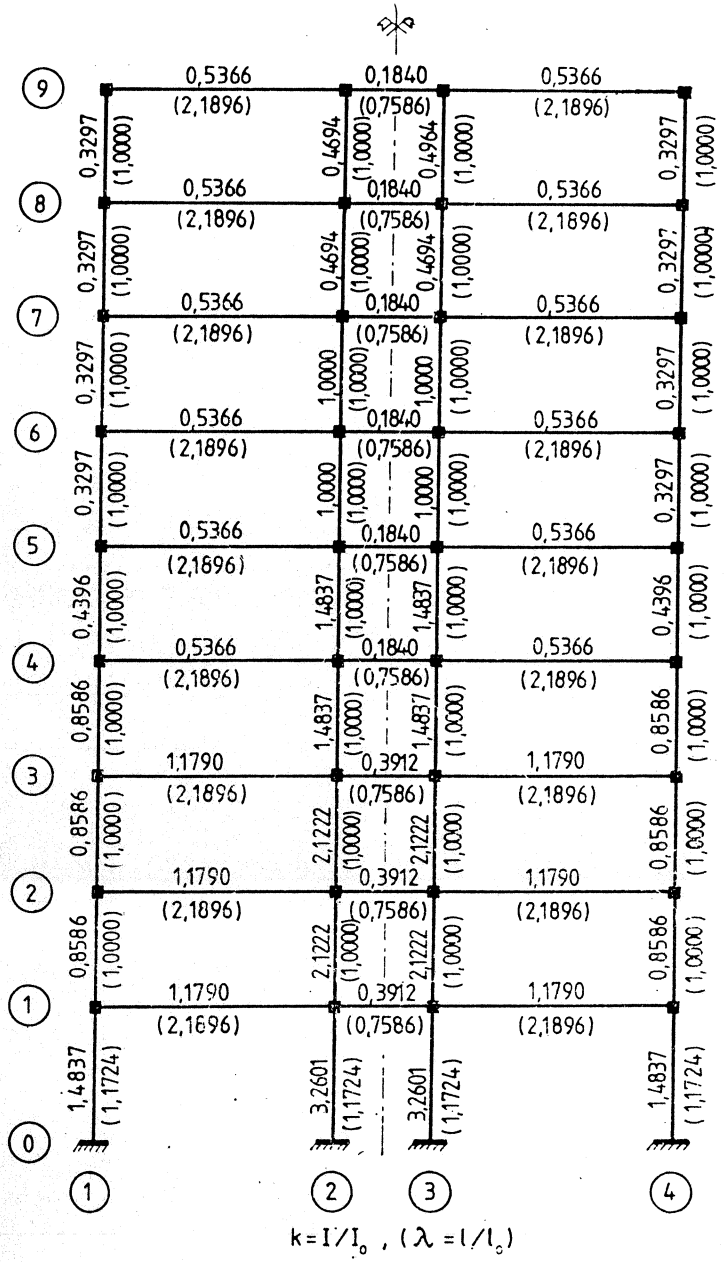


Fig. 10.11

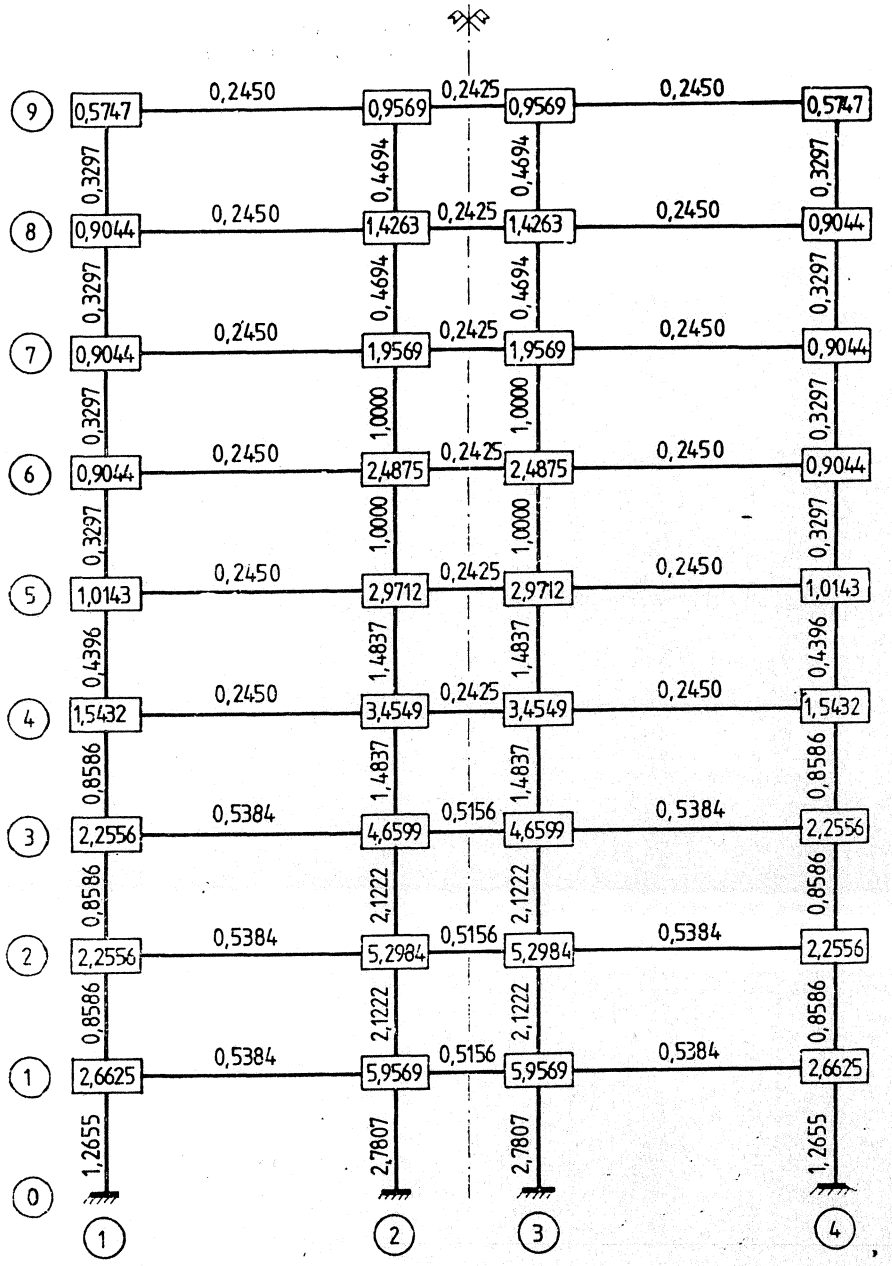


Fig. 10.12

Rigiditățile convenționale ale nodurilor se obțin prin intermediul relațiilor (10.14) și (10.15).

Factorii de distribuție $d_{jk}^{(s)}$ și $d_{kj}^{(s)}$, de la capetele fiecărui stîlp, se determină cu ajutorul formulelor (10.13). Valorile numerice ale factorilor de distribuție, precum și ale produselor $d_{jk}^{(s)} \cdot d_{kj}^{(s)}$ sînt calculate direct pe schema structurii din figura 10.13. Se precizează faptul că valorile acestor factori sînt trecute pe structură la extremitățile stîlpilor, iar produsele lor la mijlocul acestora.

Coeficienții de rigiditate relativă de nivel s-au calculat în tabelul 10.4, pentru fiecare stîlp în parte, folosind relația (10.6) și formulele din tabelul 10.1, pct. 4, adică

— pentru nivelurile curente:

$$r_{kj}^{(s)} = r_{jk}^{(s)} = \frac{\rho_{jk}^{(s)}}{\lambda_{jk}^{o}} A_{kj}^{(s)},$$

unde

$$A_{kj}^{(s)} = 1 - 0{,}75\,(d_{jk}^{(s)} + d_{kj}^{(s)} - d_{jk}^{(s)} \cdot d_{kj}^{(s)}),$$

TABELUL 10.4

Nivel curent k	Coeficienți de rigiditate relativă de nivel			Rigidități relative de nivel totale	
	Stîlpi 1 și 4 $r_k^{(1)}=r_k^{(4)}$	Stîlpi 2 și 3 $r_k^{(2)}=r_k^{(3)}$	Total r_k	$R_k = r_k R_0$ în tf/cm	în kN/cm
9	0,1494	0,2377	0,7742	58,23	571,2
8	0,1823	0,2969	0,9584	72,08	707,1
7	0,1823	0,4693	1,3032	98,01	961,5
6	0,1885	0,5475	1,4720	110,71	1086,0
5	0,2435	0,6887	1,8644	140,22	1375,5
4	0,3852	0,8037	2,3778	178,83	1754,3
3	0,4617	1,0500	3,0234	227,39	2230,7
2	0,4849	1,1451	3,2600	245,18	2405,2
1	0,5925	1,3148	3,8146	286,90	2814,4

— pentru parter:

$$r_{1,0}^{(s)} = r_{1}^{(s)} = \frac{\rho_{0,1}^{(s)}}{\lambda_{0,1}^{o}} A_{1,0}^{(s)},$$

unde

$$A_{1,0}^{(s)} = 1 - 0{,}75 d_{1,0}^{(s)}.$$

Coeficienții totali de rigiditate relativă de nivel s-au obținut prin sumarea celor corespunzători fiecărui stîlp în parte, conform relației (10.10)

$$r_{kj} = r_{jk} = \sum_{s=1}^{m} r_{jk}^{(s)}.$$

Valorile acestor coeficienți sînt tot în tabelul 10.4 în care mai sînt calculate și rigiditățile relative totale de nivel (10.9)

$$R_{kj} = R_k = r_k R_0.$$

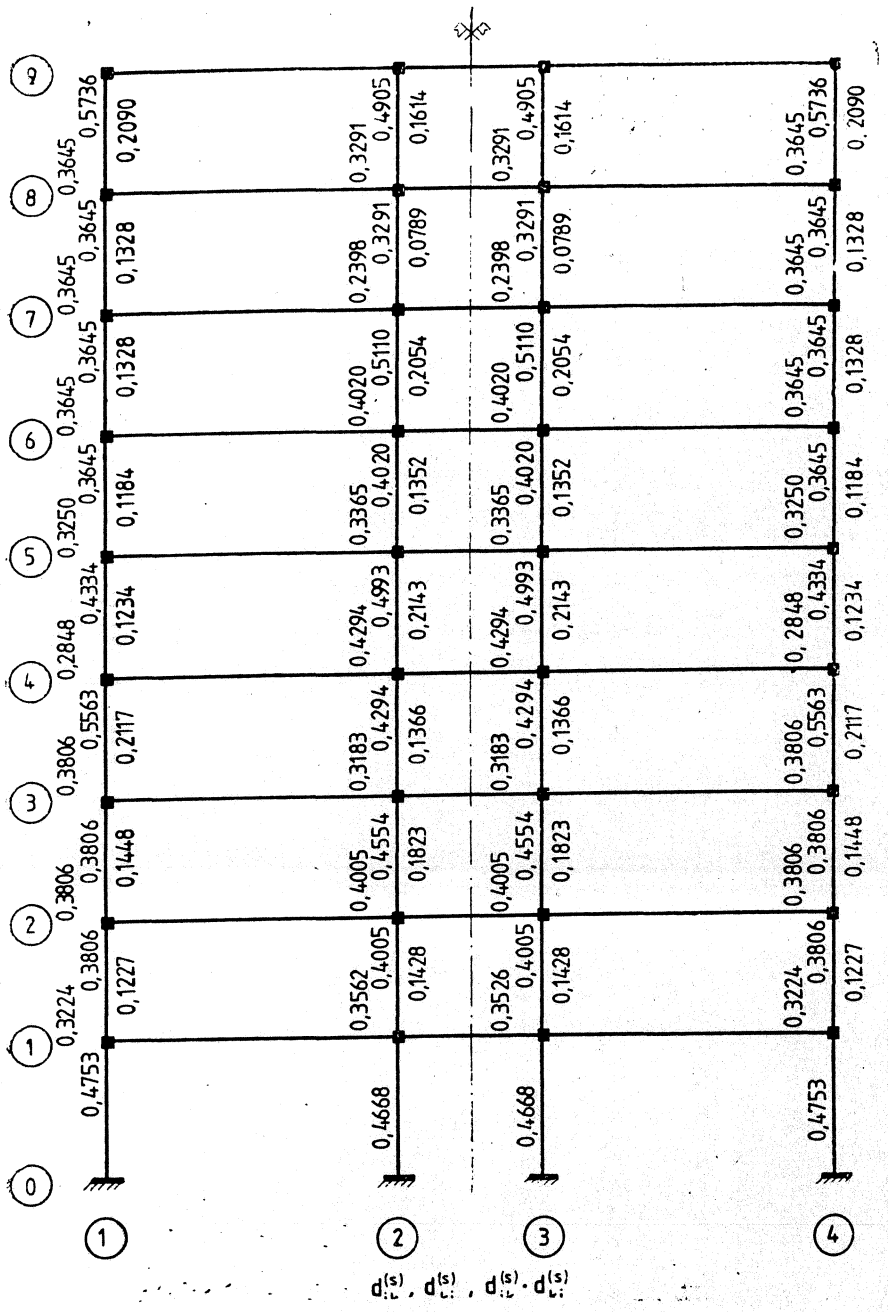


Fig. 10.13

● *Determinarea caracteristicilor proprii de vibrație*

Caracteristicile proprii de vibrație se vor determina prin metoda Holzer expusă și exemplificată în capitolul 6 și reluată în § 10.2.1 *a*. Operația de triere a soluțiilor s-a făcut cu relația (10.23)

$$\Phi_{k,i} = \Phi_{k+1,i} - \frac{\varphi_i}{\eta_{k+1}} \sum_{r=k+1}^{n} \alpha_r \Phi_{r,i},$$

care permite determinarea simultană a valorilor proprii și a vectorilor proprii corespunzători. Iterația finală pentru modul fundamental este prezentată sistematizat în tabelul 10.5. Caracteristica de frecvență obținută este

$$\varphi_1 = 0{,}0711.$$

TABELUL 10.5

φ_1	k, r	$\alpha_k = Q_k/Q_0$	$\alpha_k \varphi_1$	$\Phi_{k,1}$	$\alpha_k \varphi_1 \Phi_{k,1}$	$\Sigma \alpha \varphi \Phi$	η_k	$\frac{1}{\eta_k} \Sigma$
Modul 1 $\varphi_1 = 0{,}0711$	9	0,632	0,0449	1,0000	0,0449	0,0449	0,7742	0,0580
	8	1,000	0,0711	0,9420	0,0669	0,1118	0,9584	0,1166
	7	1,000	0,0711	0,8254	0,0586	0,1704	1,3032	0,1308
	6	1,000	0,0711	0,6946	0,0493	0,2197	1,4720	0,1493
	5	1,000	0,0711	0,5453	0,0387	0,2584	1,8644	0,1386
	4	1,000	0,0711	0,4067	0,0289	0,2873	2,3778	0,1208
	3	1,000	0,0711	0,2859	0,0203	0,3076	3,0234	0,1017
	2	1,000	0,0711	0,1842	0,0131	0,3207	3,2600	0,0984
	1	1,000	0,0711	0,0858	0,0062	0,3269	3,8146	0,0858
	0	—	—	0,0000	—	—	—	—

Perioada fundamentală de vibrație se va obține aplicînd formula (10.30) în care se vor substitui datele numerice ale problemei, adică

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\varphi_1}} \sqrt{\frac{m_0}{R_0}} = \frac{2\pi}{\sqrt{0{,}0711}} 0{,}0359 = 0{,}845 \text{ s}.$$

Ordonatele formei proprii fundamentale rezultă direct din tabelul 10.5.

Întrucît perioada fundamentală este mai mică decît 1,5 s, în conformitate cu normativul românesc P. 100-81, la determinarea încărcărilor seismice nu se va lua în considerație contribuția modurilor superioare. De aceea, nu vor mai fi determinate caracteristicile proprii de ordin superior.

Caracteristicile proprii de vibrație ale modului fundamental au fost calculate și prin metoda matriceală iterativă expusă în capitolul 6, în care s-a folosit matricea de flexibilitate. În acest caz, metoda de calcul se bazează pe relația 6.60

$$[\mathcal{D}]\{\Phi\} = \lambda\{\Phi\}, \quad \lambda = 1/\omega^2,$$

unde

$$[\mathcal{D}] = [D][M] = [R]^{-1}[M] = \frac{m_0}{R_0}[\eta]^{-1}[\alpha],$$

deoarece $m = \alpha m_0$ şi $R = \eta R_0$. Cele două matrice fiind definite, operaţiile de calcul se conduc în mod analog cu cele efectuate în aplicaţia 6.7.1. din capitolul 6, procesul iterativ corespunzător modului fundamental fiind rapid convergent şi direct deoarece $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_9$. În acelaşi mod se poate folosi direct matricea de rigiditate în condiţiile expuse în capitolul 6.

Întrucît se cunoaşte modul de aplicare al acestei metode nu se mai prezintă în detaliu treptele de iteraţie. Se menţionează faptul că s-au obţinut rezultatele exacte numai după patru iteraţii, întrucît iniţial s-a admis pentru vectorul propriu o variaţie liniară. Aceste rezultate, pulsaţia şi forma fundamentală, coincid cu cele determinate prin metoda Holzer.

Rezultate satisfăcătoare din punctul de vedere al exactităţii se obţin prin aplicarea metodei descrise în § 10.2.3. Calculul perioadei fundamentale se bazează pe formula (10.33)

$$T_1 = \psi_1 \sqrt{\frac{m_0}{R_0}},$$

în care coeficientul adimensional ψ_1 (10.36) se determină pe baza operaţiilor simple conţinute în tabelul 10.6. Astfel, s-a obţinut

$$\psi_1 = 5{,}45\left[\sum_{k=1}^{n=9} \alpha_k u_k^*\right]^{\frac{1}{2}} = 5{,}45\sqrt{18{,}6567} = 23{,}538$$

deci

$$T_1 = 0{,}845 \text{ s.}$$

TABELUL 10.6

Nivel k	$\alpha_k = Q_k/Q_0$	η_k	$u_k = \frac{1}{\eta_k}$	$u_k^* = \sum_{i=1}^{n} u_i$	$\alpha_k u_k^*$
1	1	3,8146	0,2621	0,2621	0,2621
2	1	3,2600	0,3068	0,5689	0,5689
3	1	3,0234	0,3307	0,8996	0,8996
4	1	2,3778	0,4206	1,3202	1,3202
5	1	1,8644	0,5364	1,8566	1,8566
6	1	1,4720	0,6793	2,5359	2,5359
7	1	1,3032	0,7674	3,3033	3,3033
8	1	0,9584	1,0434	4,3467	4,3467
9	0,632	0,7742	1,2916	5,6383	3,5634
				Σ	18,6567

Se constată că în cazul structurii analizate, perioada obţinută prin această metodă directă este identică cu perioada fundamentală obţinută printr-un calcul exact. Forma fundamentală de vibraţie se poate determina tot direct aplicînd relaţia (10.64). Rezultatele ce se obţin sînt foarte apropiate de cele exacte conţinute în tabelul 10.5.

- *Determinarea încărcărilor seismice orizontale*

Încărcările seismice care acţionează lateral structura în dreptul fiecărui nivel se vor determina, conform normativului românesc P. 100-81, prin

intermediul forţei tăietoare de bază (v. § 9.6.2). Pentru modul fundamental de vibraţie rezultă

$$F_1 = c_1 Q,$$

unde, în cazul considerării unui teren normal de fundare, coeficientul seismic total are expresia

$$c_1 = K_s \beta_1 \psi \varepsilon_1,$$

iar

$$Q = \sum_{k=1}^{n=9} Q_k = 820 \text{ tf}, \quad (8044 \text{ kN}).$$

Semnificaţia parametrilor care intervin în expresia coeficientului seismic total a fost definită în capitolul 9. Coeficientul de protecţie antiseismică rezultă $K_s = 0{,}12$ (corespunzător gradului 7), cel de reducere este $\psi = 0{,}20$ (pentru construcţii în cadre de beton armat), coeficientul dinamic are valoarea $\beta_1 = 2$ (deoarece $T < 1{,}5$ s), iar coeficientul de echivalenţă ε_1 se obţine, pe baza datelor conţinute în tabelul 10.7, cu formula

$$\varepsilon_1 = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n=9} \alpha_k \Phi_{k,1}\right]^2}{\left[\sum_{k=1}^{n=9} \alpha_k\right]\left[\sum_{k=1}^{n=9} \alpha_k \Phi_{k,1}^2\right]} = 0{,}75, \quad (Q_k = \alpha_k Q_0)$$

TABELUL 10.7

Nivel k	α_k	$\Phi_{k,1}$	$\Phi_{k,2}^2$	$\alpha_k \Phi_{k,1}$	$\alpha_k \Phi_{k,1}^2$	$d_{k,1}$	$F_{k,1}$ în tf	$F_{k,1}$ în kN	$x_{k,1}$ în cm
9	0,632	1,000	1,0000	0,6320	0,6320	0,1373	4,05	39,8	1,20
8	1,000	0,9420	0,8874	0,9420	0,8874	0,2047	6,04	59,3	1,13
7	1,000	0,8254	0,6813	0,8254	0,6813	0,1794	5,30	51,9	0,99
6	1,000	0,6946	0,4825	0,6946	0,4825	0,1509	4,46	43,7	0,83
5	1,000	0,5453	0,2973	0,5453	0,2973	0,1185	3,50	34,3	0,65
4	1,000	0,4067	0,1654	0,4067	0,1654	0,0884	2,61	25,6	0,49
3	1,000	0,2859	0,0817	0,2859	0,0817	0,0621	1,83	18,0	0,34
2	1,000	0,1842	0,0339	0,1842	0,0339	0,0400	1,18	11,6	0,22
1	1,000	0,0858	0,0074	0,0858	0,0074	0,0187	0,55	5,4	0,10
Σ	8,632	—	—	4,6019	3,2689	1,0000	29,52	289,6	—

Deoarece perioada fundamentală este mai mică de 1,5 s, se va lua în consideraţie numai influenţa primului mod de vibraţie asupra răspunsului total al structurii. În consecinţă, coeficientul seismic al forţei tăietoare de bază (F.T.B) va avea următoarea valoare numerică

$$c_1 = 0{,}036,$$

iar F.T.B.

$$F_1 = 29{,}52 \text{ tf} \quad (289{,}6 \text{ kN}).$$

Forţele seismice de nivel (F.S.N) se obţin prin distribuţia F.T.B astfel

$$F_{k,1} = d_{k,1} F_1,$$

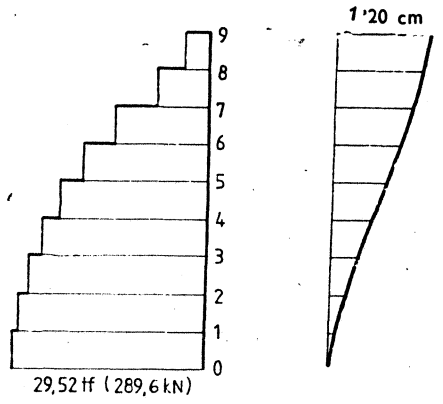


Fig. 10.14

în care, coeficientul de distribuţie are expresia

$$d_{k,1} = \frac{\alpha_k \Phi_{k,1}}{\sum_{k=1}^{n=9} \alpha_k \Phi_{k,1}}.$$

În tabelul 10.7 sînt calculate valorile coeficienţilor de distribuţie, precum şi F.S.N, iar variaţia forţelor tăietoare pe înălţimea structurii este reprezentată în figura 10.14.

Deplasările laterale produse de F.S.N se pot calcula fie prin intermediul rigidităţilor relative de nivel, fie cu relaţia generală (8.69) şi transformarea (8.64)

$$x_{k,1} = A_{k,1} SD_1 = A_{k,1} \frac{SA_1}{\omega_1^2},$$

Variaţia coeficientului de formă, precum şi valoarea spectrală a acceleraţiilor rezultă (8.98), (9.9):

$$A_{k,1} = 1{,}408\,\Phi_{k,1}, \quad SA_1 = g\frac{c_1}{\varepsilon_1} = 47 \text{ cm/s}^2 \quad \omega_1 = 2\pi/T_1,$$

iar în final se obţine pentru variaţia deplasărilor laterale expresia

$$x_{k,1} = 1{,}20\,\Phi_{k,1} = x_{n,1}\Phi_{k,1}, \quad x_{n,1} = x_{n,max} = 1{,}20 \text{ cm}.$$

Deplasările laterale sînt calculate direct în tabelul 10.7 şi reprezentate grafic în figura 10.14. Diagrama momentelor încovoietoare, produse de acţiunea forţelor seismice $F_{k,1}$ este prezentată în figura 10.15, ţinînd seama de caracterul simetric al structurii şi antisimetric al încărcărilor.

● *Observaţii*

— Dacă perioada fundamentală se raportează la parametrii

$$n = 9, \quad H = 26{,}60 \text{ m}, \quad B = 14{,}90 \text{ m},$$

rezultă exprimările

$$T_1 \simeq 0{,}094\,n, \quad T_1 \simeq 0{,}12\,H/\sqrt{B}, \quad T_1 \simeq 0{,}16\sqrt{H}$$

ceea ce dovedeşte că structura se situează la limita superioară a structurilor semiflexibile.

— Pentru structurile de beton armat avînd $T_1 \leqslant 1{,}5$ s, deplasarea maximă produsă de încărcările seismice evaluate prin normativul românesc P. 100-81, se poate determina cu formula (9.11) care devine

$$x_{n,1} = x_{n,max} = 14 K_s T_1^2, \quad [\text{cm}]$$

iar variaţia deplasărilor laterale

$$x_{k,1} = 14 K_s T_1^2 \Phi_{k,1}, \quad [\text{cm}].$$

Prin aplicarea acestei formule la structura analizată, rezultă

$$x_{n,max} = 14 \cdot 0{,}12 \cdot 0{,}845^2 = 1{,}20 \text{ cm},$$

şi deci o valoare identică celei obţinute anterior, deoarece $C(T_1) = \beta_1 = 2$ şi $c_R = \psi = 0{,}20$ (v. § 9.6.2).

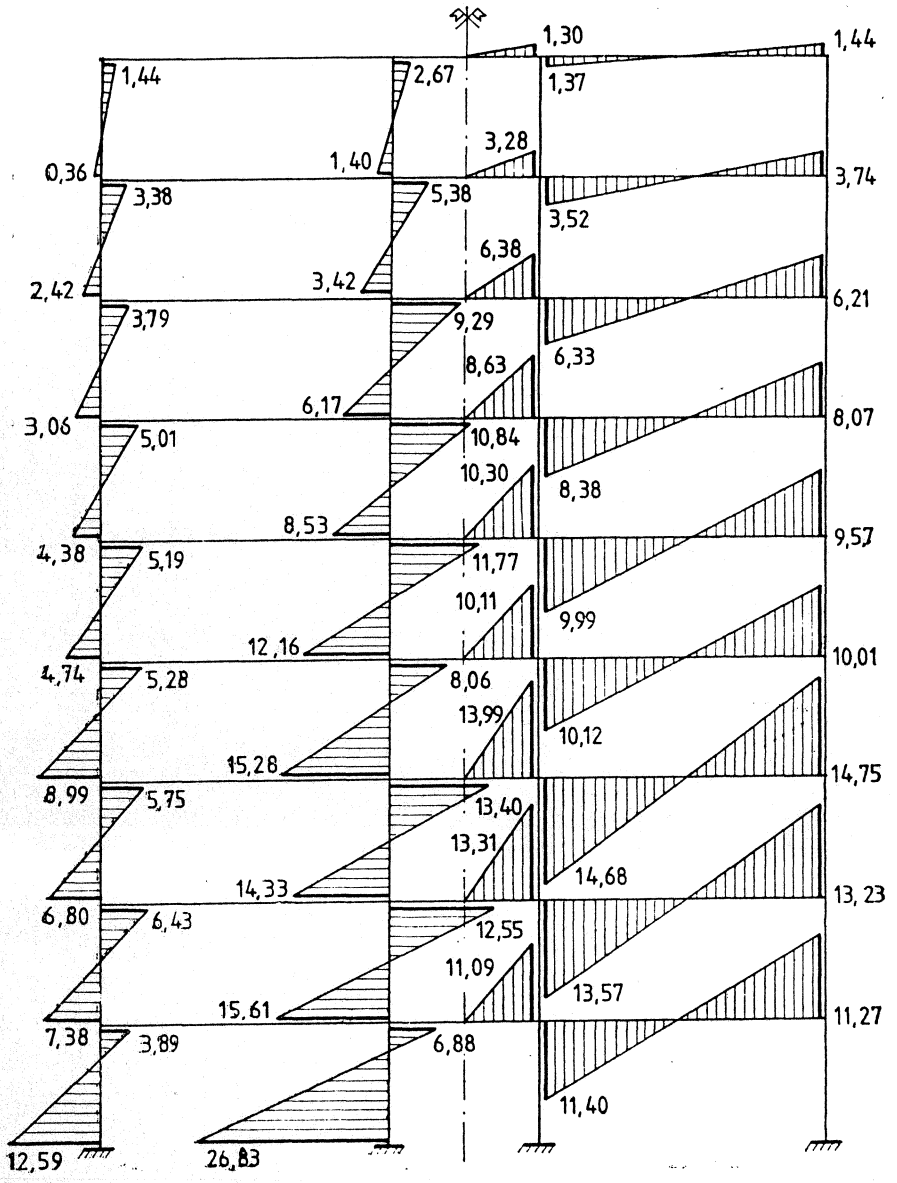


Fig. 10.15

11

DISTRIBUȚIA FORȚELOR SEISMICE LA ELEMENTELE VERTICALE DE REZISTENȚĂ. CENTRUL DE RIGIDITATE

În proiectarea construcțiilor rezistente la cutremure, se consideră în mod convențional la efectuarea analizei numerice, modelarea plană a structurilor pe cele două direcții ortogonale. Acest concept de abordare este valabil atunci cînd structurile sînt simetrice din punct de vedere geometric, elastic și inerțial, în care caz deplasările de translație și cele de rotație ale unui ansamblu structural rezultă decuplate. În asemenea situații, distribuția forțelor tăietoare, provenite din acțiunea seismică, la elementele de rezistență verticale (stîlpi, diafragme sau pereți din zidărie portantă) nu comportă precizări suplimentare față de cele expuse în capitolele anterioare.

În cazul apariției cuplajului elastic și inerțial specific structurilor nesimetrice, ca urmare a interacțiunii între deplasările de translație și de rotație, este necesară o analiză tridimensională care să țină seama de conlucrarea spațială a elementelor de rezistență verticale și orizontale.

Avînd în vedere caracterul spațial al comportării unei structuri, distribuția forțelor tăietoare la elementele verticale de rezistență cuprinse între două planșee consecutive, care nu se supun unor reguli de simetrie geometrică și elastică, devine mult mai complexă în raport cu rezolvarea plană unidimensională. În această situație, sub acțiunea forțelor seismice orizontale, între cele două planșee consecutive se produce o deplasare relativă rezultantă de tip plan-paralelă, care se compune din două mișcări de translație raportate la un sistem plan de axe ortogonale și o mișcare de rotație în jurul unei axe verticale. Deplasările absolute ale fiecărui planșeu vor fi de aceeași natură, astfel încît coordonatele dinamice de la fiecare nivel curent k vor fi în număr de trei (x_k, y_k, θ_k), iar pentru întreaga structură $3n$ ($k = 1, 2, \ldots n$). Originea axelor verticale în raport cu care se produce mișcarea de rotație elastică (numită și de torsiune) la nivelul fiecărui planșeu se numește *centru de rotație*, *centru de torsiune* sau *centru de rigiditate*. Întrucît forțele seismice au caracterul unor forțe de inerție, aplicîndu-se deci în centrul masic (sau de greutate) al fiecărui planșeu, existența centrului de torsiune va genera la toate nivelurile structurii momente de torsiune, avînd vectorii situați pe axele verticale de rotație (fig. 11.1, *a*).

Se menționează faptul că și în cazul structurilor simetrice (geometric, elastic și inerțial), cînd teoretic centrele masice coincid cu cele de rigiditate, este posibilă apariția unor momente de torsiune cu caracter accidental. Aceste momente pot proveni din neomogenitatea materialelor, variabilitatea încărcărilor efective, erori de execuție, nesincronismul mișcării seismice de bază etc. În acest sens, majoritatea actelor normative privind asigurarea antiseismică prevăd în cazul structurilor simetrice o excentricitate convențională a încărcărilor seismice (de la fiecare nivel al construcției) raportată la centrul masic.

În cuprinsul acestui capitol se va considera că elementele verticale de rezistență de la fiecare etaj au caracteristicile elastice și distribuția în plan oare-

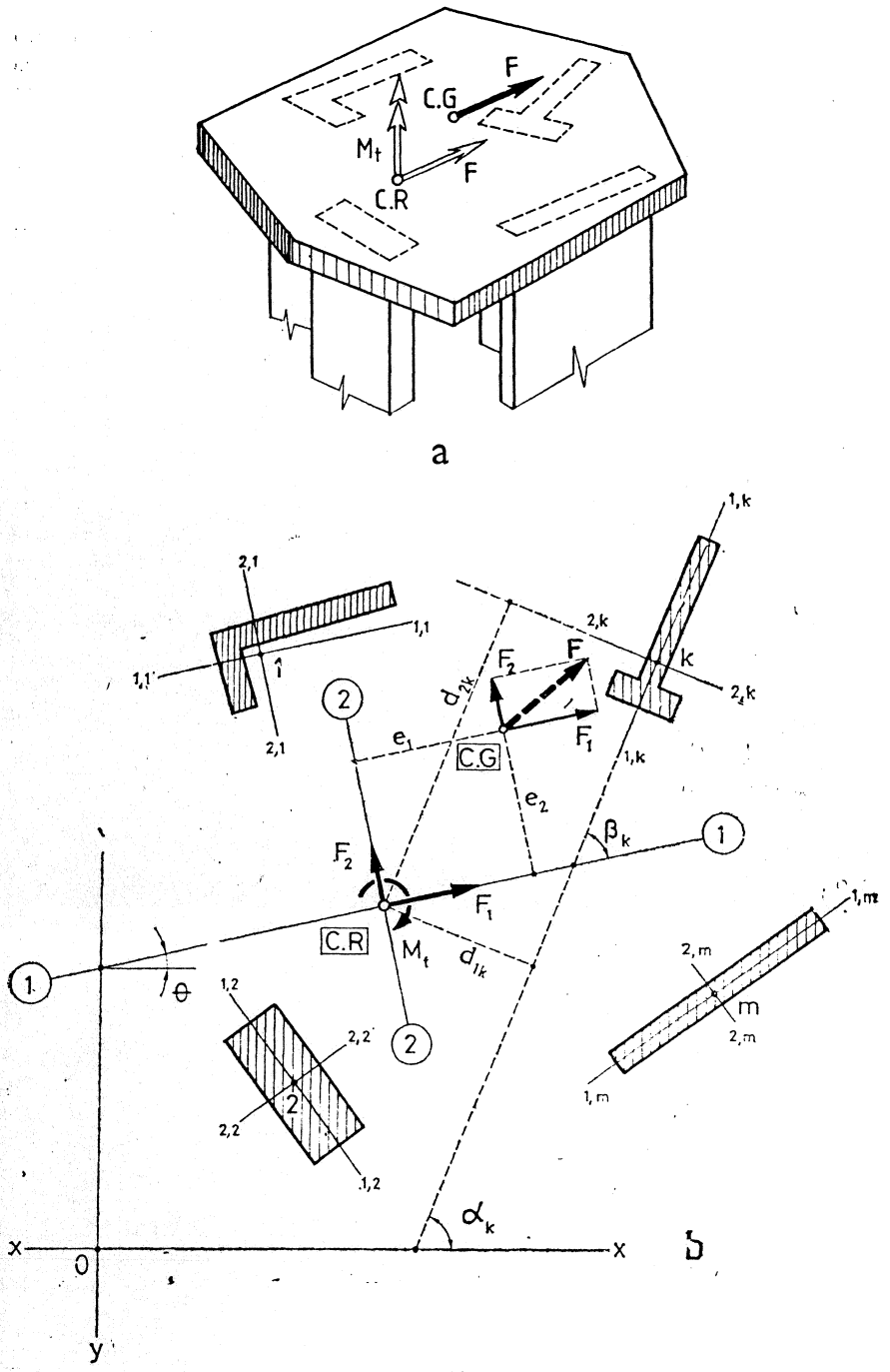


Fig. 11.1

care (fig. 11.1, *b*). Utilizarea noțiunii de rigiditate relativă de nivel (v. cap. 10) permite atît determinarea poziției centrelor de rigiditate (torsiune), cît și repartizarea forțelor seismice la elementele verticale de rezistență. În acest sens, se va prezenta *conceptul metodei centrului de rigiditate* și modul concret și sistematizat în care se aplică în analizele numerice de proiectare a structurilor. Expunerea reprezintă o extindere și generalizare a unui studiu elaborat de T.Y. Lin [126], în care se introduce noțiunea de *rigiditate oblică*.

În capitolul 8 a fost dezvoltată teoria generală a răspunsului seismic al structurilor spațiale, avînd în vedere cuplajul existent între mișcarea de rotație și mișcarea de translație, de la fiecare nivel al modelului dinamic.

11.1. IPOTEZE, NOTAȚII ȘI NOȚIUNI DE BAZĂ

În analiza ce urmează vor fi admise următoarele ipoteze:

● Planșeele se consideră perfect rigide în plan orizontal, avînd deci o comportare de disc indeformabil. Această ipoteză este foarte apropiată de realitate, ținînd seama că rigiditatea planșeului în plan orizontal este mult mai ridicată decît rigiditatea elementelor verticale de rezistență.

● Se presupun cunoscute rigiditățile relative de nivel ale elementelor verticale de rezistență (stîlpi, pereți) cuprinse între două planșee consecutive. Modul în care se definesc și se determină rigiditățile relative de nivel a fost expus în capitolul 10.

● Mărimea totală a forței laterale, considerată static-echivalentă, care acționează la un anumit nivel al întregii clădiri, se consideră apriori determinată deși, în realitate, este afectată de poziția centrului de rigiditate. Se poate admite într-o primă aproximație că variația forțelor laterale provenite din acțiunea seismică este cea stabilită în capitolele 8 și 9. Această aproximație poate fi ulterior corectată prin introducerea în calculul dinamic și al rigidităților relative de rotație.

În figura 11.1, *b* se prezintă un caz general de dispoziție în plan orizontal, a unui ansamblu format din m elemente verticale de rezistență, situat la un anumit etaj al unei clădiri.

Conform figurii 11.1, *b* principalele notații și definiții ce vor fi utilizate sînt următoarele:

$C.G.$, $C.M.$ — centrul de greutate sau centrul masic al planșeului considerat, în care se aplică forța laterală totală F;

$C.R.$ — centrul de rigiditate sau centrul de torsiune al ansamblului format din elementele verticale de rezistență;

$k = 1,2, \ldots m$ — numărul elementelor verticale de rezistență existente la etajul cuprins între două planșee;

xOy — sistem arbitrar de axe astfel ales încît să contribuie la simplificarea operațiilor de calcul;

$1k - 1k$, $2k - 2k$ — axele principale de inerție ale secțiunii transversale ale elementului k, avînd originea în centrul de greutate al secțiunii;

$1-1$, $2-2$ — axele principale ale ansamblului format din elementele k, trecînd prin centrul de rigiditate; față de aceste axe rigiditatea ansamblului are valori maxime sau minime;

α_k — unghiul pe care îl formează direcțiile $x - x$ și $1k - 1k$;

β_k — unghiul pe care îl formează direcțiile $1-1$ și $1k - 1k$;

θ — unghiul dintre axa arbitrară $x - x$ și axa principală $1-1$;

R — rigiditatea relativă a unui element vertical (oarecare) de rezistență;

R_{1k}, R_{2k} — rigiditățile relative ale elementului vertical de rezistență k pe direcțiile axelor principale $1k-1k$, respectiv $2k-2k$;

R_1, R_2 — rigiditățile relative totale ale ansamblului elementelor k pe direcția celor două axe principale $1-1$ și $2-2$;

R_x, R_y — rigiditățile relative totale ale ansamblului elementelor k pe direcțiile oarecare $x - x$, respectiv $y - y$, numite rigidități oblice;

R_{xy}, R_{yx} — componentele rigidităților relative, normale pe direcțiile rigidităților R_x, respectiv R_y, numite rigidități centrifugale;

F — forța laterală totală care acționează la nivelul planșeului superior, egală cu forța tăietoare corespunzătoare etajului cuprins între cele două planșee, provenită din încărcările seismice care acționează întreaga structură;

F_1, F_2 — componentele forței F după axele principale $1-1$ și $2-2$ ale ansamblului;

e_1, e_2 — distanțele, măsurate pe normală, de la $C.R.$ la direcțiile componentelor F_1 și F_2 aplicate în $C.G.$ (definesc excentricitatea $C.R.$ față de $C.G$);

d_{1k}, d_{2k} — distanțele măsurate pe normală, de la $C.R.$ la direcțiile principale $1k - 1k$, respectiv $2k-2k$, ale elementului de rezistență k;

$J = R_\varphi$ — momentul de inerție polar al ansamblului de elemente k față de $C.R.$ a cărui mărime este

$$J = \sum_{k=1}^{m} (R_{1k} d_{1k}^2 + R_{2k} d_{2k}^2),$$

și reprezintă rigiditatea elementelor verticale de rezistență la torsiune;

$M_t = M_z$ — momentul de torsiune care acționează în planul orizontal al planșeului superior, rezultat din reducerea forței F în raport cu $C.R.$ (fig. 11.1), adică

$$M_t = M_z = F_1 e_2 - F_2 e_1;$$

F'_k — forța ce revine elementului k în urma distribuției numai a forței F care trece prin $C.R.$ (fig. 11.2, *a*);

F'_{1k}, F'_{2k} — componentele forței F'_k după direcțiile axelor principale $1k - 1k$ și $2k - 2k$ ale elementului k,

$$\bar{F}'_k = \bar{F}'_{1k} + \bar{F}'_{2k};$$

F''_k — forța ce revine elementului k în urma distribuției numai a momentului de torsiune M_t (fig. 11.2, *b*);

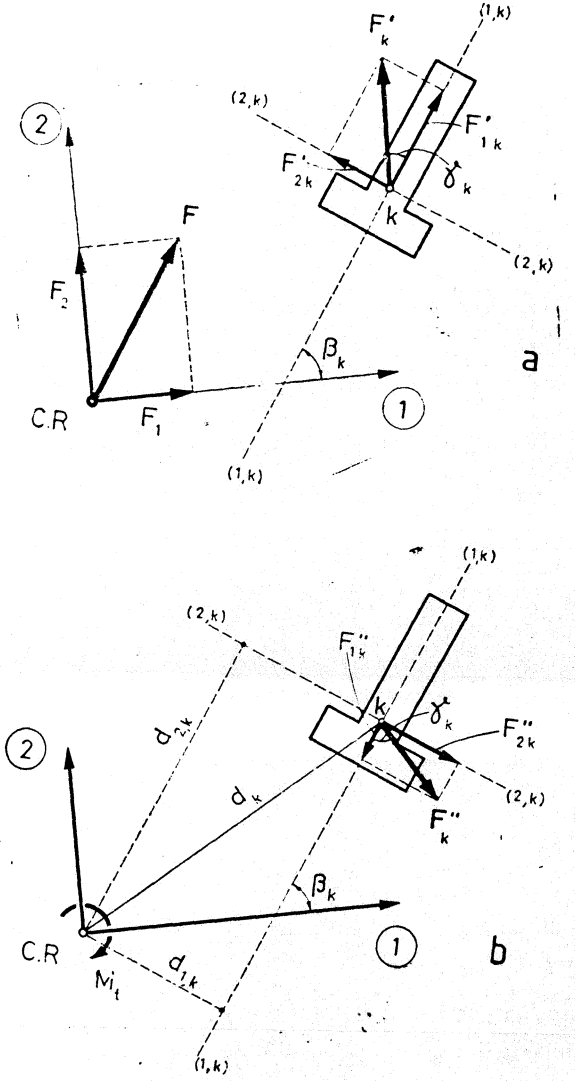


Fig. 11.2

F''_{1k}, F''_{2k} — componentele forței F''_k după direcțiile axelor principale $1k - 1k$ și $2k - 2k$ ale elementului k,

$$\bar{F}''_k = \bar{F}''_{1k} + \bar{F}''_{2k};$$

F_k — forța totală ce revine elementului k în urma acțiunii forței F în $C.G.$ al ansamblului de elemente verticale de rezistență; deci

$$\bar{F}_k = \bar{F}'_k + \bar{F}''_k;$$

Δ_1, Δ_2 — deplasările relative între cele două planșee consecutive produse de acțiunea forțelor F_1, respectiv F_2, adică

$$\Delta_1 = \frac{F_1}{R_1}, \quad \Delta_2 = \frac{F_2}{R_2};$$

φ — rotirea relativă a planșeului superior față de cel inferior, datorită acțiunii momentului de torsiune M_t,

$$\varphi = \frac{M_t}{J} = \frac{M_t}{R_\varphi}$$

În legătură cu noțiunile definite mai sus se vor face următoarele precizări:

● În forma cea mai generală, rigiditatea relativă de nivel a fost definită în capitolul 10. De aceea, în „metoda centrului de rigiditate" se vor utiliza rigiditățile relative definite în acest mod, ținînd seama de contribuția deformabilității elementelor verticale și orizontale de rezistență ale ansamblului structural. În felul acesta se extinde metoda preconizată de T.Y. Lin, iar rezultatele ce se obțin reflectă în mod mai corect *comportarea spațială* a clădirilor la acțiuni laterale.

● În cazul în care un element vertical de rezistență k este constituit dintr-o diafragmă de secțiune dreptunghiulară și grosime mică, rigiditatea în direcția axei principale minore $2k - 2k$ este foarte redusă, practic neglijabilă.

● Cînd $C.R.$ se află pe direcția forței F, momentul de torsiune este nul și deci $\varphi = 0$. În această situație planșeul superior va suferi numai o mișcare de translație relativă față de planșeul inferior.

● Pentru elementele de rezistență ale căror secțiuni transversale admit o axă de simetrie, această axă va coincide chiar cu una din axele principale de inerție. Cea de-a doua axă principală va fi perpendiculară pe aceasta, intersectîndu-se în centrul de greutate al secțiunii. La elementele de rezistență ale căror secțiuni transversale admit două axe de simetrie (secțiuni pătrate, dreptunghiulare sau circulare), axele principale de inerție vor coincide cu aceste axe de simetrie.

11.2. ANALIZA TEORETICĂ A DISTRIBUȚIEI FORȚELOR LATERALE LA ELEMENTELE DE REZISTENȚĂ ALE UNUI ETAJ

11.2.1. Rigiditatea relativă față de o axă oarecare. Rigiditatea oblică

Se va considera elementul vertical de rezistență k din figura 11.3. Se presupun determinate axele principale de inerție $1k - 1k$ și $2k - 2k$ ale secțiunii transversale, precum și rigiditățile relative R_{1k} și R_{2k} în raport cu aceste axe.

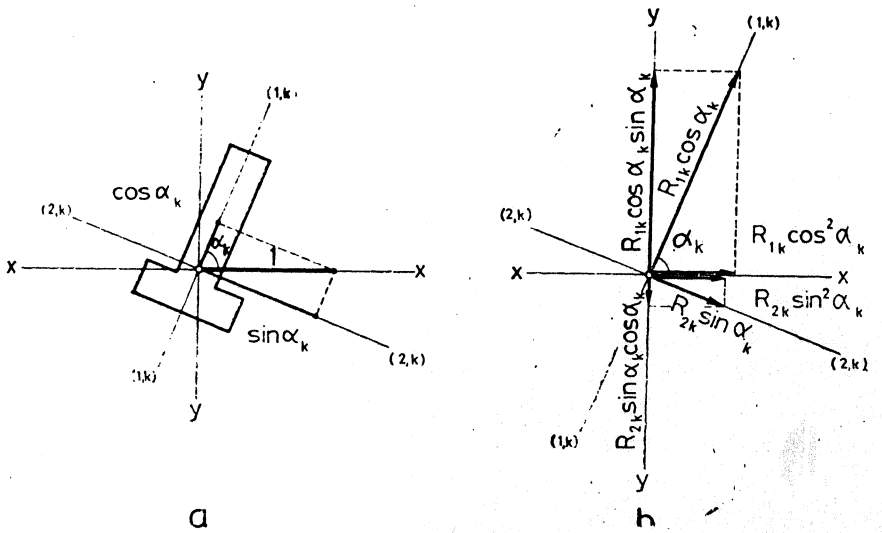


Fig. 11.3

În continuare se va arăta modul în care se poate calcula rigiditatea elementului în raport cu o altă axă arbitrară $x - x$ care face cu axa principală $1k - 1k$ unghiul α_k. Conform definiției rigidității relative de nivel, se va aplica capătului superior al stîlpului o deplasare relativă unitară pe direcția $x - x$. Această deplasare se descompune în $\cos \alpha_k$ (pe direcția axei $1k - 1k$) și $\sin \alpha_k$ (pe direcția $2k - 2k$), așa cum rezultă din figura 11.3, *a*. Forțele care produc aceste două componente ale deplasării unitare rezultă (fig. 11.3, *b*):

— pe direcția $1k - 1k$, $R_{1k} \cos \alpha_k$;

— pe direcția $2k - 2k$, $R_{2k} \sin \alpha_k$.

Compunînd proiecțiile acestor două forțe după direcțiile $x - x$ și $y - y$ se vor obține:

— rigiditatea elementului k pe direcția $x - x$

$$R_{x,k} = R_{1k} \cos^2 \alpha_k + R_{2k} \sin^2 \alpha_k, \tag{11.1}$$

numită *rigiditate oblică*;

— componenta rigidității elementului k pe direcția $y - y$

$$R_{xy,k} = (R_{1k} - R_{2k}) \sin \alpha_k \cos \alpha_k, \tag{11.2}$$

numită *rigiditate centrifugală*.

Procedînd în mod analog, pentru o deplasare unitară aplicată pe direcția $y - y$ vor rezulta:

$$R_{y,k} = R_{1k} \sin^2 \alpha_k + R_{2k} \cos^2 \alpha_k, \tag{11.3}$$

și

$$R_{yx,k} = (R_{1k} - R_{2k}) \sin \alpha_k \cos \alpha_k = R_{xy,k}. \tag{11.4}$$

Este evident că în cazul secțiunilor la care axele $x - x$ și $y - y$ coincid cu axele principale de inerție $R_{xy,k} = 0$. Totdeauna $R_{xy,k}$ este nul pentru secțiunile pătrate și circulare deoarece $R_{1k} = R_{2k}$. Pentru întregul ansamblu de elemente verticale de rezistență vor rezulta

$$R_x = \sum_{k=1}^{m} R_{x,k} = \sum_{k=1}^{m} (R_{1k} \cos^2 \alpha_k + R_{2k} \sin^2 \alpha_k), \tag{11.5}$$

$$R_y = \sum_{k=1}^{m} R_{y,k} = \sum_{k=1}^{m} (R_{1k} \sin^2 \alpha_k + R_{2k} \cos^2 \alpha_k), \tag{11.6}$$

$$R_{xy} = \sum_{k=1}^{m} R_{xy,k} = \sum_{k=1}^{m} (R_{1k} - R_{2k}) \sin \alpha_k \cos \alpha_k = R_{yx}. \tag{11.7}$$

În cazul diafragmelor ale căror secțiuni transversale sînt dreptunghiulare cu grosimi foarte mici, cum ar fi elementul m din figura 11.1, rigiditatea după direcția $2m - 2m$ poate fi neglijată ($R_{2m} = 0$) și deci

$$R_{x,m} = R_{1m} \cos^2 \alpha_m,$$

$$R_{y,m} = R_{1m} \sin^2 \alpha_m,$$

$$R_{xy,m} = R_{1m} \sin \alpha_m \cos \alpha_m.$$

După cum se poate constata, rigiditățile oblice se pot exprima direct prin intermediul rigidităților după axele principale ale fiecărui element, precum și direcțiile acestora.

11.2.2. Stabilirea poziției centrului de rigiditate

După cum s-a mai arătat, centrul de rigiditate *C.R.* este punctul prin care trecînd forța laterală totală F, nivelul superior efectuează numai o mișcare de translație în raport cu nivelul inferior, mișcare ce poate fi descompusă în două componente față de un sistem de axe ortogonale. În vederea stabilirii poziției *C.R.* se aplică procedeul ce se expune în continuare.

Se alege un sistem oarecare de axe xOy (fig. 11.4) în raport cu care se precizează poziția secțiunilor transversale ale grupului de stîlpi format din elementele $k = 1,2, \ldots m$.

Se va imprima întregului ansamblu o deplasare unitară pe direcția axei $x - x$, iar prin intermediul formulelor (11.1) și (11.2) se vor determina rigiditățile $R_{x,k}$ și $R_{xy,k}$, corespunzătoare fiecărui stîlp. Din punct de vedere mecanic aceste rigidități formează un sistem de forțe coplanare care, prin compunere, se reduce la o rezultantă a cărei direcție se va nota cu D_x (fig. 11.4). Este evident că pentru orice forță al cărei suport coincide cu direcția D_x, ansamblul de stîlpi va efectua numai o translație pe direcția axei $x - x$. Procedînd în mod analog, se va imprima o deplasare unitară ansamblului pe direcția $y - y$ obținîndu-se, cu ajutorul formulelor (11.3) și (11.4), sistemul de forțe coplanare a cărui rezultantă are direcția D_y (fig. 11.4). Dacă o forță ar acționa de-a lungul acestei direcții, ansamblul de stîlpi va efectua numai o translație pe direcția axei $y - y$. Intersecția celor două direcții D_x și D_y va determina poziția centrului de rigiditate, care corespunde definiției enunțate mai sus.

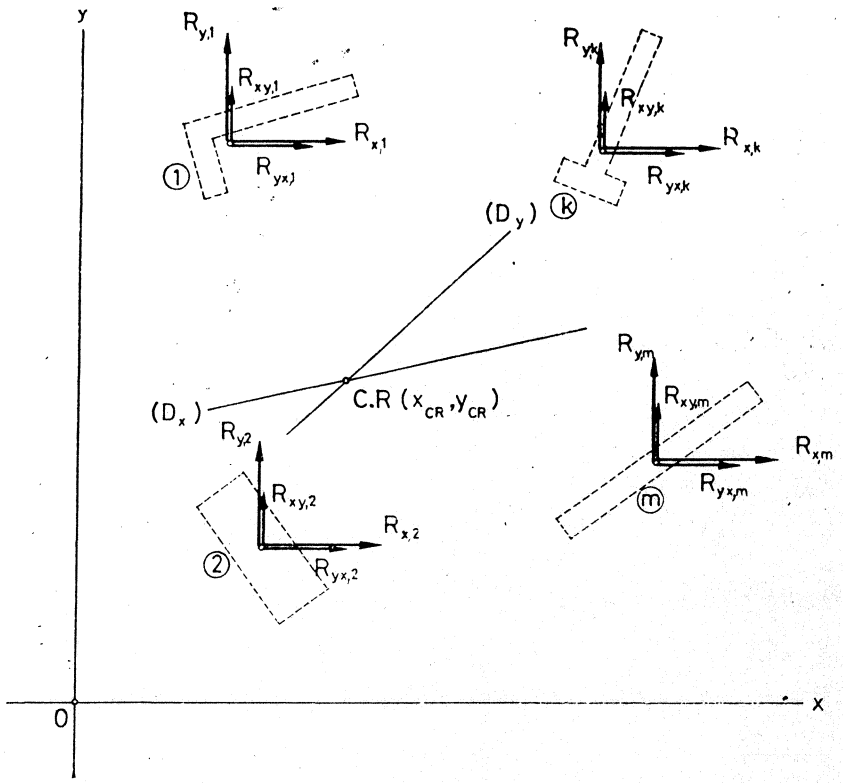


Fig. 11.4

Poziția centrului de rigiditate se poate determina fie pe cale grafică, fie pe cale analitică. Obținerea pe cale analitică a poziției *C.R.* se face pornind de la observația că direcțiile D_x și D_y reprezintă axele centrale ale celor două sisteme de forțe coplanare, care reprezintă rigiditățile corespunzătoare celor două situații considerate.

După cum se știe din mecanica teoretică, ecuația axei centrale pentru sistemele coplanare de forțe are forma:

$$M_0 - (Xy - Yx) = 0,$$

sau

$$Yx - Xy + M_0 = 0, \tag{11.8}$$

unde M_0 este momentul forțelor față de originea axelor xOy, iar X și Y proiecțiile sistemului de forțe după axele Ox, respectiv Oy.

Ținînd seama de ecuația (11.8) și de formulele (11.5), (11.6) și (11.7), ecuațiile dreptelor D_x și D_y vor fi:

$$(D_x) \quad R_{xy}x - R_x y + M_0^x = 0,$$

$$(D_y) \quad R_y x - R_{xy} y + M_0^y = 0.$$

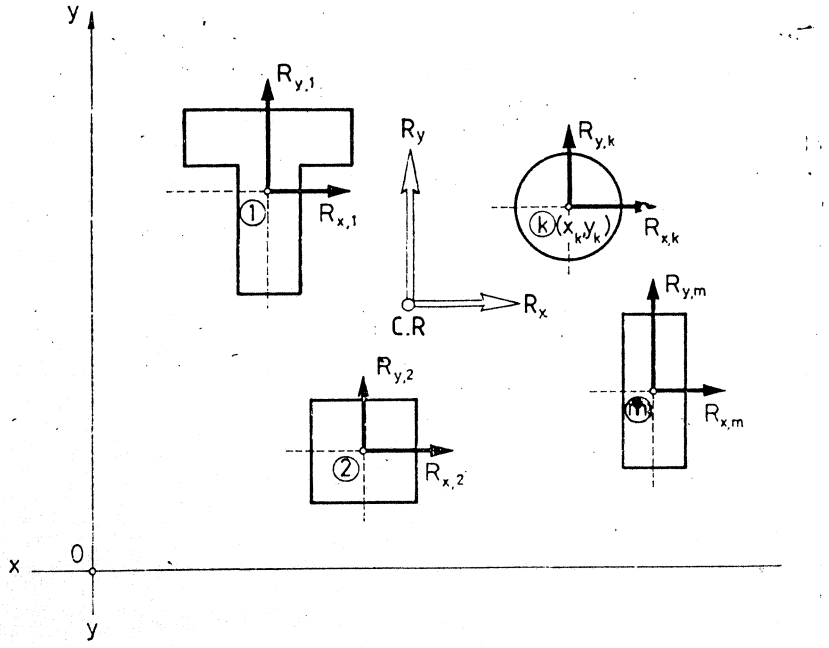


Fig. 11.5

Prin intersectarea acestor două drepte rezultă *coordonatele centrului de rigiditate* (*C.R.*):

$$x_{CR} = \frac{M_0^x R_{xy} - M_0^y R_x}{R_x R_y - R_{xy}^2}, \tag{11.9}$$

$$y_{CR} = \frac{M_0^x R_y - M_0^y R_{xy}}{R_x R_y - R_{xy}^2}. \tag{11.10}$$

În formulele (11.9) și (11.10), pentru momentele M_0^x și M_0^y sensul pozitiv este dat de sensul orar.

În cazul în care secțiunile stîlpilor ansamblului au direcțiile principale de inerție paralele între ele, iar sistemul xOy se alege de asemenea cu axele paralele cu aceste direcții (fig. 11.5), $R_{xy} = 0$ și deci, prin particularizarea formulelor (11.9) și (11.10) se obțin coordonatele centrului de rigiditate

$$x_{CR} = -\frac{M_0^y}{R_y} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} R_{y,k} x_k}{\sum_{k=1}^{m} R_{y,k}}, \tag{11.11}$$

$$y_{CR} = \frac{M_0^x}{R_x} = \frac{\sum_{k=1}^{m} R_{x,k} y_k}{\sum_{k=1}^{m} R_{x,k}}. \tag{11.12}$$

Dacă se lucrează în valori absolute, se poate face abstracție de semn în relația (11.11).

După cum se poate observa, în acest caz particular $C.R.$ reprezintă centrul forțelor paralele $R_{x,k}$ și $R_{y,k}$, iar formulele (11.11) și (11.12) sînt formal asemănătoare cu cele care precizează poziția centrelor de greutate ale suprafețelor plane.

Din această analiză rezultă că centrul de rigiditate al unui ansamblu de elemente verticale de rezistență este o *caracteristică elastică* a acestuia. Oricare deplasare s-ar fi aplicat acestui ansamblu, direcția rezultantei rigidităților elementelor verticale de rezistență va trece prin centrul de rigiditate. Orice forță exterioară care trece prin $C.R.$ va produce numai o mișcare de translație. Dacă forța acționează excentric față de $C.R.$ mișcarea rezultantă va fi compusă dintr-o mișcare de translație și una de rotație în jurul centrului de rigiditate. Această mișcare cu caracter elastic este analoagă mișcării plan-paralele studiate în mecanică.

11.2.3. Determinarea axelor principale de rigiditate

Axele principale de rigiditate ale ansamblului au proprietatea că în raport cu direcțiile lor, rigiditățile totale sînt maxime sau minime (analog definiției axelor principale de inerție). Axa principală în direcția căreia rigiditatea este maximă se va nota cu 1—1, iar axa principală în direcția căreia rigiditatea este minimă, cu 2—2. Dacă o forță este aplicată pe direcția unei axe principale, ansamblul se va deplasa (fără a se roti) în aceeași direcție. Deplasările pe direcțiile axelor principale au de asemenea valori extreme. În baza acestor definiții, rezultă că în raport cu axele principale (fig. 11.1), rigiditatea centrifugală totală R_{12} trebuie să fie nulă.

Se va porni de la prima definiție care permite, ca în raport cu axa 1—1, să se scrie ecuația

$$\frac{dR_1}{d\beta_k} = 0.$$

Ținînd seama de formula (11.5), ecuația de mai sus devine:

$$\frac{d}{d\beta_k}\sum_{k=1}^{m}(R_{1k}\cos^2\beta_k + R_{2k}\sin^2\beta_k) = 0,$$

sau

$$2\sum_{k=1}^{m}(-R_{1k}\cos\beta_k\sin\beta_k + R_{2k}\sin\beta_k\cos\beta_k) = 0.$$

Această relație care mai poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{k=1}^{m}(R_{1k} - R_{2k})\sin\beta_k\cos\beta_k = 0, \tag{11.13}$$

arată că rigiditatea centrifugală în raport cu axele principale de rigiditate este nulă, adică

$$R_{12} = 0,$$

relația (11.13) fiind analoagă cu (11.7).

Din figura 11.1 rezultă că $\alpha_k = \beta_k + \theta$, și deci

$$\beta_k = \alpha_k - \theta, \tag{11.14}$$

unghiurile α_k fiind cunoscute din datele inițiale ale problemei, iar unghiul θ, care precizează direcția principală 1—1, urmează a fi determinat.

Înlocuind relația (11.14) în (11.13) se obține:

$$\sum_{k=1}^{m}(R_{1k} - R_{2k})\sin(\alpha_k - \theta)\cos(\alpha_k - \theta) = 0,$$

sau

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(R_{1k} - R_{2k})\sin 2(\alpha_k - \theta) = 0.$$

Dezvoltînd ultima ecuație astfel

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(R_{1k} - R_{2k})(\sin 2\alpha_k\cos 2\theta - \cos 2\alpha_k\sin 2\theta) = 0,$$

se obține

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\sum_{k=1}^{m}(R_{1k} - R_{2k})\sin 2\alpha_k}{\sum_{k=1}^{m}(R_{1k} - R_{2k})\cos 2\alpha_k}. \tag{11.15}$$

Se poate constata după mersul operațiilor de calcul că problema este oarecum asemănătoare cu cea a determinării direcțiilor principale de inerție din rezistența materialelor.

În raport cu *axele principale de rigiditate*, rigiditățile relative oblice vor avea următoarele expresii:

$$R_1 = \sum_{k=1}^{m}(R_{1k}\cos^2\beta_k + R_{2k}\sin^2\beta_k), \tag{11.16}$$

$$R_2 = \sum_{k=1}^{m}(R_{1k}\sin^2\beta_k + R_{2k}\cos^2\beta_k), \tag{11.17}$$

unde β_k se determină cu relația (11.14) după ce θ s-a calculat cu formula (11.15).

11.2.4. Distribuția forței laterale redusă în C.R. la elementele de rezistență ale unui etaj

Dacă forța totală F (v. fig. 11.1) acționează pe una din direcțiile principale ale ansamblului elementelor verticale de rezistență, se va produce numai o mișcare de translație de-a lungul acestei direcții. În cazul în care $C.G.$ nu coincide cu $C.R.$ al ansamblului, forța F care acționează excentric se va reduce la două componente F_1 și F_2 în raport cu axele principale 1—1 și 2—2 precum și la momentul de torsiune M_t aplicat în $C.R.$

Se va arăta în continuare modul în care se distribuie componentele F_1 și F_2 (reduse în $C.R.$) la elementele de rezistență ale ansamblului.

Deplasările relative totale produse de aceste componente pe direcția axelor principale ale ansamblului vor fi

$$\Delta_1 = \frac{F_1}{R_1}, \quad \Delta_2 = \frac{F_2}{R_2}. \tag{11.18}$$

Aceste deplasări se descompun după direcțiile principale de inerție ale fiecărui element k al ansamblului obținîndu-se (fig. 11.6, *a*)

— pe direcția $1k - 1k$

$$\Delta'_{1k} = \Delta_1 \cos \beta_k + \Delta_2 \sin \beta_k, \tag{11.19}$$

— pe direcția $2k - 2k$

$$\Delta'_{2k} = \Delta_1 \sin \beta_k - \Delta_2 \cos \beta_k. \tag{11.20}$$

Se menționează că la sumarea componentelor deplasărilor se va ține seama de sensul lor efectiv de la element la element. Semnele de mai sus corespund sensurilor considerate în figura 11.6, *a*.

Cunoscînd deplasările relative (11.19) și (11.20) ale extremităților stîlpilor, se determină direct forțele corespunzătoare pe direcțiile principale (v. fig. 11.2, *a*), proporționale cu rigiditățile relative, adică

$$F'_{1k} = R_{1k}\Delta'_{1k}, \tag{11.21}$$

$$F'_{2k} = R_{2k}\Delta'_{2k}. \tag{11.22}$$

Deci forța distribuită elementului de rezistență k se obține prin compunerea vectorială

$$\bar{F}'_k = \bar{F}'_{1k} + \bar{F}'_{2k},$$

avînd mărimea

$$F'_k = \sqrt{(F'_{1k})^2 + (F'_{2k})^2},$$

direcția

$$\operatorname{tg} \gamma'_k = \frac{F'_{2k}}{F'_{1k}},$$

și punctul de aplicație în centrul de greutate al secțiunii transversale. Din punct de vedere practic interesează numai componentele scalare ale acestei forțe.

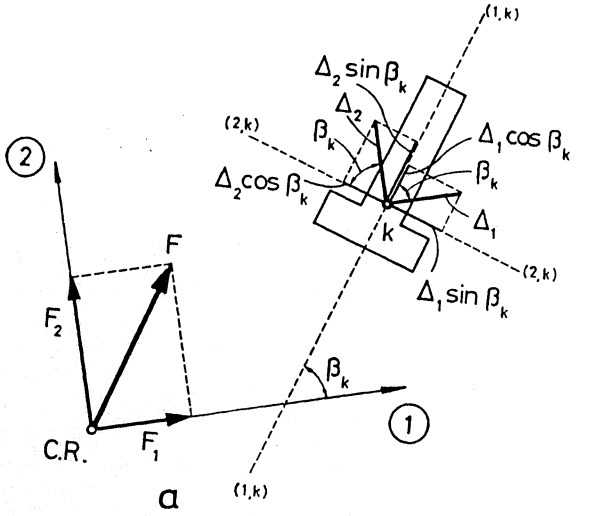
Dacă se ține seama de relațiile (11.18), (11.19) și (11.20), expresiile forțelor distribuite (11.21) și (11.22) mai pot fi exprimate direct în funcție de componentele F_1 și F_2 astfel:

$$F'_{1k} = \frac{R_{1k}}{R_1} F_1 \cos \beta_k + \frac{R_{1k}}{R_2} F_2 \sin \beta_k, \tag{11.23}$$

$$F'_{2k} = \frac{R_{2k}}{R_1} F_1 \sin \beta_k + \frac{R_{2k}}{R_2} F_2 \cos \beta_k. \tag{11.24}$$

11.2.5. Distribuția momentului de torsiune la elementele de rezistență ale unui etaj

Momentul de torsiune M_t, care acționează în planul orizontal al nivelului superior etajului considerat, produce o rotire generală a ansamblului cu unghiul φ (fig. 11.6, *b*). În urma acestei rotiri, relative, capătul superior al



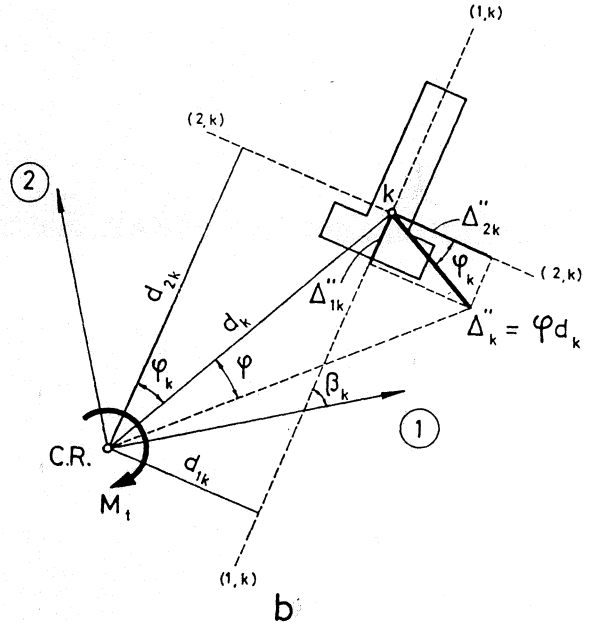


Fig. 11.6

unui element vertical de rezistență k se va deplasa perpendicular pe distanța dintre centrul de greutate al secțiunii k și $C.R.$ cu Δ_k''. Componentele acestei deplasări, față de axele principale ale elementului k, vor fi:

$$\Delta_{1k}'' = \Delta_k'' \sin \varphi_k = \varphi d_k \sin \varphi_k = \varphi d_{1k}, \tag{11.25}$$

$$\Delta_{2k}'' = \Delta_k'' \cos \varphi_k = \varphi d_k \cos \varphi_k = \varphi d_{2k}, \tag{11.26}$$

deoarece, în conformitate cu figura 11.6, b

$$\Delta_k'' = \varphi d_k, \quad d_k \sin \varphi_k = d_{1k} \quad \text{și} \quad d_k \cos \varphi_k = d_{2k}.$$

Datorită rotirii φ a ansamblului, pe direcțiile principale ale elementului k vor acționa forțele (fig. 11.2, b):

$$F_{1k}'' = R_{1k}\Delta_{1k}'' = \varphi R_{1k} d_{1k}, \tag{11.27}$$

$$F_{2k}'' = R_{2k}\Delta_{2k}'' = \varphi R_{2k} d_{2k}. \tag{11.28}$$

Din expresiile (11.27) și (11.28) rezultă că efectul momentului de torsiune M_t, care produce rotirea φ, se poate înlocui prin forțe la capătul superior al fiecărui element vertical, încît pentru întreg ansamblul se va putea scrie următoarea ecuație de echilibru

$$M_t = \sum_{k=1}^{m} (F_{1k}'' d_{1k} + F_{2k}'' d_{2k}),$$

sau

$$M_t = \varphi \sum_{k=1}^{m} (R_{1k} d_{1k}^2 + R_{2k} d_{2k}^2),$$

de unde se obține expresia rotirii φ a ansamblului

$$\varphi = \frac{M_t}{\sum_{k=1}^{m} (R_{1k} d_{1k}^2 + R_{2k} d_{2k}^2)}. \tag{11.29}$$

Se observă că numitorul expresiei (11.29) reprezintă momentul de inerție polar al rigidităților de translație ale elementelor verticale de rezistență în raport cu $C.R.$, adică

$$J = \sum_{k=1}^{m} (R_{1k} d_{1k}^2 + R_{2k} d_{2k}^2) = R_\varphi \tag{11.30}$$

în care caz, expresia (11.29) devine

$$\varphi = \frac{M_t}{J}, \tag{11.31}$$

ceea ce demonstrează că J este rigiditatea de ansamblu la translație R_φ.

Înlocuind (11.31) în relațiile (11.27) și (11.28) se obțin expresiile forțelor distribuite din acțiunea momentului de torsiune M_t:

$$F_{1k}'' = \frac{R_{1k}}{J} d_{1k} M_t \tag{11.32}$$

$$F_{2k}'' = \frac{R_{2k}}{J} d_{2k} M_t. \tag{11.33}$$

Conform figurii 11.1, b momentul de torsiune are următoarea expresie

$$M_t = F_1 e_2 - F_2 e_1. \tag{11.34}$$

Forța totală F_k'' care revine elementului k se obține prin compunerea vectorială

$$\bar{F}_k'' = \bar{F}_{1k}'' + \bar{F}_{2k}''.$$

Mărimea acestei forțe va fi

$$F_k'' = \sqrt{(F_{1k}'')^2 + (F_{2k}'')^2},$$

iar direcția

$$\operatorname{tg} \gamma_k'' = \frac{F_{2k}''}{F_{1k}''},$$

având punctul de aplicație în centrul de greutate al secțiunii elementului k.

11.2.6. Distribuția forței laterale în cazul general

În cazul general, când $C.R.$ nu coincide cu $C.G.$, distribuția forței laterale totale la elementele de rezistență k ale ansamblului se face cu ajutorul formulelor stabilite, adică

$$F_{1k} = F_{1k}' + F_{1k}'',$$

$$F_{2k} = F_{2k}' + F_{2k}'',$$

sau

$$F_{1k} = \frac{R_{1k}}{R_1} F_1 \cos \beta_k + \frac{R_{1k}}{R_2} F_2 \sin \beta_k + \frac{R_{1k}}{J} d_{1k} M_t, \tag{11.35}$$

$$F_{2k} = \frac{R_{2k}}{R_1} F_1 \sin \beta_k + \frac{R_{2k}}{R_2} F_2 \cos \beta_k + \frac{R_{2k}}{J} d_{2k} M_t. \tag{11.36}$$

În aceste formule semnele vor rezulta din sensurile efective pe care le are fiecare termen în parte în funcție de poziția $C.R.$ față de $C.G.$ și sensul forței laterale F. Din relațiile (11.35) și (11.36) se constată că fiecare stîlp se încarcă proporțional cu rigiditatea relativă exprimată în raport cu axele principale proprii.

11.2.7. Cîteva situații particulare

Se consideră ansamblul de elemente verticale de rezistență dispuse de așa manieră încît secțiunile transversale au axele principale de inerție paralele cu două axe ortogonale (fig. 11.7). În această situație axele principale ale ansamblului vor fi paralele cu axele principale de inerție ale elementelor. Coordonatele $C.R.$ se vor determina cu formulele (11.11) și (11.12).

Forțele distribuite se obțin prin particularizarea formulelor (11.36) și (11.37), iar direcția lor va fi paralelă cu axele principale ale ansamblului.

Dacă $C.R.$ coincide cu $C.G.$ efectul rotației dispare, componentele F_1 și F_2 distribuindu-se proporțional cu rigiditatea stîlpilor pe direcția 1—1, respectiv 2—2.

În toate relațiile ce vor rezulta, expresiile rigidităților R_1 și R_2 ale ansamblului, în raport cu axele principale, se obțin prin particularizarea expresiilor (11.16) și (11.17). Se constată însă că R_1 va fi egală cu suma rigidităților

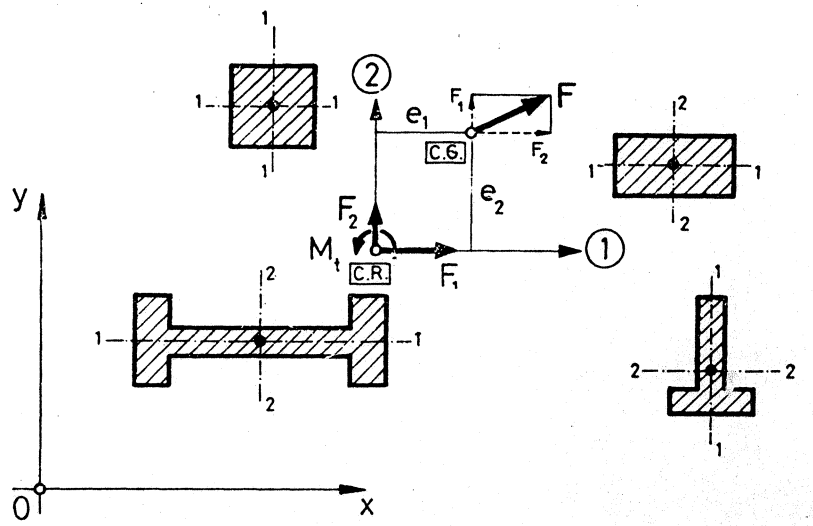


Fig. 11.7

elementelor după direcția 1—1, iar R_2 cu suma rigidităților acelorași elemente după direcția 2—2.

Pentru secțiunea transversală din figura 11.8, care corespunde unui ansamblu format din diafragmele verticale, rezultă:

— poziția centrului de torsiune, situat pe axa de simetrie

$$x_{CR} = \frac{\sum_{k=1}^{m} R_{1k} x_k}{\sum_{k=1}^{m} R_{1k}} = \frac{\sum_{k=1}^{m} I_k x_k}{\sum_{k=1}^{m} I_k}; \tag{11.37}$$

— momentul de inerție polar al ansamblului (rigiditatea la torsiune)

$$J = \sum_{k=1}^{m} R_{1k} d_{1k}^2 = \sum_{k=1}^{m} I_k d_k^2; \tag{11.38}$$

— momentul de torsiune

$$M_t = Fe;$$

— forțele distribuite, aferente fiecărei diafragme

$$F_k = \frac{I_k}{\sum_{k=1}^{m} I_k} F + \frac{I_k d_k}{\sum_{k=1}^{m} I_k d_k^2} Fe;$$

sau

$$F_k = F\left[\frac{I_k}{\sum_{k=1}^{m} I_k} + e\frac{I_k d_k}{\sum_{k=1}^{m} I_k d_k^2}\right], \tag{11.39}$$

cu observația că al doilea termen din paranteză poate fi pozitiv sau negativ în funcție de poziția *C.G.* față de *C.R.*

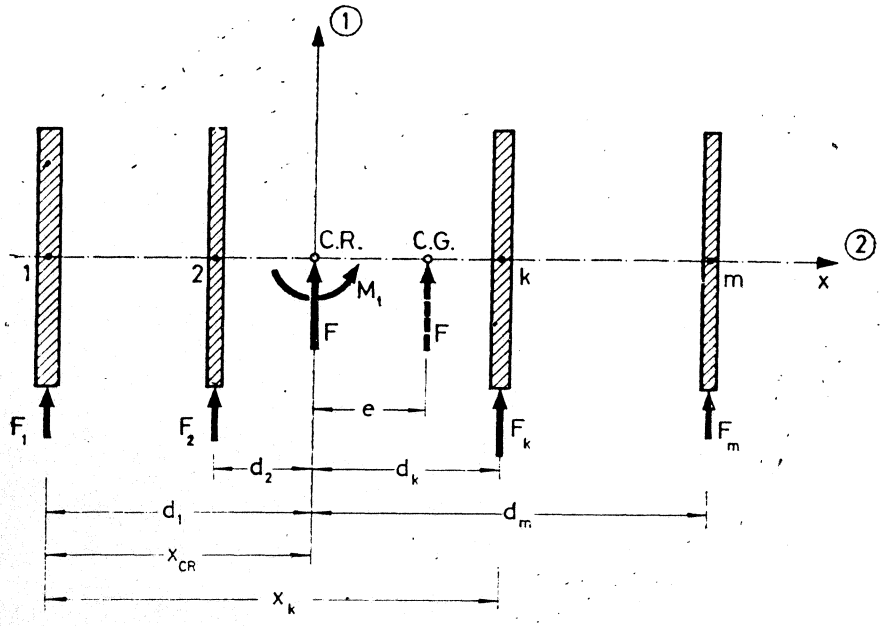


Fig. 11.8

Dacă se notează paranteza din (11.39) cu

$$\rho_k = \left[\frac{I_k}{\sum_{k=1}^{m} I_k} + e\frac{I_k d_k}{\sum_{k=1}^{m} I_k d_k^2}\right], \tag{11.40}$$

relația (11.39) devine

$$F_k = \rho_k F. \tag{11.41}$$

În acest caz ρ_k are semnificația unui coeficient de distribuție al forței excentrice F la elementele de rezistență k, ținînd seama de efectul simultan al translației și rotației ansamblului de diafragme din figura 11.8. Al doilea termen din relația (11.40) poate fi pozitiv sau negativ.

În conformitate cu observațiile făcute anterior, rigiditatea ansamblului de diafragme pe direcția axei de simetrie se consideră nulă ($R_2 = 0$).

11.3. UNELE PRECIZĂRI

● În general, linia centrelor de rigiditate este o curbă în spațiu. În cazul structurilor avînd elementele verticale de rezistență alcătuite din diafragme, cu caracteristici elastice identice pe înălțime, această curbă devine o dreaptă verticală.

● Planșeele sînt considerate perfect rigide în planul lor (în planul orizontal), dar flexibile pe direcția normală, ceea ce face ca rigiditățile relative de nivel să fie influențate atît de deformarea elementelor existente la etajul considerat, cît și de deformațiile elementelor structurale de la celelalte etaje.

● Conlucrarea spațială a tuturor elementelor verticale de rezistență se realizează numai prin prezența planșeelor de la fiecare etaj.

● Metoda centrului de rigiditate se aplică în calculul structurilor la acțiuni laterale (cutremur, vînt, explozii etc.) numai în cazul în care există o pronunțată nesimetrie elastică.

● Momentul de torsiune M_t are o influență importantă asupra distribuției forțelor tăietoare și implicit asupra comportării structurilor în ansamblu. În afara forțelor laterale aplicate direct, sînt puse în evidență forțe tăietoare suplimentare datorită efectului produs de M_t.

● Pentru evitarea unor disimetrii elastice pronunțate și deci apariția unor momente de torsiune importante, în proiectarea construcțiilor înalte se utilizează în general elemente verticale de rezistență și rigidizare închise, de tip nucleu central.

● Din punctul de vedere al proiectării și conformării antiseismice a structurilor, pentru a reduce efectul defavorabil al momentelor de torsiune, elementele verticale de rezistență se dispun de așa natură încît linia centrelor de greutate să fie cît mai apropiată sau chiar să coincidă cu linia centrelor de rigiditate.

11.4. PRINCIPALELE ETAPE DE CALCUL PRIVIND DISTRIBUȚIA FORȚEI LATERALE TOTALE LA ELEMENTELE VERTICALE DE REZISTENȚĂ DE LA UN ANUMIT ETAJ AL UNEI CLĂDIRI

● Se calculează rigiditățile relative ale elementelor verticale de rezistență în direcțiile axelor principale de inerție ale secțiunilor transversale.

● Se calculează rigiditățile oblice în raport cu un sistem de axe convenabil ales.

● Se stabilesc poziția centrului masic $C.M.$ al încărcărilor gravitaționale unde se aplică forța laterală totală de nivel F și poziția centrului de torsiune $C.R.$

● Se determină axele principale de rigiditate 1—1 și 2—2 ale ansamblului.

● Se calculează momentul de inerție polar J (rigiditatea la torsiune).

● Se calculează momentul de torsiune M_t.

● Se obțin forțele distribuite fiecărui element de rezistență F'_k, datorită numai acțiunii forței F redusă în $C.R.$

● Se obțin forțele distribuite fiecărui element de rezistență F''_k, datorită numai acțiunii momentelor de torsiune M_t.

● Se determină forțele distribuite fiecărui element de rezistență F_k, ca efect al aplicării excentrice a forței F.

11.5. APLICAȚII

Aplicația 11.5.1. Se consideră o construcție de locuit cu 11 niveluri alcătuite din diafragme de beton armat monolit, pline sau cu goluri, avînd în plan dispoziția constructivă dată în figura 11.9. Diafragmele au grosime constantă, aceeași formă a secțiunii transversale și aceleași tipuri de goluri pe toată înălțimea.

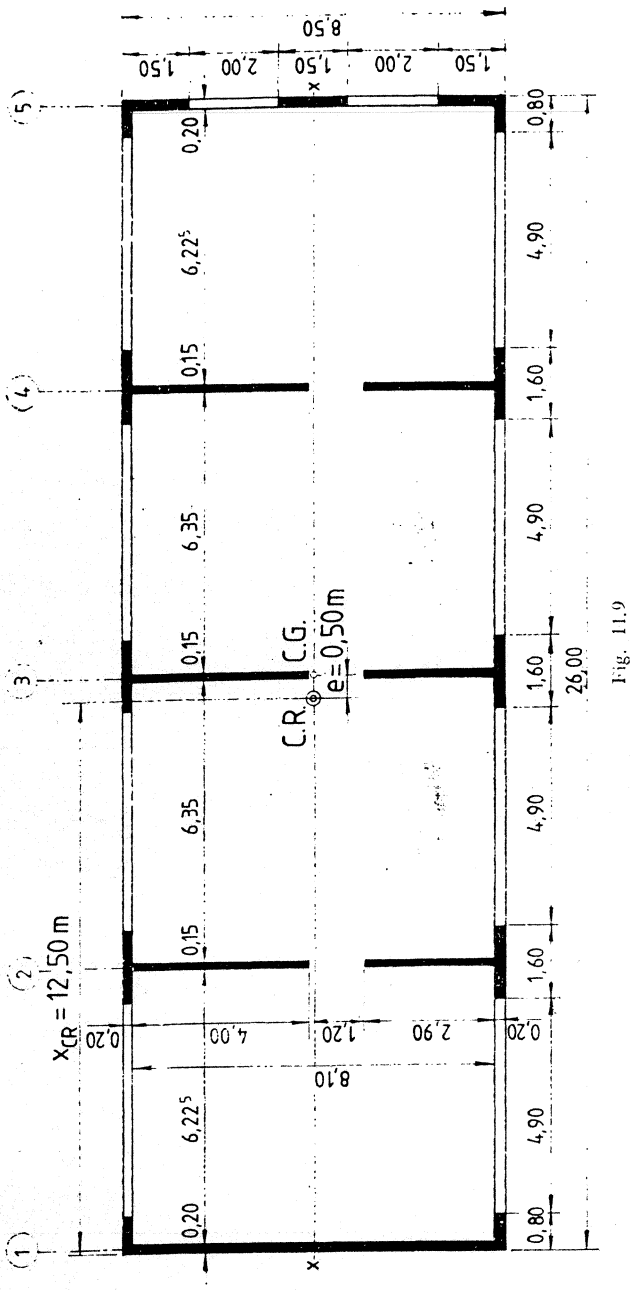


Fig. 11.9

Se cere să se determine poziția centrului de rigiditate *C.R.*, precum și coeficienții de distribuție ai forței laterale aplicată în centrul masic *C.G.*

Întrucît rigiditatea diafragmelor pe direcția $x - x$ se neglijează, centrul de rigiditate se va afla pe axa longitudinală de simetrie la distanța x_{CR}, măsurată de la extremitatea stîngă a construcției (fig. 11.9). Poziția centrului de rigiditate se calculează cu relația (11.37)

$$x_{CR} = \frac{\sum_k I_k x_k}{\sum_k I_k}.$$

Pentru diafragmele 1 și 5 au rezultat centrele de greutate proprii situate pe axa de simetrie la distanțele de 0,15 m, respectiv 0,19 m, măsurate de la fețele exterioare ale secțiunilor.

Momentele de inerție ale celor cinci secțiuni transversale prin diafragmă, calculate în raport cu axa de simetrie comună $x - x$, au rezultat

$$I_1 = 14{,}42 \text{ m}^4, \quad I_2 = I_3 = I_4 = 17{,}60 \text{ m}^4, \quad I_5 = 11{,}65 \text{ m}^4.$$

Distanțele x_k, măsurate de la fața exterioară a diafragmei 1, sînt următoarele:

$$x_1 = 0{,}15 \text{ m}, \quad x_2 = 6{,}45 \text{ m}, \quad x_3 = 13{,}15 \text{ m}, \quad x_4 = 20{,}65 \text{ m}, \quad x_5 = 25{,}81 \text{ m}.$$

În consecință, poziția centrului de rigiditate va fi precizată de coordonata

$$x_{CR} = 12{,}50 \text{ m},$$

care pune în evidență existența unei excentricități $e = 0{,}50$ m, față de poziția centrului masic *C.G.* considerat la intersecția celor două axe de simetrie geometrică, adică la distanța $x_{C.G.} = 13{,}00$ m.

Coeficienții de distribuție ρ ai forței laterale aplicate în *C.G.*, la fiecare diafragmă, sînt calculați în tabelul 11.1 folosind relația (11.40).

TABELUL 11.1

Diafragma k	I_k în m⁴	d_k în m	d_k^2 în m²	$I_k d_k$ în m⁴	$I_k d_k^2$ în m⁶	$\frac{I_k}{\Sigma I_k}$	$e\frac{I_k d_k}{\Sigma I_k d_k^2}$	ρ_k
1	14,42	12,35	152,52	178,08	2199,38	0,183	−0,0155	0,1675
2	17,60	6,00	36,00	105,60	633,60	0,223	−0,0093	0,2137
3	17,60	0,50	0,25	8,80	4,40	0,223	0,0008	0,2238
4	17,60	7,00	49,00	123,20	862,40	0,223	0,0106	0,2336
5	11,65	13,31	177,16	155,03	2063,87	0,148	0,0134	0,1614
Σ	78,87	—	—	—	5763,65	1,000	0	1,0000

Aplicația 11.5.2. Se cere să se calculeze poziția centrului de rigiditate precum și distribuția forței laterale F aplicată în centrul masic, pentru o clădire ale cărei elemente verticale de rezistență sînt precizate prin vederea în plan din figura 11.10. Se observă că structura de rezistență este de tip mixt, alcătuită din cadre și diafragme. Într-o primă aproximație se va neglija partici-

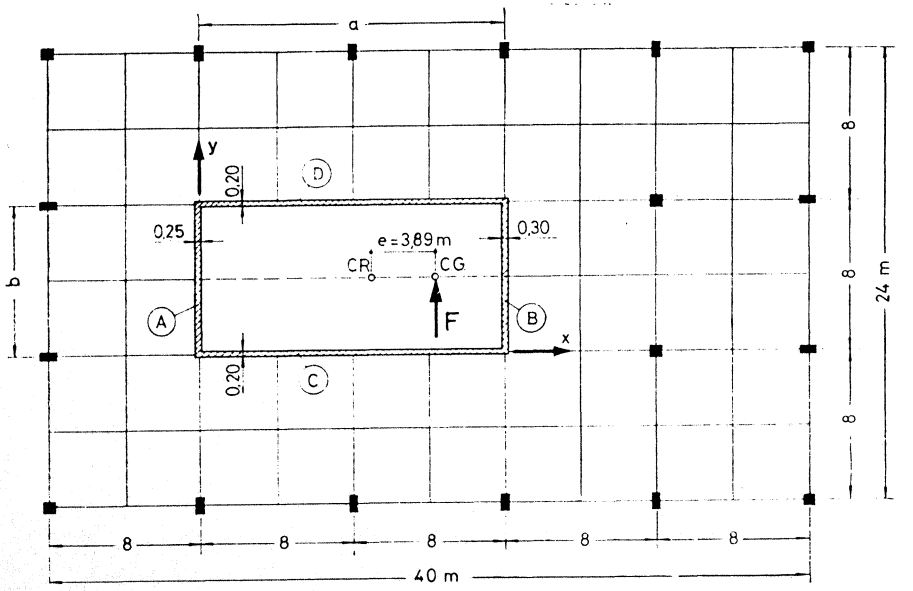


Fig. 11.10

parea cadrelor la preluarea încărcării laterale F, care va fi transmisă numai nucleului central. Se consideră că forța F acționează în *C.G.* pe direcția transversală $y-y$. Distribuția acesteia la pereții nucleului se va face în două ipoteze de calcul. În prima ipoteză se admite că nucleul este monolit, iar în cea de-a doua se presupune că nu există conlucrare spațială între pereți. Centrul masic, care se află pe axa de simetrie, este caracterizat de coordonatele

$$x_{CG} = 12{,}62 \text{ m} \quad \text{și} \quad y_{CG} = 4{,}00 \text{ m}.$$

Poziția centrului de rigiditate este caracterizată de coordonatele

$$x_{CR} = \frac{I_B}{I_A + I_B} a, \quad y_{CR} = \frac{I_D}{I_C + I_D} b,$$

unde momentele de inerție ale celor patru pereți care alcătuiesc nucleul rezultă

$$I_A = 10{,}67 \text{ m}^4, \quad I_B = 12{,}80 \text{ m}^4, \quad I_C = I_D = 68{,}27 \text{ m}^4.$$

Fiind cunoscute dimensiunile geometrice $a = 16$ m și $b = 8$ m, centrul de rigiditate va avea coordonatele

$$x_{CR} = 8{,}73 \text{ m} \quad \text{și} \quad y_{CR} = 4{,}00 \text{ m},$$

aflîndu-se deci pe axa de simetrie a secțiunii transversale prin nucleu (fig. 11.10). Excentricitatea forței F, care se aplică în *C.G.*, față de *C.R.* va rezulta

$$e = x_{CG} - x_{CR} = 3{,}89 \text{ m}.$$

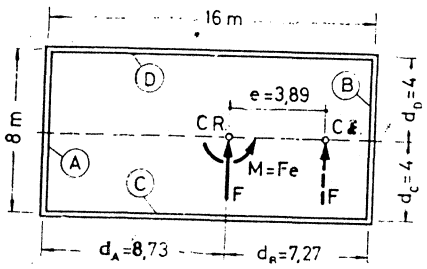


Fig. 11.11

În conformitate cu notațiile și dimensiunile geometrice din figura 11.11, momentul de inerție polar al pereților nucleului va fi

$$J = I_A d_A^2 + I_B d_B^2 + I_C d_C^2 + I_D d_D^2 = 3674 \text{ m}^6.$$

După ce forța laterală F s-a redus în $C.R.$, la aceeași forță F și momentul de torsiune $M_t = Fe$, distribuția se face separat conform noțiunilor expuse în cuprinsul capitolului. În ipoteza în care se consideră nucleul monolit, forțele distribuite se determină astfel:

$$F'_A = \frac{I_A}{I_A + I_B} F = 0{,}455F, \quad F'_B = \frac{I_B}{I_A + I_B} F = 0{,}545F, \quad F'_C = F'_D = 0,$$

$$F''_A = \frac{I_A d_A}{J} Fe = -0{,}099F, \quad F''_B = \frac{I_B d_B}{J} Fe = +0{,}099F,$$

$$F''_C = \frac{I_C d_C}{J} Fe = +0{,}289F, \quad F''_D = \frac{I_D d_D}{J} Fe = -0{,}289F,$$

iar în final se vor obține încărcările totale în lungul celor patru pereți:

$$F_A = 0{,}356F, \quad F_B = 0{,}644F, \quad F_C = 0{,}289F, \quad F_D = -0{,}289F.$$

În figura 11.12 este arătat modul de distribuție a forței F și momentului Fe care se aplică în $C.R.$, precum și suprapunerea celor două situații.

Dacă se admite ipoteza că nu există conlucrare spațială, pereții C și D nu se vor încărca și prin urmare toată forța F va fi preluată numai de elementele A și B. În cazul acesta momentul de inerție polar devine

$$J = I_A d_A^2 + I_B d_B^2 = 1490 \text{ m}^6,$$

iar distribuția se va face astfel

$$F'_A = \frac{I_A}{I_A + I_B} F = 0{,}455F, \quad F'_B = \frac{I_B}{I_A + I_B} F = 0{,}545F,$$

$$F''_A = \frac{I_A d_A}{J} Fe = -0{,}243F, \quad F''_B = \frac{I_B d_B}{J} Fe = +0{,}243F.$$

Rezultă deci următoarele încărcări totale ale celor doi pereți:

$$F_A = 0{,}212F, \quad F_B = 0{,}788F.$$

Prin compararea celor două situații prin prisma ipotezelor admise, se pune în evidență avantajul substanțial pe care îl are conlucrarea spațială a elementelor verticale de rezistență în cazul acțiunilor laterale.

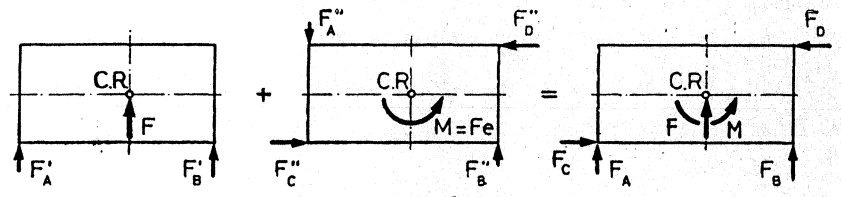


Fig. 11.12

12

CALCULUL SEISMIC SIMPLIFICAT AL UNOR STRUCTURI INGINEREȘTI

12.1. STRUCTURI ETAJATE ORTOGONALE

Metodele aproximative cu privire la calculul eforturilor secționale și deplasărilor laterale ale structurilor etajate ortogonale, formate din bare drepte, sînt specifice proiectării preliminare a construcțiilor, în vederea predimensionării elementelor de rezistență și definirii configurației elastice a sistemului structural. Asemenea analize directe, simplificate, permit furnizarea datelor inițiale de intrare în procesul de rezolvare automată, mai riguroasă, pe baza unor algoritme de calcul existente. Sînt totuși situații particulare în care utilizarea unor metode aproximative devine practic mai eficientă, mai ales cînd simplificările introduse nu alterează comportarea de ansamblu a structurii analizate, întrucît pot fi evitate operațiile de calcul laborioase care constituie în multe cazuri surse de erori sistematice.

În general, metodele aproximative apelează la o serie de simplificări asupra conlucrării elementelor constitutive ale unui ansamblu structural. Cu unele diferențieri în privința premiselor admise în analiza abordată, toate metodele de calcul se situează de regulă în același domeniu de aproximație. De altfel, chiar atunci cînd o metodă se numește „exactă", indiferent de gradul de sofisticare al formulării analitice, referirea se face în exclusivitate la modul de rezolvare din punct de vedere matematic. Este evident că și în această ultimă situație, relațiile analitice de calcul se bazează la rîndul lor pe anumite ipoteze simplificatoare în ceea ce privește definirea modelului geometric, fizic, elastic și matematic. Introducerea tuturor fenomenelor și a caracteristicilor de comportare într-o formulare matematică unitară este deosebit de complicată și de multe ori chiar imposibilă. Metodele generale cunoscute în mecanica solidului deformabil (în regim static sau dinamic) pot reprezenta un instrument sintetic de elaborare a unei teorii „exacte" dar care rămîne tributară acelorași premise și ipoteze admise inițial.

În acest capitol vor fi sintetizate unele metode simplificate pentru calculul structurilor plane etajate, formate din cadre ortogonale, supuse acțiunilor laterale pe direcția gradelor de libertate. Deoarece acțiunile laterale (orizontale) se consideră static-echivalente, ele pot proveni din acțiunea seismică, acțiunea vîntului sau presiunea produsă de explozii. Așa cum a rezultat din capitolul 11, dacă se ține seama de interacțiunea spațială a unei construcții etajate, în urma distribuției forțelor laterale aplicate excentric față de centrele de rigiditate de la fiecare nivel, se poate obține o disociere a ansamblului structural într-o multitudine de substructuri plane independente.

În privința definirii noțiunilor de structură de rezistență în cadre, la acțiuni laterale, sînt necesare unele precizări. În acest sens, s-a considerat structura etajată simplă (simetrică) din figura 12.1, *a* la care s-au grupat acțiunile laterale în raport cu axa de simetrie (fig. 12.1, *b*). Caracterizarea modului de comportare al structurii poate fi apreciat prin raportul existent între rigiditățile riglelor și stîlpilor. În această privință cazurile teoretice extreme puse în evidență (practic inoperante) sînt reprezentate în figurile 12.1, *d* și *e*.

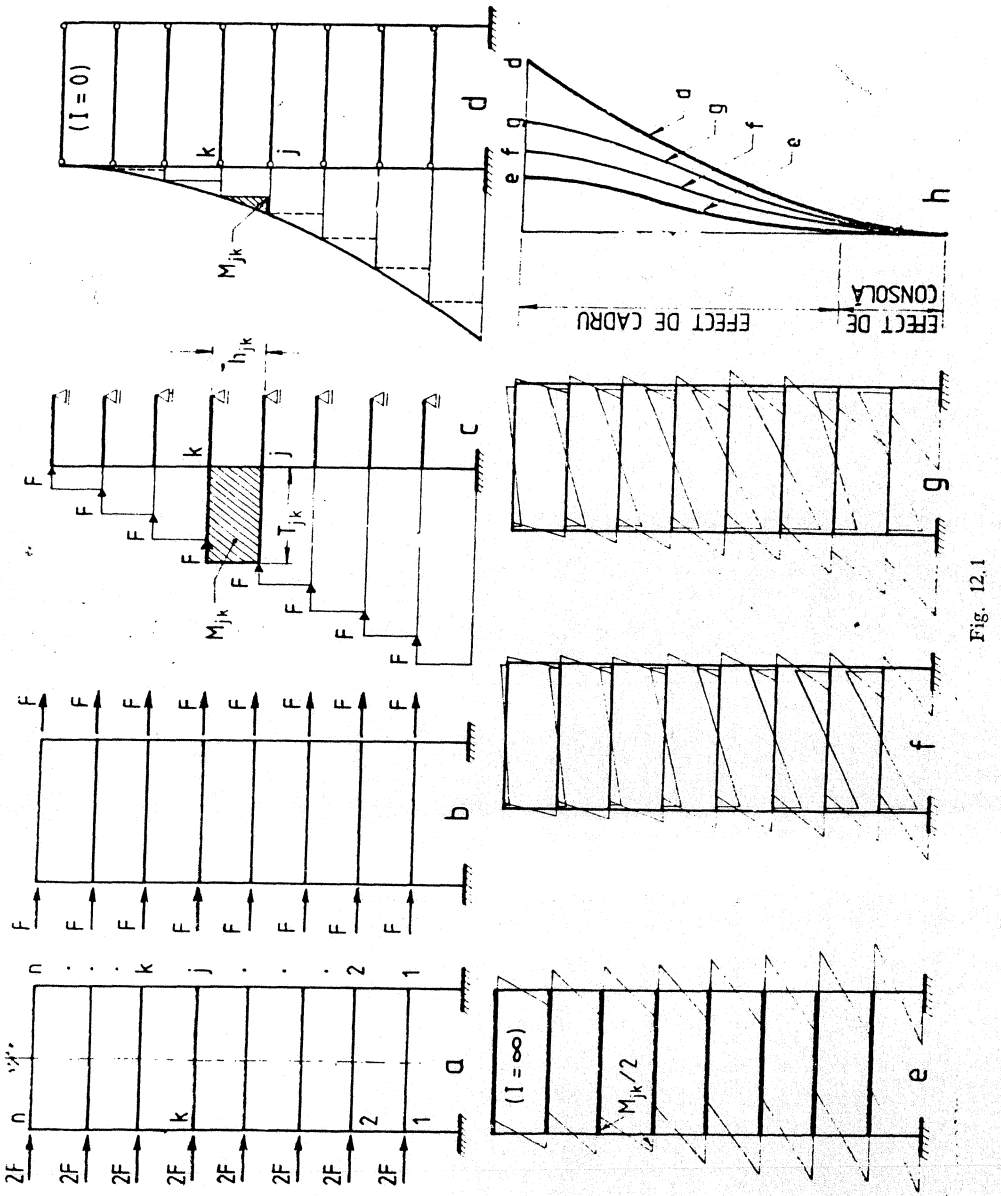


Fig. 12.1

Structura din figura 12.1, *d* are riglele cu rigiditate nulă la încovoiere, datorită legăturilor articulate de la extremități. Numai prin rigiditatea axială a acestor elemente orizontale, se asigură compatibilitatea deplasărilor laterale ale stîlpilor, care se comportă ca bare în consolă preluînd integral momentele încovoietoare. La structura din figura 12.1, *e*, în care s-au considerat toate grinzile perfect rigide (de rigiditate infinită), diagramele de momente încovoietoare de etaj M_{jk} sînt localizate în exclusivitate la stîlpi. Întrucît poziția punctelor de inflexiune se află la mijlocul înălțimii stîlpilor, momentele încovoietoare din secțiunile de capăt sînt egale și de același sens (în conceptul metodei deplasărilor). Aceste structuri particulare se mai numesc în literatura internațională „cadre forfecate" deoarece forțele tăietoare de etaj rezultă localizate pe stîlpi.

În general structurile în cadre se definesc prin rapoartele dintre rigiditățile riglelor și stîlpilor cuprinse între situațiile limită descrise în figurile 12.1, *d* și *e*. Exemplele prezentate în figurile 12.1, *f* și *g* ilustrează două cazuri posibile de cadre etajate în care aceste rapoarte sînt diferențiate. Analiza calitativă a celor două tipuri de structuri pune în evidență influența decisivă a rigidităților relative rigle-stîlpi asupra configurației diagramelor de momente încovoietoare, în special a celor corespunzătoare stîlpilor. Astfel, structura din figura 12.1, *f* are o conformare elastică rațională la acțiuni laterale, deoarece poziția punctelor de inflexiune (de moment nul) este localizată pe înălțimea efectivă a fiecărui stîlp. La structura din figura 12.1, *g* datorită unor conformări elastice disproporționate ale elementelor de rezistență situate la etajele inferioare, punctele de inflexiune ale stîlpilor din zona respectivă nu se mai găsesc pe lungimea efectivă a acestora. În asemenea cazuri structura etajată are o comportare mixtă, de consolă (la partea inferioară) și de cadru (la partea superioară), așa cum rezultă din figura 12.1, *g*.

Dacă situații de tipul celor reprezentate în figura 12.1, *g* nu pot fi evitate prin redimensionare elastică, din motive de deformabilitate laterală pronunțată, reprezentată calitativ în figura 12.1, *h*, aceste categorii de structuri (care corespund ca funcționalitate) fie că se limitează ca înălțime, fie că se diagonalizează sau se asociază cu substructuri mai rigide (diafragme, tuburi perforate, nuclee centrale etc.).

În concluzie, se consideră că o structură are funcție de cadru la acțiuni laterale numai atunci cînd configurația sa elastică admite apariția punctelor de inflexiune pe înălțimea tuturor stîlpilor, iar nodurile permit transferul integral al deformațiilor, inclusiv al momentelor încovoietoare de la capetele elementelor verticale, la elementele orizontale de rezistență. Trebuie făcută mențiunea, că toate metodele de evaluare aproximativă a eforturilor secționale și a deplasărilor laterale se referă la aceste categorii de structuri etajate, întrucît numai în asemenea situații pot fi utilizate cadrele alcătuite din bare drepte ca sisteme principale unice de rezistență.

Metodele aproximative, care fac obiectul acestui capitol, vor fi expuse selectiv din punctul de vedere al eficacității lor practice și prezintă avantajul că nu necesită operații de calcul laborioase sau scrierea și rezolvarea unor sisteme de ecuații.

12.1.1. Metoda localizării directe a poziției punctelor de inflexiune

În această metodă se consideră că în urma aplicării acțiunilor laterale pe direcția gradelor de libertate, deformata unui cadru oarecare admite puncte de inflexiune cu poziție fixă pe înălțimea tuturor stîlpilor și în deschiderea

fiecărei rigle. Aproximația constă în localizarea prealabilă a punctelor de inflexiune la mijlocul lungimii stîlpilor, cu excepția celor situați la parterul cadrului, în care punctele de inflexiune sînt localizate la o distanță de 2/3 din înălțimea stîlpului raportată la secțiunea de încastrare în fundație. Momentele încovoietoare la extremitățile tuturor riglelor din fiecare nod se obțin prin distribuția locală a momentului neechilibrat rezultant, din secțiunile de la extremitățile stîlpilor, proporțional cu rigiditatea acestora.

O perfecționare a acestei metode de calcul, cu caracter orientativ, a fost adusă de Bowman, prin care se consideră că punctele de inflexiune au poziții diferite, în afara etajelor situate în zona mijlocie a structurii unde aceste puncte sînt localizate la jumătatea înălțimii stîlpilor. Pentru cadrele cu mai mult de două deschideri, riglele din deschiderile extreme (laterale) au punctele de inflexiune situate la o distanță egală cu 0,55 din lungimea acestora față de stîlpii marginali (fig. 12.2).

Poziția tuturor punctelor de inflexiune reprezentative fiind localizată, independent de caracteristicile relative de rigiditate ale elementelor componente cadrului, determinarea forțelor tăietoare și momentelor încovoietoare devine o problemă elementară. Întrucît la un anumit etaj toți stîlpii au punctele de inflexiune la aceeași cotă, forțele tăietoare se obțin prin distribuția forței tăietoare de etaj (v. fig. 12.2) proporțional cu momentele de inerție ale stîlpilor respectivi. Forța tăietoare de etaj reprezintă rezultanta forțelor laterale redusă în panourile corespunzătoare etajelor curente (j, k).

Pentru exemplificare, se va arăta modul în care se determină forțele tăietoare în stîlpii etajului curent (j, k). În conformitate cu figura 12.2, *forța tăietoare de etaj* are expresia

$$\mathcal{T}_{jk} = \sum_{r=k}^{n} F_r, \tag{12.1}$$

iar forțele tăietoare din stîlpi $T_{jk}^{(s)}$, proporționale cu momentele de inerție $I_{jk}^{(s)}$, rezultă

$$T_{jk}^{(s)} = d_{jk}^{(s)} \mathcal{T}_{jk}, \quad (s = 1, 2, \ldots m), \tag{12.2}$$

în care intervine coeficientul de distribuție

$$d_{jk}^{(s)} = \frac{I_{jk}^{(s)}}{\sum_{s=1}^{m} I_{jk}^{(s)}}, \quad (s = 1, 2, \ldots m). \tag{12.3}$$

Relațiile (12.2) satisfac condiția de echilibru exprimată printr-o ecuație de proiecție pe direcția orizontală

$$\mathcal{T}_{jk} = \sum_{s=1}^{m} T_{jk}^{(s)} = \sum_{s=1}^{m} d_{jk}^{(s)} \mathcal{T}_{jk}, \tag{12.4}$$

de unde se obține proprietatea evidentă a *coeficienților de distribuție a forței tăietoare de etaj*

$$\sum_{s=1}^{m} d_{jk}^{(s)} = 1. \tag{12.5}$$

Cunoscînd poziția punctelor de inflexiune a_{jk} și b_{jk} (fig. 12.2), momentele încovoietoare de la extremitățile stîlpilor se calculează cu relațiile

$$M_{jk}^{(s)} = T_{jk}^{(s)} a_{jk}, \quad M_{kj}^{(s)} = T_{jk}^{(s)} b_{jk}, \quad (s = 1, 2, \ldots m). \tag{12.6}$$

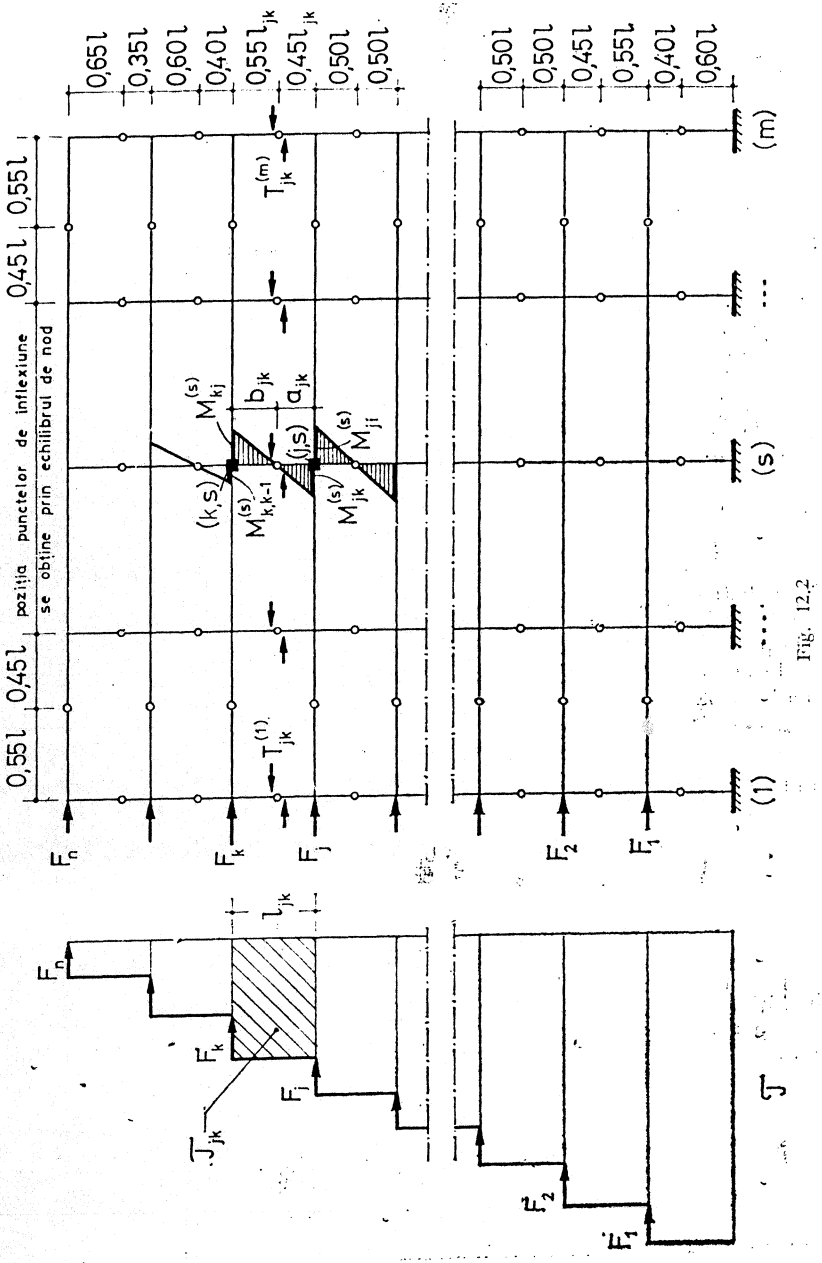


Fig. 12.2

Exprimînd condiția de echilibru a eforturilor secționale din stîlpii de la etajul (j, k) printr-o ecuație de momente, se obține

$$M_{jk} = \sum_{s=1}^{m} (M_{jk}^{(s)} + M_{kj}^{(s)}) = a_{jk} \sum_{s=1}^{m} T_{jk}^{(s)} + b_{jk} \sum_{s=1}^{m} T_{jk}^{(s)}, \tag{12.7}$$

sau

$$M_{jk} = \sum_{s=1}^{m} (M_{jk}^{(s)} + M_{kj}^{(s)}) = \mathfrak{T}_{jk} l_{jk}, \tag{12.8}$$

deoarece $l_{jk} = a_{jk} + b_{jk}$.

Expresia (12.8) arată că suma momentelor încovoietoare de la extremitățile stîlpilor unui anumit etaj curent este egală cu momentul rezultantei forțelor laterale, redusă la nivelul superior al etajului respectiv, în raport cu baza stîlpilor (nivelul inferior). Acest moment rezultant, numit și *moment de etaj* M_{jk}, reprezintă suprafața diagramei forței tăietoare corespunzătoare etajului considerat (v. fig. 12.1, *c* și *d*).

Dacă se ține seama de relațiile (12.2), (12.6) și (12.8), momentele încovoietoare de la extremitățile stîlpilor cuprinși între nivelurile j și k pot fi determinate direct în funcție de momentul de etaj astfel

$$M_{jk}^{(s)} = \frac{a_{jk}}{l_{jk}} d_{jk}^{(s)} M_{jk}, \qquad M_{kj}^{(s)} = \frac{b_{jk}^{(s)}}{l_{jk}} d_{jk}^{(s)} M_{jk}. \tag{12.9}$$

Prin distribuția locală a momentului neechilibrat, rezultat prin sumarea momentelor de la extremitățile stîlpilor, proporțional cu rigiditățile convenționale ρ ale riglelor adiacente nodului (k, s), se obțin momentele încovoietoare de la capetele elementelor orizontale de rezistență. Expresiile acestor momente sînt următoarele:

$$M_{s,s-1}^{(k)} + M_{s,s+1}^{(k)} = M_{kj}^{(s)} + M_{k,k+1}^{(s)},$$

de unde rezultă (vezi și fig. 12.3):

$$M_{s,s-1}^{(k)} = \frac{\rho_{s-1,s}^{(k)}}{\rho_{s-1,s}^{(k)} + \rho_{s,s+1}^{(k)}} (M_{kj}^{(s)} + M_{k,k+1}^{(s)}), \tag{12.10}$$

$$M_{s,s+1}^{(k)} = \frac{\rho_{s,s+1}^{(k)}}{\rho_{s-1,s}^{(k)} + \rho_{s,s+1}^{(k)}} (M_{kj}^{(s)} + M_{k,k+1}^{(s)}). \tag{12.11}$$

Rigiditățile convenționale ale celor două rigle adiacente nodului (k, s), precum și notațiile care intervin au fost definite în capitolul 10 (fig. 10.5) și anume:

$$\left.\begin{aligned} \rho_{s-1,s}^{(k)} &= \frac{I_{s-1,s}^{(k)}}{l_{s-1,s}} \cdot \frac{l_0}{I_0} = \frac{k_{s-1,s}^{(k)}}{\lambda_{s-1,s}}, \\ \rho_{s,s+1}^{(k)} &= \frac{I_{s,s+1}^{(k)}}{l_{s,s+1}} \cdot \frac{l_0}{I_0} = \frac{k_{s,s+1}^{(k)}}{\lambda_{s,s+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{12.12}$$

În privința schematizării geometrice a cadrelor plane, în special cînd stîlpii și grinzile au dimensiuni importante, se recomandă adoptarea lungimilor de calcul date în figura 10.7.

În general, prin aplicarea acestei metode rezultă totdeauna în stîlpii marginali momente încovoietoare mai mari, iar în cei interiori mai mici, față de un calcul condus printr-o metodă exactă. Această metodă este acceptabilă în cazurile în care momentele provenite din forțele laterale nu depășesc 35% din momentele ce rezultă din acțiunea încărcărilor gravitaționale.

12.1.2. Metoda factorului

Metoda factorului, numită astfel de J.B. Wilbur [201], este specifică calculului cadrelor multietajate solicitate de forțe orizontale aplicate în noduri. Această metodă poate fi considerată o variantă aproximativă a metodei generale a deplasărilor care permite determinarea directă a momentelor încovoietoare în stîlpii unui cadru în funcție de *momentele de etaj* (relația 12.8).

Operațiile de calcul pe care le implică această metodă sînt extrem de simple, putînd fi conduse direct pe schema geometrică a structurii, iar precizia rezultatelor ce se obțin este în majoritatea cazurilor satisfăcătoare din punct de vedere tehnic.

În această metodă, se consideră într-o primă aproximație, că în urma deformării structurii sub acțiunea forțelor laterale, rotirile nodurilor de la un anumit nivel sînt identice, iar rotirea stîlpilor unui anumit etaj este egală cu rotirea stîlpilor etajului vecin. În baza acestei ipoteze, dacă se efectuează unele operații statice elementare, pentru stîlpul s cuprins între nivelurile j și k, rezultă următoarele relații între rotirile θ ale nodurilor (j, s), (k, s) și rotirea ψ_{jk} a stîlpului

$$\theta_{js} = \mu_{js} \psi_{jk}, \qquad \theta_{ks} = \mu_{ks} \psi_{jk}, \tag{12.13}$$

unde

$$\mu_{js} = \frac{\rho_{jk}^{(s)} + \rho_{j-1,j}^{(s)}}{\sum_{(j,s)} \rho}, \qquad \mu_{ks} = \frac{\rho_{jk}^{(s)} + \rho_{k,k+1}^{(s)}}{\sum_{(k,s)} \rho}. \tag{12.14}$$

Semnificația notațiilor utilizate a fost dată în capitolul 10 și figura 10.5.

Momentele încovoietoare de la capetele stîlpului considerat se determină cu relațiile cunoscute din statica construcțiilor:

$$M_{jk}^{(s)} = -\frac{2EI_{jk}^{(s)}}{l_{jk}} [2\theta_{js} + \theta_{ks} - 3\psi_{jk}], \tag{12.15}$$

$$M_{kj}^{(s)} = -\frac{2EI_{jk}^{(s)}}{l_{jk}} [2\theta_{ks} + \theta_{js} - 3\psi_{jk}]. \tag{12.16}$$

Introducînd în relațiile (12.15 și (12.16) expresiile rotirilor de nod (12.13) și (12.14) se obțin:

$$M_{jk}^{(s)} = -\frac{2EI_{jk}^{(s)}}{l_{jk}} [2\mu_{js} + \mu_{ks} - 3], \tag{12.17}$$

$$M_{kj}^{(s)} = -\frac{2EI_{jk}^{(s)}}{l_{jk}} [2\mu_{ks} + \mu_{js} - 3]. \tag{12.18}$$

Introducînd notațiile:

$$\left.\begin{aligned} \beta_{js} &= 1 - \mu_{js} \\ \beta_{ks} &= 1 - \mu_{ks} \end{aligned}\right\} \tag{12.19}$$

relațiile (12.17) și (12.18) devin

$$M_{jk}^{(s)} = \frac{4EI_{jk}^{(s)}}{l_{jk}}\left[\beta_{js} + \frac{1}{2}\beta_{ks}\right]\psi_{jk}, \tag{12.20}$$

$$M_{kj}^{(s)} = \frac{4EI_{jk}^{(s)}}{l_{jk}}\left[\beta_{ks} + \frac{1}{2}\beta_{js}\right]\psi_{jk}. \tag{12.21}$$

Dacă se folosesc simbolurile introduse în capitolul 10 și se notează cu

$$C_{js} = \beta_{js} + \frac{1}{2}\beta_{ks}, \tag{12.22}$$

$$C_{ks} = \beta_{ks} + \frac{1}{2}\beta_{js}, \tag{12.23}$$

expresiile momentelor încovoietoare (12.20) și (12.21) se vor scrie sub forma

$$M_{jk}^{(s)} = \frac{4EI_0}{l_0}\rho_{jk}^{(s)}C_{js}\psi_{jk}, \tag{12.24}$$

$$M_{kj}^{(s)} = \frac{4EI_0}{l_0}\rho_{jk}^{(s)}C_{ks}\psi_{jk}. \tag{12.25}$$

Pentru a obține rotirea ψ_{jk} se va exprima echilibrul momentelor de la capetele stîlpilor etajului (j, k) prin intermediul *momentului de etaj* $\mathcal{T}_{jk}l_{jk}$. Exprimînd această condiție se va obține o relație identică cu (12.8) în care, dacă se introduc momentele (12.24) și (12.25), se obține:

$$\mathcal{T}_{jk}l_{jk} = \frac{4EI_0}{l_0}\psi_{jk}\sum_{s=1}^{m}\rho_{jk}^{(s)}[C_{js} + C_{ks}], \tag{12.26}$$

de unde rezultă expresia rotirii

$$\psi_{jk} = \frac{\mathcal{T}_{jk}l_{jk}}{\frac{4EI_0}{l_0}\sum_{s=1}^{m}\rho_{jk}^{(s)}[C_{js} + C_{ks}]}. \tag{12.27}$$

Se observă că relația (12.27) stă la baza determinării formulelor directe pentru rigiditățile relative de nivel conținute în tabelul 10.1, poziția 2.

Revenind la relațiile (12.24) și (12.25), prin substituirea rotirii (12.27), se determină următoarele expresii finale *pentru calculul direct al momentelor încovoietoare*, de la extremitățile stîlpului considerat

$$M_{jk}^{(s)} = \frac{\rho_{jk}^{(s)}C_{js}}{\sum_{s=1}^{m}\rho_{jk}^{(s)}[C_{js} + C_{ks}]}\mathcal{T}_{jk}l_{jk}. \tag{12.28}$$

$$M_{kj}^{(s)} = \frac{\rho_{jk}^{(s)}C_{ks}}{\sum_{s=1}^{m}\rho_{jk}^{(s)}[C_{js} + C_{ks}]}\mathcal{T}_{jk}l_{jk}. \tag{12.29}$$

Din relațiile (12.28) și (12.29) se observă că momentele distribuite la capetele unui stîlp sînt proporționale cu ρC și de aceea acest produs se mai numește *factorul momentului*, iar procedeul de calcul expus poartă denumirea de *metoda factorului*.

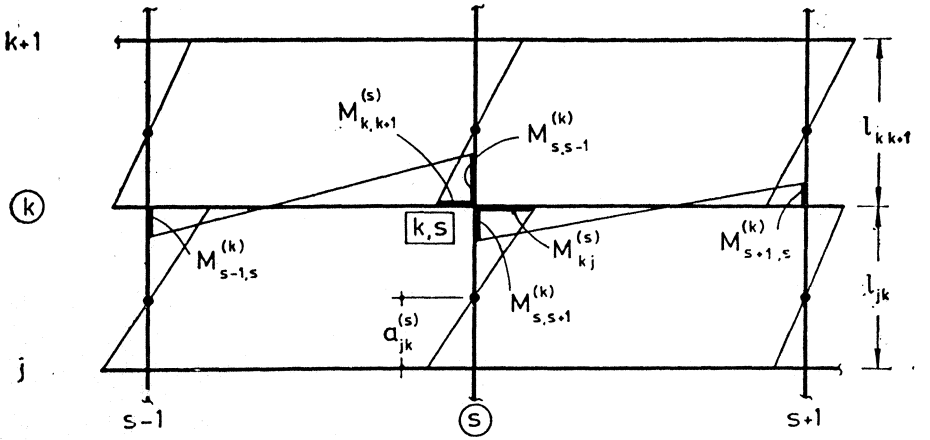


Fig. 12.3

În vederea determinării momentelor încovoietoare de la capetele riglelor (fig. 12.3), se utilizează expresiile cunoscute din statica construcțiilor, și anume

$$M_{s,s-1}^{(k)} = \frac{4EI_0}{l_0}\rho_{s-1,s}^{(k)}\left[\theta_{ks} + \frac{1}{2}\theta_{k,s-1}\right], \tag{12.30}$$

$$M_{s,s+1}^{(k)} = \frac{4EI_0}{l_0}\rho_{s,s+1}^{(k)}\left[\theta_{ks} + \frac{1}{2}\theta_{k,s+1}\right]. \tag{12.31}$$

Dacă se ține seama de legătura dintre rotirile de nod θ și rotirea de bară ψ (12.13), precum și de faptul că nodul (k, s) se află în echilibru static, pentru *momentele încovoietoare de la capetele grinzilor* rezultă expresiile:

$$M_{s,s-1}^{(k)} = \frac{\rho_{s-1,s}^{(k)}\left[\mu_{ks} + \frac{1}{2}\mu_{k,s-1}\right]}{\rho_{s-1,s}^{(k)}\left[\mu_{ks} + \frac{1}{2}\mu_{k,s-1}\right] + \rho_{s,s+1}^{(k)}\left[\mu_{ks} + \frac{1}{2}\mu_{k,s+1}\right]}(M_{kj}^{(s)} + M_{k,k+1}^{s}) \tag{12.32}$$

$$M_{s,s+1}^{(k)} = \frac{\rho_{s,s+1}^{(k)}\left[\mu_{ks} + \frac{1}{2}\mu_{k,s-1}\right]}{\rho_{s-1,s}^{(k)}\left[\mu_{ks} + \frac{1}{2}\mu_{k,s-1}\right] + \rho_{s,s+1}^{(k)}\left[\mu_{ks} + \frac{1}{2}\mu_{k,s+1}\right]}(M_{kj}^{(s)} + M_{k,k+1}^{(s)}) \tag{12.33}$$

Sistematizînd metoda expusă mai sus, *principalele etape de calcul* sînt următoarele:

- Se determină pentru toate barele cadrului rigiditățile convenționale $\rho = k/\lambda$, unde $k = I/I_0$, iar $\lambda = l/l_0$ (v. cap. 10).
- Se calculează pentru fiecare nod suma rigidităților convenționale ale tuturor barelor concurente în acel nod, adică rigiditatea convențională de nod.
- Se calculează pentru fiecare nod suma rigidităților convenționale ale stîlpilor care converg în nodul respectiv.

● Raportul dintre rigiditățile convenționale ale stîlpilor și cele de nod definesc coeficienții μ, care se determină cu ajutorul formulelor (12.14).

Se observă că pentru nivelul inferior (parter), dacă stîlpii sînt încastrați în fundație, $\mu_{0s} = 0$.

● În fiecare nod al cadrului se calculează coeficienții β cu relațiile (12.19).

Avînd în vedere observația de la punctul precedent, rezultă că în capetele încastrate ale stîlpilor de la parter $\beta = 1$.

● Se transmit cu factorul 1/2 toți coeficienții β de la o extremitate la cealaltă a aceluiași stîlp. Prin sumarea coeficientului β existent la unul din capetele stîlpului, cu valoarea transmisă de la capătul opus, se obțin factorii C, conform relațiilor (12.22), (12.23).

● La capătul fiecărui stîlp se face produsul ρC.

● Se calculează suma produselor ρC pentru fiecare etaj.

● Se determină momentele de etaj $\mathcal{T}l$.

Cunoscînd toate aceste date se determină direct momentele de la capetele stîlpilor, utilizînd formulele (12.28) și (12.29).

Datele de mai sus sînt suficiente pentru a calcula și momentele de la capetele grinzilor prin intermediul expresiilor (12.32) și (12.33).

Trebuie subliniat faptul că toate calculele pe care le necesită această metodă sînt elementare, iar principalele operații pot fi conduse direct pe schema structurii sau în tabel (fig. 12.4). Utilizarea unui calculator electronic de birou facilitează în mod substanțial aplicarea practică a procedeului expus. Rezultatele ce se obțin satisfac exigențele unui calcul practic de proiectare fără a mai fi necesară aplicarea unor procedee iterative sau rezolvarea unor sisteme de ecuații de condiții.

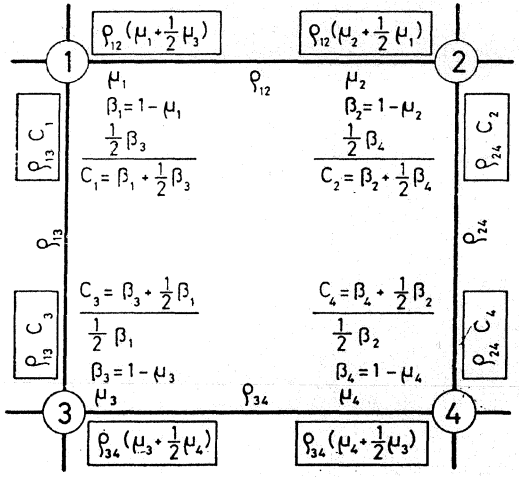


Fig. 12.4

12.1.3. Metoda rigidităților relative de nivel

Cunoașterea prealabilă a rigidităților relative de nivel ale unui cadru multietajat permite aproximarea directă a deformatei acestuia sub acțiunea încărcărilor laterale [99].

Astfel, cunoscînd valoarea rigidităților relative de nivel, deplasarea relativă dintre nivelurile consecutive k și j (fig. 12.5) va rezulta:

$$\Delta_k = \frac{\mathcal{T}_{jk}}{R_{kj}}, \qquad k = 1, 2, \ldots n, \tag{12.34}$$

unde $\mathcal{T}_{jk}$ reprezintă forța tăietoare de etaj.

Momentele încovoietoare din secțiunile semnificative ale structurii se pot calcula prin intermediul unui sistem de bază static, avînd toate gradele de libertate blocate, încărcat cu deplasările relative de nivel Δ_k, obținute prin aplicarea relației generale (12.34). Analiza numerică poate fi efectuată prin metodele generale ale staticii construcțiilor. În condițiile unei abordări aproximative se recomandă aplicarea metodelor iterative de operare specifice cadrelor cu noduri fixe, și anume metoda transmiterii rotirilor sau metoda distribuției și transmiterii momentelor.

Momentele de încastrare perfectă de la extremitățile stîlpilor, pe baza cărora se determină momentele neechilibrate din toate nodurile structurii, au expresiile

$$\mathcal{M}_{jk}^{(s)} = \mathcal{M}_{kj}^{(s)} = -\frac{6EI_{jk}^{(s)}}{l_{jk}^2}\,\Delta_k. \tag{12.35}$$

Dacă se utilizează rotirea ψ_{jk} a stîlpilor

$$\psi_{jk} = \frac{\Delta_k}{l_{jk}}, \tag{12.36}$$

momentele de încastrare perfectă (12.35) vor fi

$$\mathcal{M}_{jk}^{(s)} = \mathcal{M}_{kj}^{(s)} = -\frac{6EI_{jk}}{l_{jk}}\,\psi_{jk} = -\frac{6EI_0}{l_0}\,\rho_{jk}^{(s)}\psi_{jk}. \tag{12.37}$$

Asupra modului de organizare și conducere, în continuare, a operațiilor de calcul nu se insistă deoarece ele sînt conținute în manualele și tratatele de statica construcțiilor.

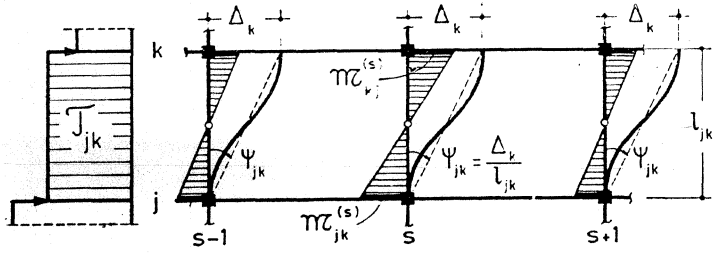


Fig. 12.5

Dacă se ține seama de (10.9), rigiditatea relativă de nivel se poate exprima și astfel:

$$R_{kj} = r_{ikj} R_0, \quad \left(R_0 = \frac{12EI_0}{l_0^3}\right),$$

încît momentele de încastrare perfectă se pot determina folosind numai coeficienții de rigiditate

$$\mathcal{M}_{jk}^{(s)} = \mathcal{M}_{kj}^{(s)} = -\frac{\rho_{jk}^{(s)}}{\lambda_{jk}} \cdot \frac{\mathcal{T}_{jk}}{r_{ikj}} \cdot \frac{l_0}{2} = -\frac{\rho_{jk}^{(s)}}{2 r_{ikj} \lambda_{jk}^2} M_{jk}. \qquad (12.38)$$

unde M_{jk} reprezintă momentul de etaj.

Avînd în vedere ipotezele care au stat la baza stabilirii rigidităților relative de nivel, în legătură cu deformarea locală a structurii (v. cap. 10, fig. 10.3), rezultă totdeauna pentru structură o rigiditate de ansamblu ceva mai mare decît în realitate. În această situație valorile deplasărilor relative laterale (12.34), inclusiv ale rotirilor stîlpilor (12.36), vor rezulta inferioare celor efective. În consecință, momentele încovoietoare ce se obțin prin aplicarea acestei metode vor avea față de situația reală valori mai reduse. Corectarea globală a momentelor încovoietoare calculate poate fi făcută prin multiplicarea tuturor ordonatelor diagramei de momente cu raportul

$$\frac{\sum_1^n \mathcal{T}_{jk}\ (real)}{\sum_1^n \mathcal{T}_{jk}\ (calculat)}. \qquad (12.39)$$

Coeficientul de corecție (12.39), al valorilor momentelor încovoietoare calculate prin metoda rigidităților relative de nivel, a rezultat din condiția de satisfacere a echilibrului global al întregii structuri. Se pot folosi coeficienți de corecție de forma (12.39) pentru fiecare etaj, dar în această situație este necesar să se reechilibreze toate nodurile structurii.

Toate metodele expuse anterior, deși mai puțin cunoscute în țara noastră, furnizează rezultate suficient de corecte, avînd o eficacitate practică evidentă.

12.2. COȘURI DE FUM, TURNURI ȘI ANTENE RTV

Din punctul de vedere al răspunsului seismic structurile de tipul coșurilor de fum, turnurilor și antenelor RTV au o comportare similară. În aceste cazuri modelul dinamic poate fi reprezentat printr-o bară în consolă, încastrată la partea inferioară și la care distribuția maselor și momentelor de inerție este variabilă pe înălțime.

Dacă legile de variație ale maselor și momentelor de inerție sînt funcții continue, iar ecuația diferențială a mișcării se poate integra, caracteristicile proprii de vibrație și răspunsul seismic se obțin prin operații exacte de calcul, folosind datele teoretice și aplicative conținute în capitolele 5 și 8. În practica de proiectare asemenea cazuri singulare se întîlnesc destul de rar. De aceea, în situațiile concrete, astfel de structuri nu pot fi tratate ca sisteme oscilante continue, fiind necesară transformarea lor în sisteme cu mase discrete. În felul acesta, modelul dinamic va fi reprezentat printr-un sistem dinamic

cu n grade de libertate (avînd deci un număr limitat de mase), iar momentele de inerție se vor considera că au o variație în trepte. Această variație va fi precizată de valorile momentelor de inerție corespunzătoare secțiunilor transversale prin structură, efectuate în dreptul punctelor în care sînt concentrate masele.

Sistemul oscilant cu n grade de libertate se obține prin divizarea structurii în tronsoane (bolțari), a căror masă se concentrează în centrele de greutate respective. Se consideră că momentul de inerție este constant pe lungimea unui anumit tronson. Valoarea acestuia este egală cu momentul de inerție al secțiunii care trece prin centrul de greutate al tronsonului considerat. Pentru exemplificare, în figura 12.6 se prezintă cazul unui *coș de fum* din beton armat, avînd înălțimea totală H, celelalte dimensiuni principale fiind precizate direct în desen.

Caracteristicile proprii de vibrație (perioade și forme proprii) se pot determina, fie exact, fie aproximativ, ținînd seama că răspunsul total la acțiunea seismică se determină prin considerarea contribuției cel puțin a primelor trei moduri de vibrație. În acest sens se recomandă următoarele variante de calcul:

a) *Analiza exactă* a vibrațiilor proprii, utilizînd teoria generală din capitolul 3 sau metoda matriceală iterativă din capitolul 6, care permit obținerea simultană a perioadelor și formelor proprii de vibrație prin reducere la o problemă standard de valori și vectori proprii.

b) *Analiza aproximativă*, prin asimilarea formei fundamentale de vibrație cu deformata statică obținută prin aplicarea încărcărilor gravitaționale Q_k pe direcția orizontală (fig. 12.6), obținîndu-se apoi formele superioare în baza teoriei expusă în paragraful 10.5. Perioadele proprii de vibrație se determină aplicînd formula lui Rayleigh sau cu relațiile:

$$T_1 = 0{,}17\sqrt{\Delta_{n,\,ST}} \qquad (12.40)$$

$$T_2 \approx 0{,}25 T_1, \qquad (12.41)$$

$$T_3 \approx 0{,}1 T_1, \qquad (12.42)$$

iar dacă se ține seama de interacțiunea teren-structură, cu formula (10.60).

c) *Analiza directă* prin care formele proprii se pot aproxima cu funcții trigonometrice ortogonale, conform tabelelor 5.1 și 5.2. Perioada fundamentală de vibrație se poate calcula direct utilizînd următoarele formule:

— formula propusă de Comitetul ACI [231]

$$T_1 \approx \frac{2{,}07H^2}{(3D_1 - D)\sqrt{E}}, \qquad (12.43)$$

— formula din tabelul 10.2, poziția 13 (J. Ledwon)

$$T_1 \approx 0{,}02H, \qquad (12.44)$$

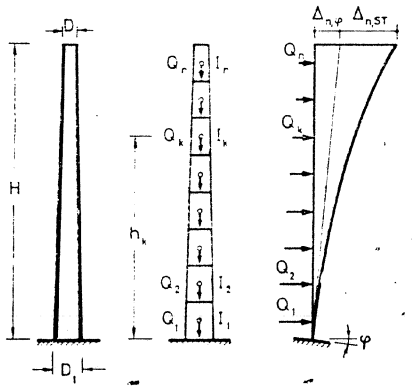


Fig. 12.6

— formula din tabelul 10.2, poziția 14 (M. Ifrim)

$$T_1 \approx 0{,}2\sqrt{H}, \qquad (12.45)$$

în care s-au folosit notațiile:

D_1 — diametrul exterior al secțiunii de la baza coșului de fum, în m ;

D — diametrul interior al secțiunii de la vîrful coșului de fum, în m ;

H — înălțimea totală a coșului, în m;

E — modulul de elasticitate longitudinală al materialului din care este executat coșul de fum, în kgf/cm².

Se menționează faptul, că pentru multe situații formula (12.44) aproximează destul de larg perioada fundamentală. În vederea determinării perioadelor de ordin superior se pot folosi formulele (12.41) și (12.42).

Tabelul 12.1 conține valorile perioadelor fundamentale pentru 10 tipuri de coșuri de fum din beton armat, calculate exact [170], sau obținute direct prin aplicarea formulelor (12.43), (12.44) și (12.45).

TABELUL 12.1

Nr. crt.	H (m)	D (m)	D_1 (m)	Perioada fundamentală T_1 în s			
				Exact	Formula ACI	$0{,}02H$	$0{,}2\sqrt{H}$
1	117	7,85	10,10	1,74	1,98	2,34	2,16
2	147	5,35	11,70	2,12	2,34	2,94	2,42
3	175	6,15	11,45	2,26	3,18	3,50	2,65
4	204	7,65	15,50	2,33	2,94	4,08	2,86
5	231	6,55	22,65	2,91	3,03	4,62	3,04
6	260	10,25	20,50	3,29	3,92	5,20	3,22
7	270	8,20	21,00	3,44	4,02	5,40	3,29
8	275	13,65	24,45	3,33	3,86	5,50	3,32
9	326	11,00	27,15	3,64	4,43	6,52	3,61
10	393	12,10	31,25	4,68	5,38	7,86	3,96

Răspunsul la acțiunea seismică poate fi evaluat considerînd și de data aceasta următoarele variante de calcul:

a) *Analiza modală*, în care se apreciază, pe baza caracteristicilor dinamice proprii determinate exact, răspunsul seismic corespunzător fiecărui mod de vibrație în conformitate cu datele conținute în capitolele 8 și 9. Răspunsul seismic total se determină cu relația cunoscută:

$$R_t = \left(\sum_{i=1}^{3} R_i\right)^{\frac{1}{2}}.$$

b) *Analiza aproximativă* recomandată de normativul românesc *P*.100—81 care permite stabilirea diagramei de momente înfășurătoare, ținînd seama de contribuția primelor trei moduri de vibrație, folosind momentul M_1 de la baza coșului corespunzător modului fundamental. Încărcările seismice din modul fundamental, din care provine M_1, se determină considerînd pentru forma de vibrație deformata statică, iar pentru calculul perioadei fundamentale formula (12.40).

c) *Analiza directă propusă de Comitetul ACI* [231]. Pentru a introduce în calculul răspunsului influența primelor trei forme de vibrație se procedează în felul următor:

— se determină forța tăietoare de bază F_1, corespunzătoare modului fundamental;

— se aplică în vîrful coșului o forță concentrată egală cu $0{,}15\ F_1$;

— restul din forța tăietoare de bază, deci $0{,}85\ F_1$, se distribuie pe înălțimea turnului considerînd o variație liniară pentru forma proprie de oscilație adică

$$F_{k,1} = 0{,}85\,\frac{Q_k h_k}{\sum_{k=1}^{n} Q_k h_k}\,F_1. \qquad (12.46)$$

Deoarece tipurile de structuri la care se referă datele de calcul expuse mai sus sînt de tip flexibil (coșuri de fum, turnuri, antene RTV), influența deformabilității terenului de fundație asupra răspunsului poate fi neglijată. Se recomandă totuși o verificare la pierderea stabilității prin fenomenul de răsturnare.

12.3. CASTELE DE APĂ

Comportarea dinamică a unei asemenea structuri (fig. 12.7, *a*) este similară cu cea a unui sistem oscilant încastrat la un singur capăt și liber la capătul opus (tip consolă). Dată fiind destinația unui castel de apă, la care masa lichidului se află concentrată la partea superioară, modelul dinamic se va apropia foarte mult de un sistem cu un singur grad de libertate. De aceea, în special în ipoteza rezervorului plin, se poate considera că răspunsul total poate fi caracterizat numai de caracteristicile modului fundamental.

Dacă un castel de apă se tratează ca un sistem cu un singur grad de libertate (fig. 12.7,*b*.), avînd masa concentrată în centrul de greutate al ansamblului cuvă-lichid, *perioada fundamentală* se determină cu formula (2.18)

$$T_1 \cong 0{,}2\sqrt{x_{ST}}, \qquad (12.47)$$

unde x_{ST} reprezintă săgeata statică produsă de acțiunea încărcării gravitaționale echivalente $Q_e = m_e g$ aplicată în direcția orizontală (fig. 12.7, *c*). Masa echivalentă m_e se determină ținînd seama de masa m a ansamblului cuvă-lichid și masa distribuită μ

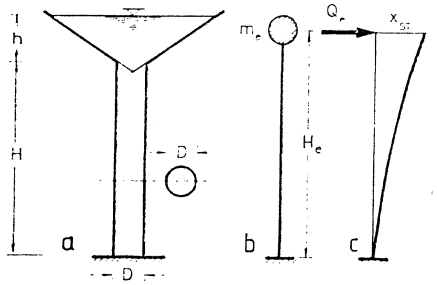


Fig. 12.7

a suportului (tubului). Expresia masei echivalente se obține direct din tabelul 5.3, adică

$$m_e = m + 0{,}24\mu H. \tag{12.48}$$

Dacă tubul de susținere al rezervorului are secțiune constantă (cazul castelelor glisate), săgeata statică rezultă

$$x_{ST} = \frac{Q_e H_e^3}{3EI}, \tag{12.49}$$

în care I este momentul de inerție al secțiunii transversale prin tub. Dacă suportul rezervorului este alcătuit din alt sistem de rezistență, săgeata statică se determină prin metodele obișnuite ale staticii construcțiilor.

Răspunsul seismic se estimează în două ipoteze de calcul și anume:

— cazul rezervorului gol, $Q_e = Q_e\,(cuvă) + 0{,}24\mu H$;

— cazul rezervorului plin, $Q_e = Q_e\,(cuvă) + Q_e(lichid) + 0{,}24\mu H$.

Din aceste două situații posibile se vor determina tensiunile cele mai periculoase.

Dacă masa concentrată m din expresia (12.48) este comparabilă cu masa suportului μH calculul se va face transformînd structura într-un sistem dinamic cu un număr finit de grade de libertate. La fel ca în cazul precedent, se va diviza tubul în tronsoane (bolțari), iar prin concentrarea maselor în centrele de greutate ale acestora se obține un sistem cu nGLD. Calculul se conduce prin una din metodele descrise în § 12.2. Acest mod de analiză este în general necesar în ipoteza rezervorului gol.

Se subliniază faptul că în calculul schematizat mai sus nu s-a introdus efectul presiunii hidrodinamice exercitate de lichid, ca urmare a acțiunii seismice și de asemenea influența mișcării suprafeței libere a lichidului din rezervor. Aceste fenomene sînt studiate în lucrările [98], [147] etc.

Se face mențiunea că structurile descrise atît în § 12.2, cît și castelele de apă, sînt sisteme extrem de sensibile la acțiunea seismică datorită conformării elastice și inerțiale particulare. Întrucît adaptarea postelastică la șocuri seismice puternice este deficitară, contîndu-se mai mult pe o ductilizare secțională și mai puțin pe una structurală, este necesar ca nivelul de asigurare seismică să fie mai ridicat în raport cu alte categorii de structuri.

O atenție deosebită trebuie acordată verificărilor la posibilitatea unor cedări structurale locale (în secțiunile de discontinuitate elastică sau inerțială), la eventuala plastificare a zonelor periferice ale terenului de sub fundații, precum și la pierderea stabilității generale prin răsturnare.

12.4. SILOZURI ȘI BUNCĂRE

Construcțiile de beton armat cu destinația de silozuri și buncăre au structurile de rezistență (în ansamblu) masive și rigide (fig. 12.8, *a*). Pentru configurațiile curente utilizate în practică, rezultate pe baza criteriilor funcționale, se pot admite în mod aproximativ modele dinamice simplificate de tipul celui reprezentat în figura 12.8, *b*.

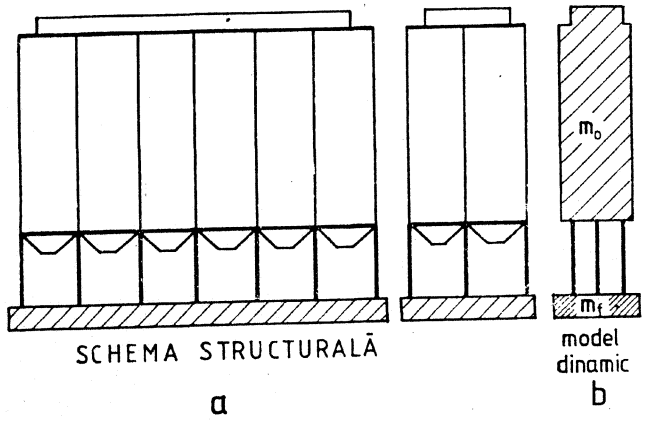


Fig. 12.8

În analiza seismică directă, ce se prezintă în continuare *, se introduc ipotezele:

— se consideră că grupul de celule ale unui siloz sau buncăr se comportă, din punct de vedere dinamic, ca un element unic și perfect rigid (avînd funcție exclusiv inerțială), susținut de stîlpi de aceeași lungime l;

— se presupune că fundarea se realizează printr-un radier indeformabil (de înălțime $2h$);

— se ține seama de deformabilitatea terenului, prin existența unui cuplaj elastic între structură și terenul de fundație;

— se admite că structura, în ansamblu, posedă proprietăți de simetrie geometrică, elastică și inerțială (C.G. coincide cu C.R.);

— se introduce numai componenta orizontală a mișcării seismice, pe direcția uneia din axele de simetrie, notată cu $u_0(t)$.

În aceste condiții modelul dinamic plan din figura 12.9, *a* va avea trei grade de libertate dinamică (3GLD). Configurațiile geometrice ale GLD din figura 12.9 au următoarele semnificații:

— translația orizontală $x(t)$, figura 12.9, *b*;

— rotirea în jurul C.G. al suprastructurii $\theta(t)$, figura 12.9, *c*;

— rotirea în jurul c.g. al radierului $\varphi(t)$, figura 12.9, *d*.

Deoarece GLD în raport cu care se formulează rezolvarea dinamică și seismică a problemei au caracter antisimetric (fig. 12.9), GLD verticale fiind simetrice rezultă decuplate.

Principalele notații care vor fi utilizate sînt introduse direct în figura 12.9. Poziția centrului de greutate (C.G.) al suprastructurii, de masă m_0 este raportată la secțiunea de contact cu grupul de stîlpi în număr de $m(s = 1, 2, \ldots m)$. Atît masa m_0, cît și distanța H se determină în funcție de greutatea proprie și de încărcarea efectivă din celulele construcției.

* Situația particulară expusă aici este cuprinsă într-o lucrare mai vastă elaborată de M. Ifrim și Fl. Macavei.

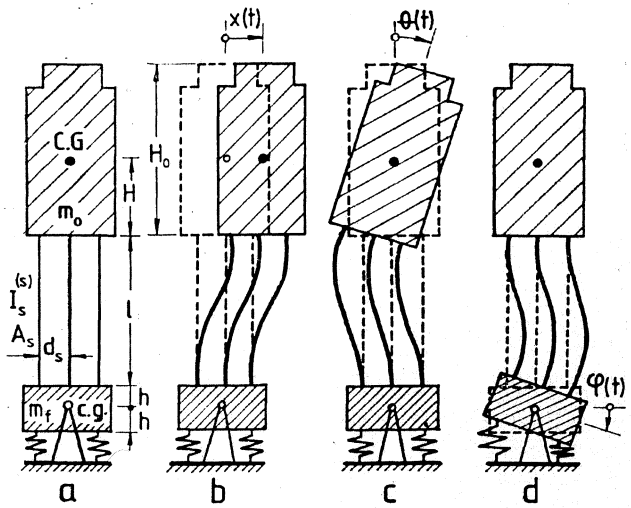


Fig. 12.9

Avantajul alegerii sistemului de coordonate din figura 12.9 constă în faptul că matricea de inerție a sistemului rezultă diagonală

$$[M] = \begin{bmatrix} m_0 & & \text{ZERO} \\ & J_0 & \\ \text{ZERO} & & J_f \end{bmatrix}, \tag{12.50}$$

în care

m_0 este masa suprastructurii;

J_0 — momentul de inerție masic în raport cu C.G. al suprastructurii;

J_f — momentul de inerție masic în raport cu c.g. al infrastructurii.

Matricea de rigiditate are forma generală cunoscută

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{xx} & r_{x\theta} & r_{x\varphi} \\ r_{\theta x} & r_{\theta\theta} & r_{\theta\varphi} \\ r_{\varphi x} & r_{\varphi\theta} & r_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \tag{12.51}$$

în care, semnificația coeficienților depinde de natura coordonatelor care intervin la definirea acestora.

În conformitate cu figura 12.10, prin aplicarea succesivă a deplasărilor generalizate egale cu unitatea pe direcția GLD, se obțin expresiile coeficienților de rigiditate astfel:

- din deplasarea $x = 1$ (fig. 12.10, *a*)

$$r_{xx} = \frac{12EI}{l^3}; \quad r_{\theta x} = -\frac{6EI}{l^2} - \frac{12EI}{l^3} H; \quad r_{\varphi x} = -\frac{6EI}{l^2} - \frac{12EI}{l^3} h;$$

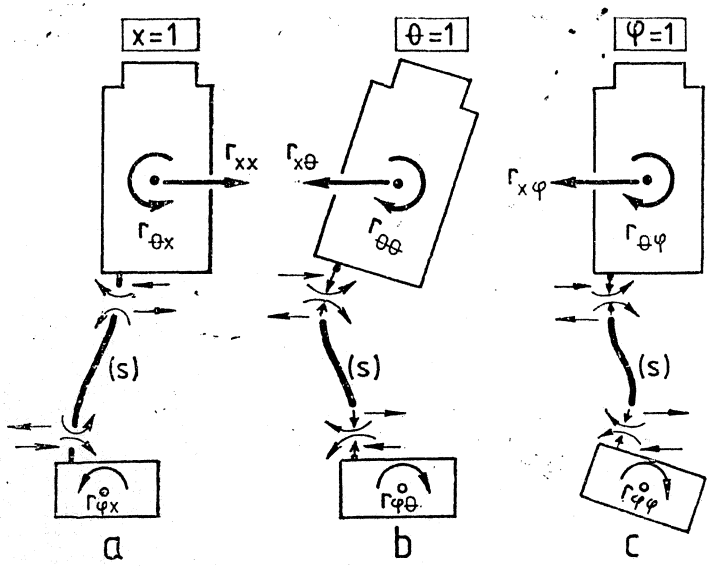


Fig. 12.10

- din rotirea $\theta = 1$ (fig. 12.10, *b*)

$$r_{x\theta} = -\frac{6EI}{l^2} - \frac{12EI}{l^3} H;$$

$$r_{\theta\theta} = \frac{4EI}{l} + \frac{6EI}{l^2} H + \sum_{s=1}^{m} \frac{EA_s}{l} d_s^2 + \frac{12EI}{l^3} H^2 + \frac{6EI}{l^2} H$$

$$r_{\varphi\theta} = \frac{2EI}{l} + \frac{6EI}{l^2} H - \sum_{s=1}^{m} \frac{EA_s}{l} d_s^2 + \frac{12EI}{l^3} Hh + \frac{EI}{l^2} h$$

- din rotirea $\varphi = 1$ (fig. 12.10, *c*)

$$r_{x\varphi} = -\frac{6EI}{l^2} - \frac{12EI}{l^3} h$$

$$r_{\theta\varphi} = \frac{2EI}{l} + \frac{6EI}{l^2} h - \sum_{s=1}^{m} \frac{EA_s}{l} d_s^2 + \frac{12EI}{l^3} hH + \frac{6EI}{l^2} H$$

$$r_{\varphi\varphi} = \frac{4EI}{l} + \frac{6EI}{l^2} h + \sum_{s=1}^{m} \frac{EA_s}{l} d_s^2 + \frac{12EI}{l^3} h^2 + \frac{6EI}{l^2} h + C_\varphi I_f$$

unde

$$I = \sum_{s=1}^{m} I_s$$

reprezintă momentul de inerție echivalent al grupului de stîlpi.

Expresiile coeficienților de rigiditate s-au stabilit independent, iar proprietatea de reciprocitate a constituit mijlocul de control al corectitudinii rezultatelor obținute. În expresia coeficientului $r_{\varphi\varphi}$ s-a neglijat cuplul produs de încărcarea gravitațională datorită schimbării poziției centrului de greutate al suprafeței de contact dintre radier și terenul de fundație.

Notațiile suplimentare din relațiile de mai sus au semnificația:

A_s este aria secțiunii transversale a stîlpilor ($s = 1, 2, \ldots m$);
I_s — momentul de inerție al stîlpilor;
C_φ — coeficient de elasticitate neuniformă a terenului la rotirea fundației în jurul axei orizontale;
I_f — momentul de inerție al suprafeței de contact dintre radier și terenul de fundație (talpa radierului), în raport cu axa orizontală de rotație conținută în această suprafață.

Ecuația de mișcare în cazul acțiunii seismice, caracterizată prin variația accelerațiilor $\ddot{u}_0(t)$, are forma

$$[M]_{3,3}\{\ddot{\Delta}\}_{3,1} + [R]_{3,3}\{\Delta\}_{3,1} = -[M]_{3,3}\{\zeta\}_{3,1} \tag{12.52}$$

în care au intervenit vectorii răspunsului (exprimați în deplasări și accelerații relative) și vectorul acțiunii (exprimat prin accelerații), adică

$$\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \\ \varphi(t) \end{Bmatrix}, \quad \{\ddot{\Delta}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{\varphi}(t) \end{Bmatrix}, \quad \{\zeta\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_0(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{12.53}$$

Problemele de analiză dinamică și seismică ce se pun în continuare sînt identice cu cele studiate anterior. Astfel, caracteristicile proprii de vibrație (perioade și forme proprii) se obțin prin procedeele expuse în capitolele 3 și 6, întrucît analiza se reduce la o problemă standard de valori și vectori proprii. Răspunsul seismic se determină pe baza aspectelor teoretice și aplicative prezentate în capitolul 8, utilizînd în acest sens conceptul spectrelor de răspuns sau procedeele directe conținute în normele de proiectare.

În aceeași manieră pot fi tratate și alte categorii de structuri, care se reduc la modele dinamice identice cu cel admis în figura 12.9, cum ar fi: castele de apă susținute pe structuri în cadre, anumite tipuri de estacade și rezervoare, structuri celulare cu parter liber (flexibil), poduri (în plan transversal) etc.

12.5. BARAJE

În timpul unui cutremur, un baraj este supus forțelor de inerție generate de masa proprie, precum și efectului presiunii hidrodinamice datorită componentei orizontale a mișcării fundației. Situația cea mai defavorabilă se produce cînd direcția accelerației seismice este perpendiculară pe axa barajului în sensul aval-amonte, iar lacul de acumulare este plin. În acest caz, atît forțele de inerție din corpul barajului, cît și presiunea hidrodinamică se suprapun presiunii hidrostatice, ceea ce contribuie la reducerea stabilității generale. De asemenea, distribuția tensiunilor în corpul barajului și în special în secțiunea de contact dintre baraj și fundație se modifică esențial. Astfel, eforturile de compresiune din aval cresc sensibil, în timp ce eforturile de compresiune din amonte se micșorează putînd deveni chiar de întindere.

Efectul dinamic al apei în baraje ca urmare a acțiunii cutremurelor a fost studiat de H. M. Westergaard, J. Bratz, C. Heilbron, L. S. Jacobsen, R. Prișcu, C. N. Zangar, S. G. Napetvaridze, R. W. Clough, G. Oberti, A. K. Chopra ș.a.

Dacă se consideră apa incompresibilă, presiunea hidrodinamică la cota y măsurată de la suprafața liberă, se poate exprima destul de corect cu relația [202]:

$$p_y = CK_s\gamma h, \tag{12.54}$$

în care:

p_y este presiunea hidrodinamică la cota y;
C — coeficient de presiune care variază în funcție de adîncimea și de forma paramentului amonte al barajului;
K_s — coeficient de intensitate seismică;
γ — greutatea volumetrică a apei;
h — înălțimea barajului.

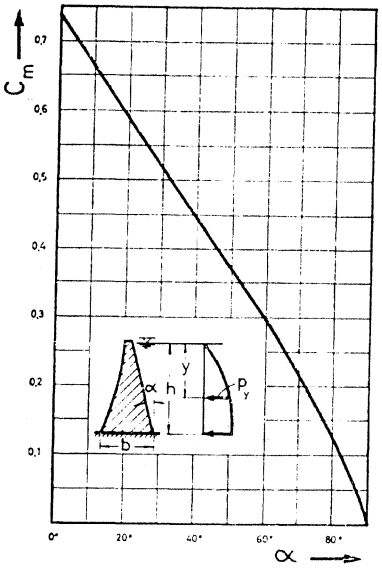


Fig. 12.11

Expresia analitică a coeficientului de presiune este următoarea:

$$C = \frac{C_m}{2}\left[\frac{y}{h}\left(2 - \frac{y}{h}\right) + \sqrt{\frac{y}{h}\left(2 - \frac{y}{h}\right)}\right], \tag{12.55}$$

unde C_m reprezintă valoarea maximă a coeficientului C care se obține din graficul din figura 12.11 în funcție de înclinarea paramentului amonte.

Forța rezultantă orizontală și momentul rezultant al presiunii hidrostatice, în raport cu centrul de greutate al unei secțiuni la cota y, se determină cu relațiile

$$F_y = 0{,}726 p_y y \tag{12.56}$$

$$M_y = 0{,}299 p_y y^2. \tag{12.57}$$

Formula (12.54) cu ajutorul căreia se calculează presiunea suplimentară a apei asupra barajelor, ca urmare a acțiunii seismice, reprezintă o îmbunătățire a variației parabolice propusă de H. M. Westergaard în anul 1933 [196].

Contribuții importante cu privire la evaluarea cantitativă a răspunsului seismic al barajelor de greutate și în arc au fost aduse de Radu Prișcu [159], [160].

În privința coeficientului seismic K_s din relația (12.54) se recomandă să se folosească valorile corespunzătoare construcțiilor din clasa I de importanță.

În figurile 12.12 și 12.13 sînt trasate variațiile coeficientului de presiune C, în funcție de adîncimea relativă y/h, pentru două forme caracteristice ale paramentului amonte ale unui baraj.

Trebuie menționat faptul că în cazul *barajelor de greutate* din beton este necesară efectuarea unei analize a stării de tensiune și a stabilității și în prezența componentei verticale a accelerației cutremurului, mai ales pentru lucră-

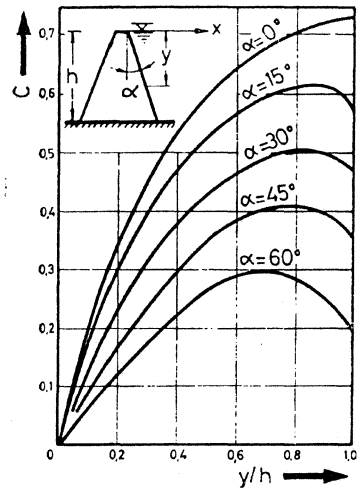


Fig. 12.12

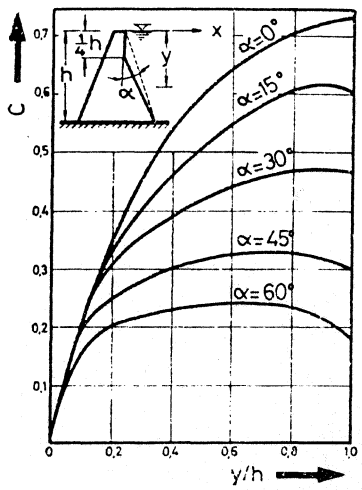


Fig. 12.13

rile amplasate în zone apropiate de epicentre. De asemenea, se va lua în considerație și efectul perioadei predominante a terenului ținînd seama că barajele sînt construite de obicei în terenuri stîncoase caracterizate prin perioade de vibrație joase de ordinul 0,05 ... 0,1 s.

În privința *barajelor în arc*, observațiile în urma cutremurelor intensive au demonstrat o comportare satisfăcătoare din punctul de vedere al rezistenței și stabilității. Un efect mai defavorabil îl prezintă însă componenta accelerației mișcării pe direcția liniei nașterilor deoarece în acest caz arcul este solicitat antisimetric.

La *barajele de pămînt* sau din anrocamente (bolovani sau blocuri de piatră spartă) problemele care se pun, în legătură cu protecția antiseismică, sînt mult mai complexe decît în cazul barajelor de beton. Principalul pericol care poate fi produs de acțiunea unui șoc seismic îl constituie alunecările pantelor. În acest sens se impune analiza stabilității pantelor în prezența forțelor orizontale cauzate de cutremur. Natura materialului din care este formată panta este de mare importanță în ceea ce privește stabilitatea barajului. În general, argilele plastice, avînd un grad scăzut de sensibilitate la șoc, au comportarea cea mai stabilă. De asemenea, nisipul dens, compact în stare uscată este destul de stabil. În schimb un nisip afînat și saturat devine nestabil la șocurile seismice datorită producerii spontane a efectului de lichefiere. Dacă fundația unui baraj de pămînt constituie o bază stabilă pentru suprastructură, eventualele tasări ale pantelor nu vor conduce la o prăbușire totală. Totdeauna după cutremur taluzurile barajului vor fi mai stabile decît înainte întrucît vibrațiile care se produc contribuie la compactarea materialului.

În cazul barajelor din anrocamente, șocul seismic afectează mai defavorabil atît rezistența, cît și stabilitatea datorită faptului că materialul este lipsit de coeziune. Totuși, un asemenea baraj posedă o capacitate mai ridicată de a absorbi energia produsă de șocuri intensive. Se recomandă ca unghiul de înclinare al pantei unui astfel de baraj să fie mai mic decît unghiul de taluz natural al materialului.

Observații importante în legătură cu comportarea barajelor de pămînt la acțiunea seismică au fost făcute de A. Casagrande și W. L. Shannon [40]. Dintre acestea cele mai importante sînt următoarele:

— pantele abrupte formate din roci friabile sau loess sînt extrem de sensibile la șocurile seismice, iar alunecările sînt serios agravate de fenomenul lichefierii;

— nisipul afînat și saturat este lichefiat în timpul cutremurului, pe cînd un material necoeziv în stare uscată și afînată, sub unghiul de taluz natural, este mai puțin afectat;

— materialele necoezive în stare uscată sau saturată, dar foarte compacte și care formează pante sub taluzul natural, au o comportare satisfăcătoare;

— straturile de argilă din interiorul unui baraj de pămînt pot asigura o rezistență la forfecare ridicată la tendința de alunecare a pantelor.

La construcția barajelor, indiferent de tipul acestora, se vor evita terenurile de fundație cu caracteristici neuniforme pronunțate și zonele în care există falii.

Pentru determinarea perioadei fundamentale de vibrație a barajelor se pot utiliza în mod aproximativ relațiile de calcul propuse de M. Ifrim în tabelul 12.2. Notațiile folosite în acest tabel au următoarele semnificații:

E — modulul de elasticitate longitudinală a materialului din care este executat barajul;
ρ — densitatea materialului;
ν — coeficientul de contracție transversală (coeficientul lui Poisson);
h — înălțimea totală a barajului;
b — lungimea bazei barajului (fig. 12.11);
β — b/h.

Expresia perioadei fundamentale are forma generală

$$T = \zeta h \sqrt{\frac{\rho}{E}}, \tag{12.58}$$

unde ζ este un coeficient care depinde de natura deformațiilor considerate la analiza vibrațiilor proprii ale barajului.

Valorile numerice ale coeficientului ζ se determină pe baza relațiilor cuprinse în tabelul 12.2. Formula (12.58) împreună cu datele din tabelul 12.2 dau rezultate acceptabile în cazul barajelor lungi și la care parametrii aval și amonte au variații liniare.

TABELUL 12.2

Direcția vibrațiilor	Deformațiile considerate	Perioada fundamentală T_1 în s	Expresia coeficientului ζ
ORIZONTALE	LUNECARE	$\zeta_1 h\sqrt{\frac{\rho}{E}}$	$\zeta_1 = 2{,}612\sqrt{2(1+\nu)}$
	ÎNCOVOIERE	$\zeta_2 h\sqrt{\frac{\rho}{E}}$	$\zeta_2 = \frac{4{,}097}{\beta}$
	LUNECARE ȘI ÎNCOVOIERE	$\zeta_3 h\sqrt{\frac{\rho}{E}}$	$\zeta_3 = 2\pi\sqrt{\frac{4+4{,}8\beta^2(1+\nu)+1{,}8\beta^4(1+\nu)^2}{10\beta^2+4{,}5\beta^4(1+\nu)}}$
VERTICALE	AXIALE	$\zeta_4 h\sqrt{\frac{\rho}{E}}$	$\zeta_4 = 2{,}612$

Analiza stării de tensiune și deformație din corpul unui baraj supus acțiunii seismice se poate face prin aplicarea *metodei elementelor finite*. Această metodă permite abordarea tridimensională sau bidimensională a problemei [49], [203].

Conceptul de bază al metodei elementelor finite constă în a transforma barajul, care este un corp elastic și continuu, într-un ansamblu de elemente discrete legate între ele în punctele lor nodale. În cazul analizei bidimensionale (plane) se utilizează de obicei elemente de formă triunghiulară ale căror vîrfuri precizează punctele nodale de conexiune. Prin urmare, elementele discrete se obțin cu ajutorul unei rețele triunghiulare plane determinată din punct de vedere geometric.

În baza acestei transformări, se pot calcula proprietățile de rigiditate ale tuturor elementelor componente, adică relația de legătură dintre forță și deplasare în fiecare nod al rețelei. Rigiditatea totală a ansamblului structural $[R]$ se obține printr-o operație de superpoziție simplă a coeficienților de rigiditate corespunzători fiecărui element conectat în punctele nodale. Dacă vectorul deplasărilor tuturor punctelor nodale ale ansamblului structural se notează cu $\{\Delta\}$, iar vectorul corespunzător forțelor nodale cu $\{F\}$, se poate scrie următoarea relație

$$\{F\} = [R]\ \{\Delta\}. \tag{12.59}$$

Considerînd că rețeaua structurii idealizată are n puncte nodale, ordinul matricelor care intervin în relația (12.59) este $2n$ deoarece vectorul deplasărilor $\{\Delta\}$ are două componente pe direcțiile axelor $x - x$ și $y - y$. În analiza stării de tensiune și deformație prin metoda elementelor finite, totdeauna ecuațiile de condiție sînt liniare.

Vectorul tensiunilor, notat prin $\{\sigma\}$, în toate elementele rețelei se obține prin intermediul deplasărilor nodale, efectuind o operație de transformare matriceală de forma

$$\{\sigma\} = [\mathcal{C}]\ \{\Delta\}, \tag{12.60}$$

unde $[\mathcal{C}]$ reprezintă matricea de transformare a tensiunilor.

În legătură cu metoda elementelor finite se face precizarea că atît condiția de echilibru, cît și condiția de compatibilitate sînt satisfăcute pentru fiecare element în parte și pentru structură în ansamblu.

În vederea determinării răspunsului seismic se aplică analiza modală (expusă în capitolul 4). În cazul de față, ecuația de condiție rezultă sub forma:

$$[M]\ \{\ddot{\Delta}\} + [C]\ \{\dot{\Delta}\} + [R]\ \{\Delta\} = \{F(t)\}. \tag{12.61}$$

Matricele $[M]$ și $[C]$ au fost definite în prima parte a lucrării, iar matricea rigidităților $[R]$ se obține prin metoda elementelor finite.

Vectorul forțelor exterioare $\{F(t)\}$ reprezintă rezultanta componentelor orizontale și verticale aplicate fiecărui punct nodal la timpul t produse de accelerația seismică $\ddot{u}(t)$ de la baza barajului. Componenta orizontală a accelerației terenului $\ddot{u}_x(t)$ va produce numai forțe orizontale, iar componenta verticală a accelerației $\ddot{u}_y(t)$ numai forțe verticale.

În această situație vectorul forțelor exterioare se va exprima astfel

$$\{F(t)\} = -\{M^x\}\ddot{u}_x(t) - \{M^y\}\ddot{u}_y(t), \tag{12.62}$$

unde s-au folosit notațiile

$$\{F(t)\} = \begin{Bmatrix} F_1^x(t) \\ F_1^y(t) \\ F_2^x(t) \\ F_2^y(t) \\ \vdots \\ F_n^x(t) \\ F_n^y(t) \end{Bmatrix}, \quad \{M^x\} = \begin{Bmatrix} M_1 \\ 0 \\ M_2 \\ 0 \\ \vdots \\ M_n \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{M^y\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M_1 \\ 0 \\ M_2 \\ \vdots \\ 0 \\ M_n \end{Bmatrix}. \tag{12.63}$$

Substituind relația (12.62) în ecuația (12.61) rezultă

$$[M]\ \{\ddot{\Delta}\} + [C]\ \{\dot{\Delta}\} + [R]\ \{\Delta\} = -\{M^x\}\ddot{u}_x(t) - \{M^y\}\ddot{u}_y(t) \tag{12.64}$$

Dacă pentru ecuația (12.64) se admite o soluție de forma (4.15) adică

$$\{\Delta\} = [\Phi]\ \{\eta\}, \tag{12.65}$$

prin efectuarea transformărilor arătate în capitolul 4, se ajunge la o ecuație identică cu (4.26) în funcție numai de coordonata modală $\eta_i(t)$, corespunzătoare modului i de vibrație

$$\ddot{\eta}_i(t) + 2\nu_i\omega_i\dot{\eta}_i(t) + \omega_i^2\eta_i(t) = \frac{F_i^*(t)}{M_i^*}. \tag{12.66}$$

Masa generalizată M_i^* precum și forța generalizată $F_i^*(t)$ au expresiile (4.7), respectiv (4.21). În cazul considerat anterior și caracterizat de ecuația (12.64) expresia forței generalizate va fi

$$F_i^*(t) = -\{\Phi\}_i^T\ \{M^x\}\ddot{u}_x(t) - \{\Phi\}_i^T\ \{M^y\}\ddot{u}_y(t). \tag{12.67}$$

Se constată că analiza modală a răspunsului seismic al barajelor a fost adusă la forma generală studiată în capitolele 4 și 8. În consecință, atît caracteristicile proprii de vibrație cît și elementele răspunsului seismic (deplasări, viteze, accelerații și forțe de inerție) se determină prin metodele expuse în cuprinsul acestei lucrări. Dacă se obțin vectorii deplasărilor modale $\{\Delta\}_i$, forțele corespunzătoare din nodurile rețelei se stabilesc direct cu ajutorul relației (12.59).

Problemele teoretice și aplicative cu privire la acțiunea mișcării seismice asupra barajelor sînt extrem de vaste și complexe. De aceea, în cuprinsul acestui paragraf au fost prezentate succint numai cîteva concepte generale cu caracter mai mult informativ.

Lucrarea [159] sintetizează multitudinea aspectelor cu privire la calculul și comportarea barajelor de diferite tipuri, la acțiuni seismice.

12.6. ZIDURI DE SPRIJIN

Zidurile de sprijin sînt structuri inginerești expuse unor solicitări dinamice importante în timpul cutremurelor puternice. În acest sens pot fi citate avariile de mari proporții produse în urma seismelor din Chile (1960), Alaska (1964)

și Niigata (1964). Problemele specifice care intervin în calculul presiunii active, produsă de mișcarea seismică, se referă la următorii parametri principali:

— caracteristicile geotehnice ale terenului (depozitului geologic) ce urmează a fi sprijinit;

— caracteristicile materialului de umplutură din spatele zidului de sprijin (peretelui);

— geometria structurii zidului și poziția acestuia;

— natura și proprietățile materialului din care este executat;

— prezența apei și posibilitatea producerii fenomenului de lichefiere;

— supraîncărcarea directă superficială a terenului din spatele peretelui.

În stratul geologic superficial din spatele zidului de sprijin se pot produce fenomene de amplificare seismică semnificative, care depind atît de caracteristicile fizice și dinamice ale terenului, cît și de compoziția spectrală a mișcării seismice. Pentru factorul de amplificare seismică, S. Okamoto [151] a stabilit următoarea expresie

$$A(T) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\left\{\frac{1+k}{1-k}\left[1-\left(\frac{T_s}{T_0}\right)^2\right]\right\}^2 + \left(\frac{0{,}3}{\sqrt{T_0}}\cdot\frac{T_s}{T_0}\right)^2}}, \tag{12.68}$$

unde

$$k = \frac{\gamma_1 v_{s1}}{\gamma_2 v_{s2}}. \tag{12.69}$$

Notațiile folosite în relațiile (12.68) și (12.69) au semnificațiile:

T_0 reprezintă perioada predominantă a terenului;

T_s — perioada componentei predominante a mișcării în stratul tare de bază;

γ_1, v_{s1} — greutatea volumetrică și viteza de propagare a undelor transversale (de forfecare) corespunzătoare stratului superficial;

γ_2, v_{s2} — idem, pentru stratul de bază.

Toate aceste mărimi au fost definite și interpretate în capitolul 7. Astfel, perioada predominantă a terenului se determină cu formula (7.37) astfel

$$T_0 = \frac{4H}{v_s},$$

în care H este grosimea stratului superficial considerat omogen. În cazul existenței unei stratigrafii neomogene se poate aplica relația (7.40). Mărimea factorului de amplificare (sau uneori de diminuare) depinde în general de natura terenului. Astfel, valorile numerice medii sînt situate între 0,67 (teren stîncos) și 1,5 (teren moale). În cazul în care $T = T_0$, situație caracteristică fenomenului de „rezonanță tranzitorie", valorile factorului de amplificare variază între 2 și 5.

Presiunea activă (la cota h) pe care o exercită pămîntul, considerat în stare uscată, asupra unui zid de sprijin în timpul unui cutremur (fig. 12.14, *a*), se determină cu relațiile

$$p_a = K_{s,v}\gamma h C_a, \tag{12.70}$$

$$C_a = \frac{\cos^2(\Phi-\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos^2\alpha\cos(\Phi_1+\alpha+\theta)}\cdot\frac{1}{\left[1+\left(\frac{\sin(\Phi+\Phi_1)\cdot\sin(\Phi-\beta-\theta)}{\cos(\alpha-\beta)\cdot\cos(\Phi_1+\alpha+\theta)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}, \tag{12.71}$$

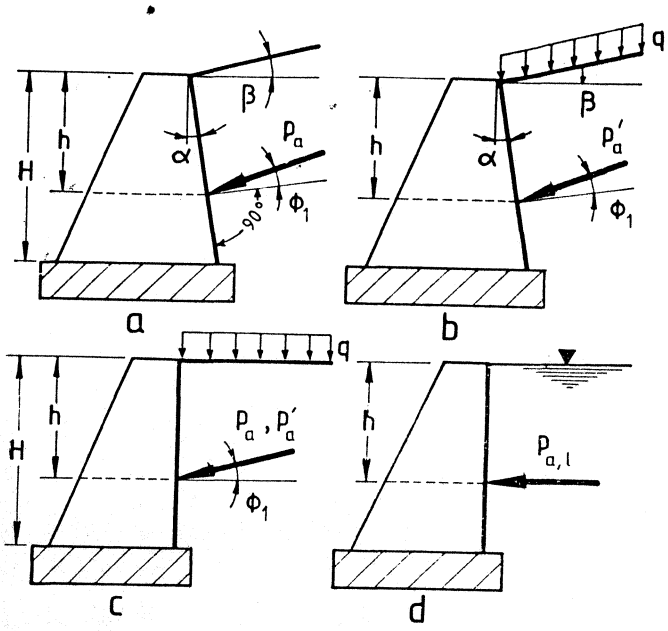


Fig. 12.14

unde

C_a este coeficientul de presiune;

γ — greutatea volumetrică a pămîntului (1 600 ... 1 800 kgf/m³);

Φ — unghiul de frecare internă a pămîntului;

Φ_1 — unghiul de frecare dintre pămînt și peretele zidului;

α — unghiul pe care îl formează fața interioară a zidului cu verticala;

β — unghiul de înclinare a suprafeței terenului;

θ — arc tg $K_{s,H}$;

$K_{s,H}$ — coeficient seismic corespunzător direcției orizontale;

$K_{s,v}$ — coeficient seismic corespunzător direcției verticale $\left(K_{s,v} \simeq \simeq \frac{1}{2} K_{s,H}\right)$.

Presiunea activă totală (rezultantă), produsă de cutremur, rezultă

$$P_a = \frac{1}{2} K_{s,v}\gamma H^2 C_a \tag{12.72}$$

și se aplică la cota $2H/3$ măsurată de la bază, în timp ce rezultanta presiunilor statice $1/2$ ($\gamma H^2 C_a$) se aplică la cota $H/3$ de la bază (prin H s-a notat înălțimea zidului de sprijin).

Dacă la suprafața liberă există supraîncărcarea uniformă q (fig. 12.14, *b*), presiunea adițională totală (rezultantă) se obține cu formula

$$P'_a = p'_a H = K_{s,v}\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha-\beta)} qHC_a, \tag{12.73}$$

care se aplică la cota $H/2$.

În situația particulară reprezentată în figura 12.14, *c* în care $\alpha = \beta = 0$, presiunile active totale (rezultante) produse de cutremur au expresiile

$$P_a = \frac{1}{2} K_{s,v} \gamma H^2 C_a^*, \quad P_a' = K_{s,v} q H C_a^*, \tag{12.74}$$

în care C_a^* se obține prin particularizarea relației (12.71)

$$C_a^* = \frac{\cos^2(\Phi - \theta)}{\cos\theta \cos(\Phi_1 + \theta)\left[1 + \left(\frac{\sin(\Phi + \Phi_1)\sin(\Phi - \theta)}{\cos(\Phi_1 + \theta)}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}$$

În cazul lichefierii depozitului din spatele zidului de sprijin (fig. 12.14, *d*) presiunea activă dinamică ($p_{a,l}$) se evaluează pe baza teoriei lui H.M. Westergaard astfel

$$p_{a,l} = \frac{7}{8} K_{s,H} \gamma_l \sqrt{hH}, \tag{12.75}$$

obținîndu-se presiunea totală (rezultantă) sub forma

$$P_{a,l} = \frac{7}{12} K_{s,H} \gamma_l H^2. \tag{12.76}$$

Punctul de aplicație al rezultantei presiunii dinamice se află la $2H/5$ de la bază, iar rezultanta presiunilor statice $1/2$ ($\gamma_l H^2$) la $H/3$ de la bază.

Este evident că aplicarea tuturor relațiilor de calcul cu privire la estimarea presiunilor active asupra zidurilor de sprijin, generate de mișcarea seismică, implică cercetarea experimentală prealabilă a amplasamentului din punct de vedere geotehnic și seismic.

12.7. PODURI

Avariile și distrugerile produse de cutremurele violente asupra podurilor de beton armat sau metalice au fost observate atît la infrastructură, cît și la suprastructură. În majoritatea cazurilor se produc rupturi sau răsturnări ale pilelor, precum și deplasări sau distrugeri ale părții carosabile.

Efectul mișcării seismice asupra podurilor este puternic amplificat cînd fundațiile sînt amplasate în teren aluvionar și moale. În figura 12.15 se prezintă distrugerea unui pod de beton armat în urma cutremurului de la Niigata (Japonia) din 16 iunie 1964. Acest pod, situat într-un teren aluvionar, avea 10 deschideri de 26,90 m fiecare.

La podurile de beton armat sau metalice cu deschideri mici, datorită rigidității ridicate, răspunsul seismic va avea valori destul de mari. În schimb, la podurile cu deschideri mari și cu pilele înalte, datorită creșterii flexibilității, răspunsul seismic se va micșora considerabil. Gradul de rigiditate al unui pod poate fi apreciat prin intermediul perioadei fundamentale de vibrație. În mod aproximativ, perioada fundamentală se poate calcula în funcție de deschiderea l cu formula

$$T_1 \approx 0{,}04\sqrt{l}, \ (s), \tag{12.77}$$

unde l se măsoară în metri.

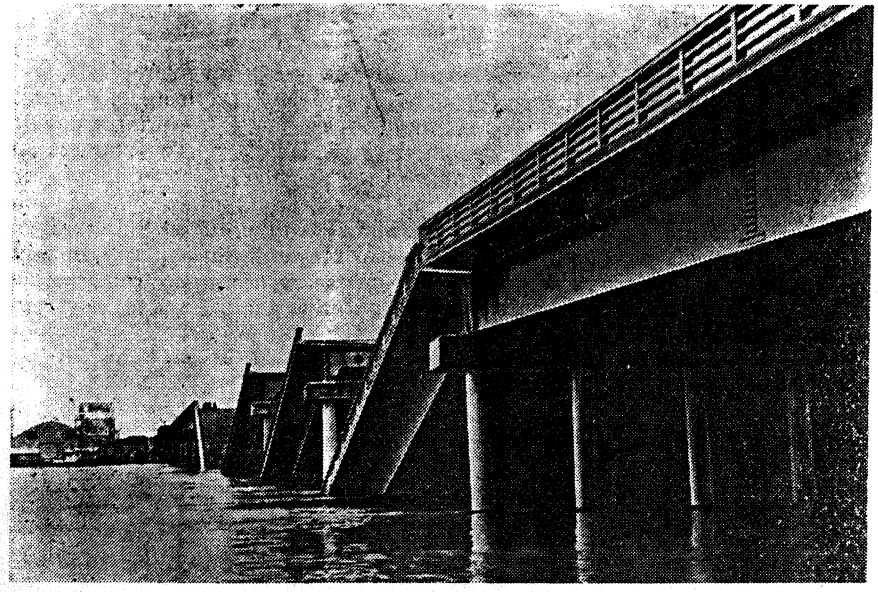


Fig. 12.15

Perioadele fundamentale de vibrație ale podurilor în plan orizontal sînt mai reduse, întrucît rigiditatea structurii de rezistență (tablierului) este mai mare decît în plan transversal. În general, se poate admite relația

$$T_1 \text{ (orizontal)} \simeq \frac{1}{3} T_1 \text{ (transversal)}. \tag{12.78}$$

Estimarea încărcărilor seismice se va face ținînd seama de următoarele observații:

— gradul de intensitate seismică se va stabili în baza observațiilor seismologice locale corelate cu structura geo-morfologică a terenului;

— încărcările seismice laterale se aplică în centrul de greutate al fiecărei părți componente a suprastructurii;

— efectul cutremurului se combină cu cel produs de trafic (sarcini mobile) în vederea analizei structurii din punctul de vedere al rezistenței și al stabilității;

— efectul seismic nu se combină cu cel al vîntului care în multe cazuri poate fi mai periculos;

— determinarea forțelor seismice care acționează pilele și culeele se face luînd în considerație și forțele de inerție transmise de aluviuni și apă;

— nu este indicat ca faliile produse de cutremure să fie traversate de poduri.

Deoarece în multe situații s-a constatat că suprastructura unui pod este aruncată de pe suporți, se recomandă ancorarea părții carosabile la reazeme. Neexistînd pentru poduri norme cu privire la evaluarea încărcărilor seismice, aprecierea acestora se face pe baza cunoștințelor și experienței fiecărui proiectant.

12.8. APLICAȚII

Aplicația 12.8.1. Pentru structura de beton armat din figura 12.16 se va determina diagrama de momente încovoietoare pe baza metodelor aproximative expuse anterior și se vor compara cu cele obținute printr-un calcul exact. Principalele caracteristici geometrice și elastice relative sînt stabilite în tabelul 12.3, considerîndu-se ca mărimi de referință $I_0 = 54$ dm^4 (pentru secțiunea de 30 × 60 cm) și $l_0 = 2{,}9$ m. Încărcările laterale se pot considera că sînt datorate acțiunii seismice (corespunzătoare unui grad de protecție antiseismică egal cu 7), acțiunii vîntului sau presiunii din explozii. În figura 12.16 sînt date direct caracteristicile de încărcare ale structurii. Diagrama de momente încovoietoare, rezultată în urma unei analize exacte, este reprezentată în figura 12.17.

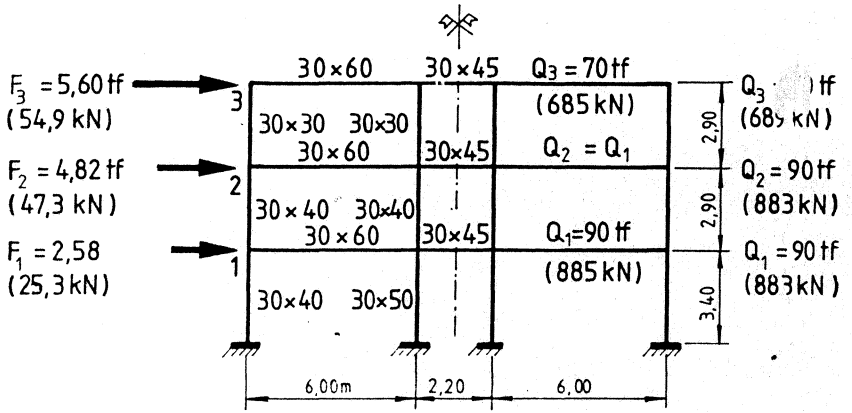


Fig. 12.16

TABELUL 12.3

		Secțiuni (cm)	I (dm^4)	$k = \frac{I}{I_0}$	l (m)	$\lambda = \frac{l}{l_0}$	$\rho = \frac{k}{\lambda}$
RIGLE	CENTRALE	30 × 45	22,78	0,422	2,20	0,759	0,556
	MARGINALE	30 × 60	54,00	1,000	6,00	2,069	0,483
STÎLPI CENTRALI	ETAJE	30 × 30	6,75	0,125	2,90	1,000	0,125
		30 × 40	16,00	0,296	2,90	1,000	0,296
	PARTER	30 × 50	31,25	0,579	3,40	1,172	0,494
STÎLPI MARGINALI	ETAJE	30 × 30	6,75	0,125	2,90	1,000	0,125
		30 × 40	16,00	0,296	2,90	1,000	0,296
	PARTER	30 × 40	16,00	0,296	3,40	1,172	0,253

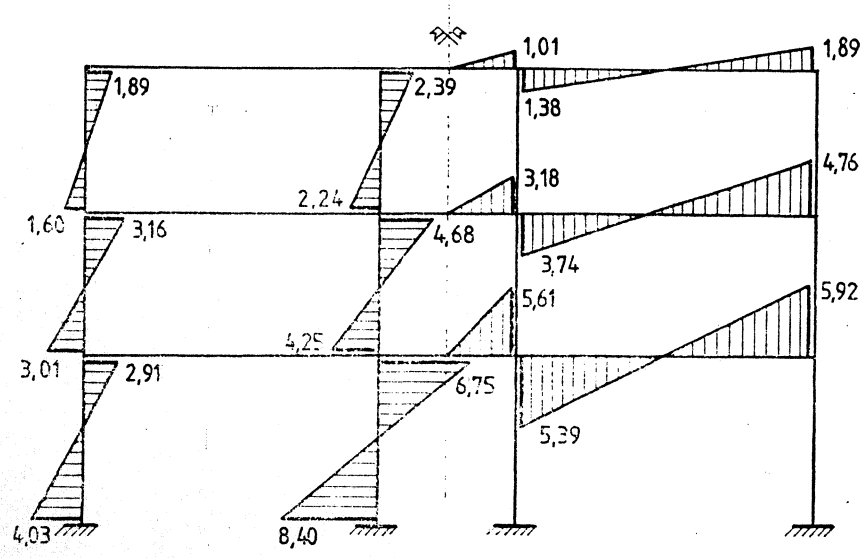


Fig. 12.17

În figura 12.18 se arată modul de aplicare a metodei factorului, în conformitate cu operațiile de calcul sistematizate direct pe schema structurii (fig. 12.4). Cunoscînd variația forțelor tăietoare, momentele de etaj s-au calculat cu relația (12.8), iar distribuția acestora la extremitățile stîlpilor s-a obținut cu expresiile (12.28) și (12.29). Momentele încovoietoare din secțiunile de capăt ale riglelor s-au determinat cu formulele (12.32) și (12.33). Aceeași structură a fost calculată prin metoda localizării punctelor de inflexiune și metoda rigidităților relative de nivel. În legătură cu ultima metodă nu s-au mai dat operațiile de calcul preliminarii întrucît au fost prezentate în detaliu în aplicația 10.6.1. Coeficientul de corecție (12.39) al momentelor încovoietoare a rezultat egal cu 1,15. Utilizarea coeficienților de corecție diferențiați (pentru fiecare etaj) conduce la o îmbunătățire substanțială a rezultatelor finale. Se menționează că la aplicarea tuturor metodelor de calcul s-a ținut seama de simetria structurii, precum și de caracterul antisimetric al aplicării acțiunilor laterale.

În tabelele 12.4 și 12.5 sînt sistematizate rezultatele obținute prin aplicarea metodelor aproximative, în comparație cu cele determinate printr-un calcul exact.

TABELUL 12.4

ETAJ	SECȚIUNEA	STÎLPI MARGINALI — METODA DE CALCUL				STÎLPI CENTRALI — METODA DE CALCUL			
		Exactă (tfm)	Puncte de inflexiune (BOWMAN)	Factor (WILBUR)	Rigidit. rel. de nivel (IFRIM)	Exactă (tfm)	Puncte de inflexiune (BOWMAN)	Factor (WILBUR)	Rigidit. rel. de nivel (IFRIM)
2—3	SUS	1,89	2,43	1,95	1,97	2,39	2,43	2,32	2,49
	JOS	1,60	1,63	1,71	1,71	2,24	1,63	2,14	2,34
1—2	SUS	3,16	3,39	3,38	2,85	4,68	3,39	4,40	4,31
	JOS	3,01	4,17	3,24	2,68	4,25	4,17	4,08	3,85
0—1	SUS	2,91	3,01	3,14	3,15	6,75	5,84	6,78	7,12
	JOS	4,03	4,50	4,02	4,25	8,40	8,75	8,15	8,79

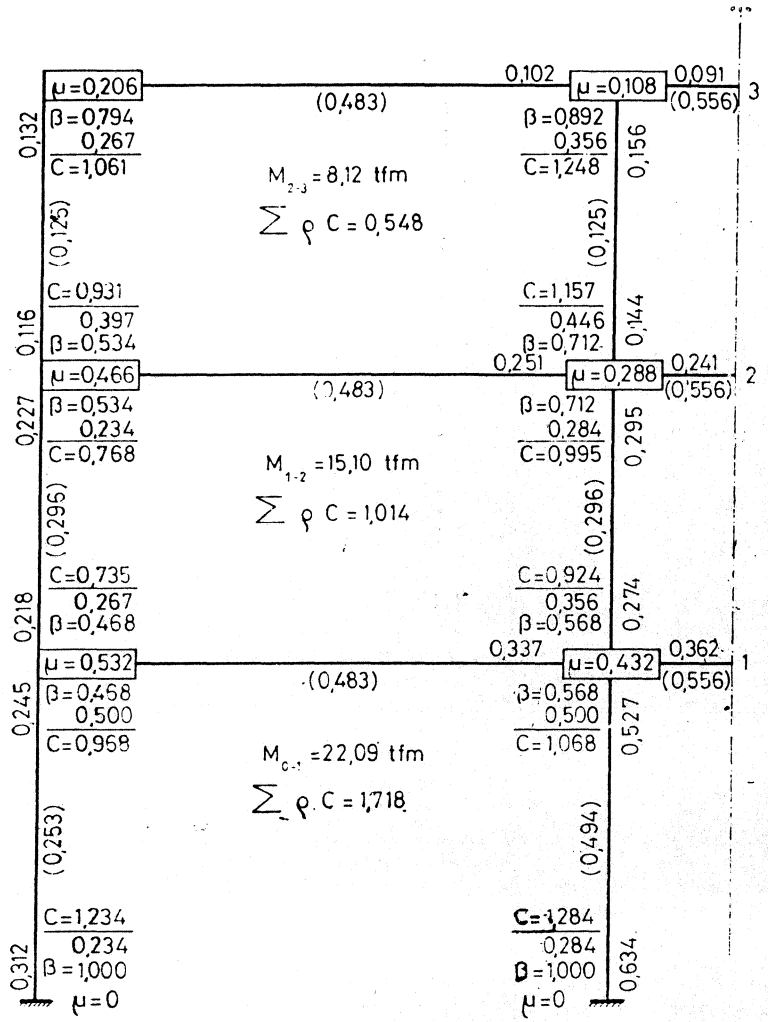


Fig. 12.18

TABELUL 12.5

NIVELUL	SECȚIUNEA	RIGLE MARGINALE — METODA DE CALCUL				RIGLA CENTRALĂ — METODA DE CALCUL			
		Exactă (tfm)	Puncte de inflexiune (BOWMAN)	Factor (WILBUR)	Rigidit. rel. de nivel (IFRIM)	Exactă (tfm)	Puncte de inflexiune (BOWMAN)	Factor (WILBUR)	Rigidit. rel. de nivel (IFRIM)
3	STÎNGA	1,89	2,43	1,95	1,97	1,01	0,44	1,08	1,05
	DREAPTA	1,38	1,99	1,23	1,44	1,01	0,44	1,08	1,05
2	STÎNGA	4,76	5,02	5,09	4,55	3,18	0,91	3,39	3,05
	DREAPTA	3,74	4,11	3,53	3,60	3,18	0,91	3,39	3,05
1	STÎNGA	5,92	7,18	6,38	5,83	5,61	4,14	5,62	5,62
	DREAPTA	5,39	5,87	5,24	5,36	5,61	4,14	5,62	5,62

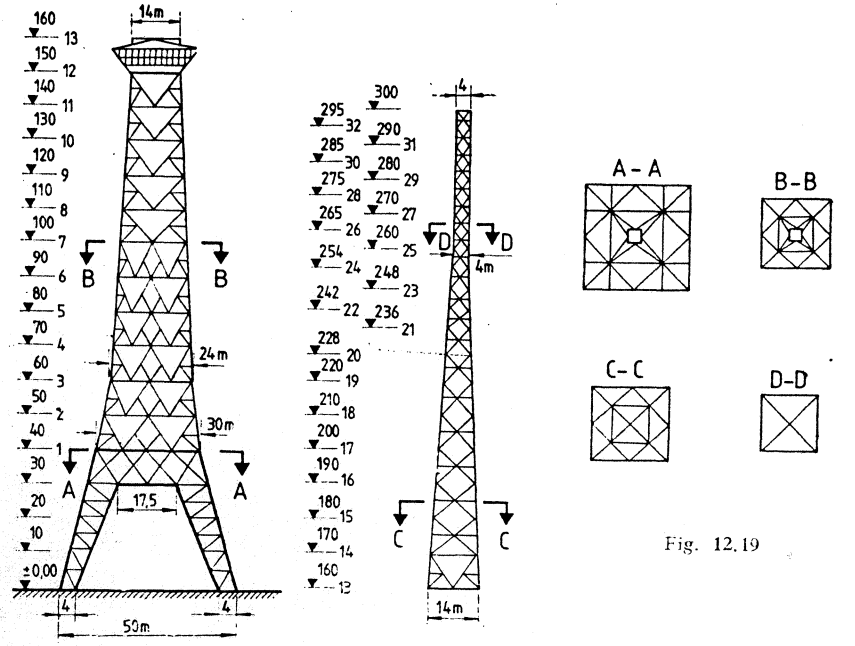


Fig. 12.19

Aplicația 12.8.2. Pentru turnul de televiziune din figura 12.19 se vor determina caracteristicile dinamice proprii. Structura de rezistență este simetrică, iar rigla cadrului, de la partea inferioară, s-a presupus rigidă. Din punct de vedere dinamic sistemul are 32GLD. Tabelul 12.6 cuprinde încărcările gravitaționale, precum și cotele la care s-au considerat concentrate.

TABELUL 12.6

k	Cota (m)	Q_k (tf)	k	Cota (m)	Q_k (tf)	k	Cota (m)	Q_k (tf)	k	Cota (m)	Q_k (tf)
32	295	5,41	24	254	1,57	16	190	10,70	8	110	35,40
31	290	0,73	23	248	2,33	15	180	11,60	7	100	40,00
30	285	0,73	22	242	2,46	14	170	13,90	6	90	44,70
29	280	0,73	21	236	2,72	13	160	16,70	5	80	47,70
28	275	0,87	20	228	4,57	12	150	124,00	4	70	52,30
27	270	0,99	19	220	5,08	11	140	26,80	3	60	56,90
26	265	1,19	18	210	5,62	10	130	28,00	2	50	61,80
25	260	1,32	17	200	7,92	9	120	31,70	1	40	181,50

Calculul caracteristicilor proprii de vibrație s-a efectuat prin metoda matriceală iterativă (v. cap. 6), după ce în prealabil s-a determinat matricea de flexibilitate. Valorile proprii și ordonatele vectorilor proprii, pentru primele șase moduri de vibrație sînt sintetizate în tabelul 12.7.

TABELUL 12.7

k	Modul de vibrație					
	1	2	3	4	5	6
32	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000	1,000 000
31	0,913 449	0,791 321	0,434 428	−0,215 856	−0,639 965	−1,454 225
30	0,829 409	0,591 692	−0,089 650	−1,281 892	−2,027 679	−3,377 085
29	0,750 794	0,410 762	−0,531 821	−2,057 001	−2,936 364	−4,297 031
28	0,680 630	0,258 870	−0,849 721	−2,440 821	−3,191 197	−3,984 124
27	0,619 215	0,136 525	−1,047 837	−2,463 223	−2,916 938	−2,894 755
26	0,564 510	0.036 567	−1,160 563	−2,268 202	−2,358 768	−1,448 016
25	0,515 575	−0,044 762	−1,207 272	−1,936 652	−1,668 115	−0,101 607
24	0,471 691	−0,110 131	−1,203 092	−1,534 910	−0,954 837	0,992 968
23	0,424 743	−0,171 123	−1,149 416	−1,024 368	−0,169 864	1,859 983
22	0,383 517	−0,215 510	−1,060 178	−0,544 580	0,427 122	2,107 179
21	0,348 036	−0,243 849	−0,937 699	−0,133 416	0,856 548	2,021 541
20	0,316 402	−0,262 204	−0,807 059	0,195 520	1,081 916	1,569 902
19	0,278 349	−0,276 758	−0,629 412	0,534 238	1,196 204	0,768 943
18	0,244 770	−0,281 464	−0,460 682	0,727 853	1,113 613	0,051 213
17	0,206 736	−0,279 949	−0,263 290	0,864 331	0,896 064	−0,744 059
16	0,174 430	−0,268 723	−0,098 786	0,832 993	0,559 051	−1,143 311
15	0,146 549	−0,251 572	0,031 871	0,700 971	0,222 327	−1,158 874
14	0,122 370	−0,230 540	0,128 205	0,510 989	−0,058 145	−0,907 166
13	0,101 591	−0,206 907	0,191 706	0,295 893	−0,242 923	−0,492 973
12	0,083 812	−0,181 864	0,224 834	0,084 675	−0,314 848	−0,062 244
11	0,068 292	−0,156 412	0,233 433	−0,103 197	−0,286 904	0,305 298
10	0,055 152	−0,131 567	0,226 426	−0,258 102	−0,201 368	0,554 487
9	0,043 515	−0,108 060	0,209 183	−0,374 524	−0,088 505	0,669 669
8	0,033 515	−0,086 409	0,185 125	−0,449 857	0,031 613	0,649 446
7	0,025 047	−0,067 002	0,157 869	−0,486 011	0,143 102	0,509 972
6	0,018 062	−0,050 192	0,129 127	−0,488 525	0,235 744	0,318 852
5	0,012 448	−0,036 081	0,101 725	−0,465 849	0,301 853	0,083 419
4	0,008 114	−0,024 779	0,077 507	−0,426 198	0,341 828	−0,137 089
3	0,004 951	−0 016 265	0,057 633	−0,380 647	0,358 649	−0,319 774
2	0,002 849	−0,010 437	0,043 061	−0,339 091	0,362 412	−0,445 250
1	0,001 663	−0.007 077	0,024 204	−0,308 923	0,356 584	−0,512 442
T_k(s)	2,1582	1,1524	0,5411	0,2817	0,2124	0,1410

Aplicația 12.8.3. Se consideră castelul de apă de beton armat cu capacitatea de 1 000 m³ și ale cărui principale dimensiuni geometrice sînt date în figura 12.20. Rezervorul castelului este executat din beton B 400 și oțel PC 52, iar turnul, avînd secțiunea inelară constantă, din beton B 250 și oțel OB 38.

Se cere să se determine pe baza modelului admis în § 12.3 perioada fundamentală de vibrație în două ipoteze și anume, cînd rezervorul este gol și cînd rezervorul este plin cu lichid.

Date preliminare. Caracteristicile geometrice ale secțiunii transversale a turnului rezultă:

— aria

$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 5{,}652 \text{ m}^2,$$

— momentul de inerție

$$I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4) = 25{,}5 \text{ m}^4,$$

— modulul de rezistență

$$W = \frac{I}{D/2} = 8{,}095 \text{ m}^3.$$

Modulul de elasticitate longitudinală al betonului din turn s-a considerat egal cu

$$E = 2{,}9 \cdot 10^5 \text{ kgf/cm}^2.$$

Încărcările gravitaționale care intervin în calcul sînt:

— greutatea cuvei rezervorului (inclusiv izolația)

$$Q_c = 526 \text{ tf},$$

— greutatea tubului (inclusiv izolația)

$$q_t = 14{,}7 \text{ tf/m}, \quad Q_t = q_t H = 588 \text{ tf},$$

— greutatea lichidului din rezervor (1 000 m³)

$$Q_l = 1\,000 \text{ tf}.$$

În figura 12.20 sînt reprezentate aceste greutăți, precum și pozițiile centrelor de greutate respective pentru Q_c și Q_l.

Ipoteza 1 — rezervor gol (fig. 12.20, *b*). Prin reducerea structurii castelului la un sistem oscilant cu un singur grad de libertate, valoarea sarcinii echivalente se determină cu relația

$$Q_{e,1} = \varepsilon_c Q_c + \varepsilon_t Q_t.$$

Pentru coeficienții de echivalență, corespunzători încărcărilor provenite din greutățile cuvei și turnului, s-au admis următoarele valori:

$$\varepsilon_c = 0{,}90, \quad \varepsilon_t = 0{,}24.$$

Rezultă deci încărcarea echivalentă

$$Q_{e,1} = 614{,}5 \text{ tf}.$$

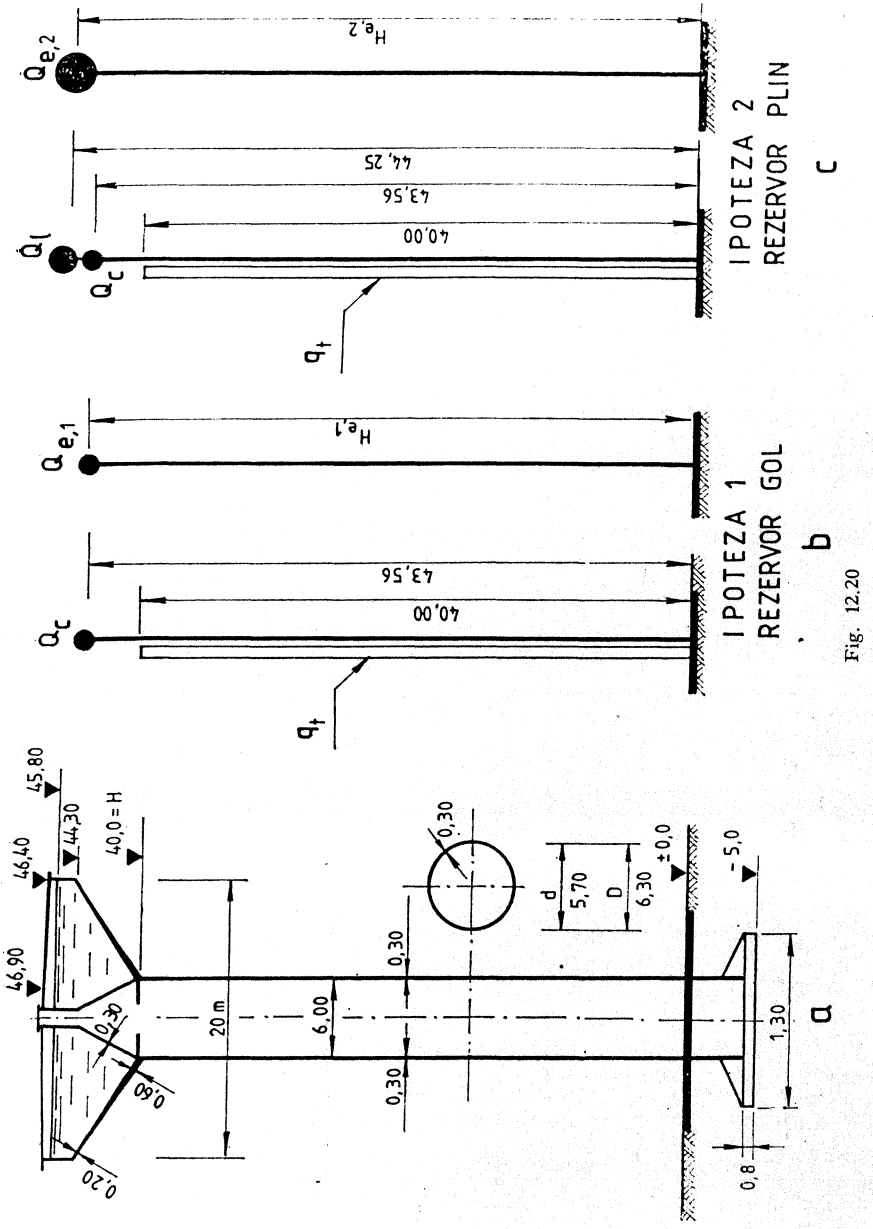


Fig. 12.20

Aplicînd principiul conservării energiei între sistemul dat și sistemul echivalent a rezultat poziția încărcării echivalente

$$H_{e,1} = 43{,}37 \text{ m}.$$

Săgeata statică, produsă de acțiunea forței $Q_{e,1}$ aplicată pe direcția de oscilație, se determină cu formula (12.49)

$$x_{ST,1} = \frac{Q_{e,1} H_{e,1}^3}{3EI} = 22{,}6 \text{ cm},$$

iar perioada proprie de oscilație cu relația (12.47)

$$T_1 = 0{,}2\sqrt{x_{ST,1}} = 0{,}95 \text{ s}.$$

Ipoteza 2 — rezervor plin (fig. 12.20, *c*). Calculul se va face în mod analog situației precedente. Astfel încărcarea echivalentă se obține cu expresia

$$Q_{e,2} = \varepsilon_c Q_c + \varepsilon_t Q_t + \varepsilon_l Q_l = 1365 \text{ tf},$$

unde s-au considerat următoarele valori pentru coeficienții de echivalență [98]:

$$\varepsilon_c = 0{,}90, \quad \varepsilon_t = 0{,}24, \quad \varepsilon_l = 0{,}75.$$

Poziția încărcării echivalente a rezultat

$$H_{e,2} = 44{,}05 \text{ m}.$$

În consecință, se obțin direct următoarele mărimi specifice:

$$x_{ST,2} = \frac{Q_{e,2} H_{e,2}^3}{3EI} = 52{,}6 \text{ cm},$$

$$T_2 = 0{,}2\sqrt{x_{ST,2}} = 1{,}45 \text{ s}.$$

Față de prima ipoteză (rezervor gol), în cea de-a doua ipoteză (rezervor plin) se constată o flexibilizare statică de 132% și o flexibilizare dinamică de 52,6%. Acest fapt pune în evidență sensibilitatea seismică ridicată a castelelor de apă în situațiile în care sînt pline cu lichid în timpul cutremurelor.

Ca și în aplicația precedentă, cunoscînd caracteristicile dinamice proprii ale structurilor analizate, se pot determina forțele seismice de calcul prin una din metodele expuse în capitolul 8.

Dacă rezervorul castelului este de mare capacitate, iar masa proprie a turnului devine semnificativă, se poate admite un model dinamic cu mai multe grade de libertate rezultat prin discretizarea masei acestuia. În asemenea situații se poate aplica metoda superpoziției modale care permite evaluarea răspunsului seismic maxim mediu sau metoda integrării directe ținînd seama și de oscilațiile lichidului din cuvă.

ANEXE

ANEXA I

EVALUAREA ÎNCĂRCĂRILOR SEISMICE ÎN CONFORMITATE CU NORMATIVUL ROMÂNESC P.100-81

Bazele teoretice generale cu privire la normarea forțelor seismice, precum și semnificația notațiilor particulare specifice normativului românesc P.100-81, au fost expuse în § 8.2.2 și § 9.6.2.

Normativul permite determinarea *forțelor seismice de nivel* modale maxime (FSN) atît direct (8.75), cît și indirect prin intermediul *forței tăietoare de bază* modale maxime (FTB), în urma unei operații de distribuție (8.77), (8.81).

● *Evaluarea directă a FSN* are la bază relațiile (8.67), (8.68), (8.75), (9.2) și (9.4). Pentru modul propriu i de vibrație, în notațiile utilizate în această lucrare, rezultă expresia FSN:

$$F_{k,i} = c_{k,i} Q_k, \tag{I.1}$$

unde

$$c_{k,i} = c_0 \cdot C(T_i) \cdot c_R \cdot A_{k,i}, \tag{I.2}$$

iar dacă se folosesc simbolurile specifice normativului, a căror corespondență este menționată în § 9.6.2, se obține

$$S_{k,i} = c_{k,i} G_k \tag{I.3}$$

și

$$c_{k,i} = K_s \cdot \beta_i \cdot \psi \cdot \gamma_{ik,i}. \tag{I.4}$$

● *Evaluarea indirectă a FSN prin intermediul FTB.* Prin combinarea relațiilor (8.68), (8.77), (8.81), (9.7) și (9.8) se determină FTB corespunzătoare modului propriu i de vibrație astfel:

$$F_i = c_i Q, \quad Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k, \tag{I.5}$$

în care

$$c_i = c_0 \cdot C(T_i) \cdot c_R \cdot \varepsilon_i. \tag{I.6}$$

Dacă se utilizează notațiile corespondente din normativ, rezultă

$$S_i = c_i G, \quad G = \sum_{k=1}^{n} G_k, \tag{I.7}$$

și

$$c_i = K_s \cdot \xi_i \cdot \psi \cdot \varepsilon_i. \tag{I.8}$$

Toți coeficienții din formulele (I.4) și (I.8) au fost definiți în capitolele 8 și 9.

În conceptul normativului românesc, gradul de seismicitate este identic cu gradul de protecție antiseismică și se stabilește în funcție de harta de macrozonare seismică a teritoriului (fig. 7.38). În acest sens, *coeficienții de intensitate seismică* K_s au valorile: 0,07 (grad 6), 0,12 (grad 7), 0,20 (grad 8) și 0,32 (grad 9).

Coeficienții dinamici modali β_i se determină cu relația

$$\beta_i = 3/T_i, \quad 0{,}75 \leqslant \beta_i \leqslant 2, \tag{I.9}$$

cu specificația că, respectînd condițiile (I.9), acești coeficienți se reduc cu 20% în cazul terenurilor compacte și consistente și se majorează cu 30% în cazul terenurilor necoezive și în stare afînată (cu restricția $\beta_i \leqslant 2{,}5$).

Valorile *coeficienților de reducere* ψ sînt cuprinse în tabelul I.1, iar *coeficienții de echivalență* ε_i se calculează cu formula (8.95).

FSN se obțin prin distribuția FTB aplicînd expresia (8.81) sub forma

$$S_{k,i} = d_{k,i} S_i, \tag{I.10}$$

unde $d_{k,i}$ reprezintă coeficientul de distribuție a forțelor seismice și se determină cu relația (8.82).

În privința deplasărilor relative de nivel maxime (cu caracter postelastic), normativul românesc prevede următoarele condiții:

$$\Delta_{max} \leqslant \left(\frac{1}{200} \cdots \frac{1}{150}\right) h_{etaj}.$$

TABELUL I.1

Nr.	Tipul de construcție și sistemul constructiv	ψ
1	Clădiri cu structura *rigidă* (pereți portanți de zidărie sau diafragme de B/A, monolit sau prefabricat) sau *semirigidă* (diafragme conlucrînd cu cadre): — pînă la parter + 4 etaje (≤ 5 niveluri) și cu înălțime totală pînă la 15 m — peste parter și 4 etaje (> 5 niveluri) sau înălțimea totală peste 15 m	 0,30 0,25
2	Clădiri etajate în *cadre*: — cu o singură deschidere — cu mai multe deschideri	 0,25 0,20
3	Hale industriale cu *un singur nivel* și alte clădiri — cu o singură deschidere — cu mai multe deschideri	 0,20 0,15
4	Silozuri, inclusiv cele cu celule rezemate pe stîlpi și alte construcții speciale cu structură rigidă	0,25
5	Construcții înalte, foarte flexibile, de tipul coșurilor de fum, turnurilor independente etc.	0,35
6	Castele de apă	0,35

Dacă se admite în mod aproximativ pentru forma proprie fundamentală o variație liniară (v. fig. 10.8, *c*), coeficienții care intervin în relațiile (I.4), (I.6) și (I.9) vor avea următoarele expresii simplificate:

$$\tau_{ik,i} = A_{k,i} = A_i \Phi_{k,i} = \frac{P_i^*}{M_i^*} \Phi_{k,i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} Q_k h_k}{\sum_{k=1}^{n} Q_k h_k^2} h_k$$

$$\varepsilon_i = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} Q_k h_k\right)^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} Q_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} Q_k h_k^2\right)}, \quad d_{k,i} = \frac{Q_k h_k}{\sum_{k=1}^{n} Q_k h_k}.$$

În aceste condiții, perioada proprie fundamentală de vibrație poate fi estimată cu formulele directe conținute în tabelul 10.2.

ANEXA II

ANALIZA SEISMICĂ A UNEI STRUCTURI ÎN CADRE ETAJATE

Aplicarea practică a unor aspecte teoretice expuse în partea a II-a a acestei lucrări face obiectul unui exemplu numeric, care constă în analiza dinamică completă a unei structuri etajate plane cu 15 niveluri (în cadre de beton armat), situată într-o zonă caracterizată prin gradul 8 de intensitate seismică. Principalele caracteristici geometrice și elastice structurale sînt cuprinse în tabelul II.1 și figura II.1 În acest sens, se prezintă principalele etape de operare care permit evaluarea încărcărilor seismice de calcul, ținînd seama de contribuția primelor trei moduri de vibrație.

Caracteristicile elastice și dinamice proprii ale structurii au fost determinate prin aplicarea noțiunilor teoretice expuse în cap. 10. Valorile numerice ale acestora vor fi exprimate prin intermediul următoarelor mărimi de referință:

$Q_0 = 80\,000$ kgf (78 500 daN);

$m_0 = Q_0/g = 81{,}55$ kgf s²/cm (80 kg);

$I_0 = 12{,}51$ dm⁴ $= 12{,}51 \cdot 10^4$ cm⁴;

$l_0 = 2{,}8$ m $= 280$ cm;

$E = 3{,}15 \cdot 10^5$ kgf/cm² ($3{,}1 \cdot 10^5$ daN/cm²);

$R_0 = EI_0/l_0^3 = 1\,795$ kgf/cm (1 750 daN/cm);

$\sqrt{m_0/R_0} = 0{,}2125$ s.

TABELUL II.1

		Secțiuni (cm)	I (dm⁴)	$k = \frac{I}{I_0}$	l (m)	$\lambda = \frac{l}{l_0}$	$\rho = \frac{k}{\lambda}$
Rigle	Centrale	30 × 55	41,6	3,325	2,10	0,75	4,43
	Marginale	30 × 55	41,6	3,325	5,60	2	1,66
Stîlpi centrali	Etaje	35 × 35	12,51	1	2,80	1	1
		35 × 45	26,58	2,125	2,80	1	2,13
		40 × 55	55,46	4,433	2,80	1	4,43
		50 × 65	114,43	9,147	2,80	1	9,15
	Parter	50 × 65	114,43	9,147	4,20	1,5	6,10
Stîlpi marginali	Etaje	35 × 35	12,51	1	2,80	1	1
		35 × 40	18,66	1,492	2,80	1	1,49
		35 × 50	36,46	2,914	2,80	1	2,91
		35 × 60	63,00	5,036	2,80	1	5,04
	Parter	35 × 60	63,00	5,036	4,20	1,5	3,37

Rezultantele încărcărilor gravitaționale, concentrate la nivelul fiecărui planșeu (permanente și utile), sînt date direct în tabelul II.1 și în figura II.1.

Rigiditatea relativă de referință (convențională), notată prin R_0, diferă de expresia (10.5) prin coeficientul numeric 12, care a fost inclus în expresia coeficientului de rigiditate relativă de nivel η_i (10.6), (10.10).

Exprimarea valorilor numerice s-a făcut în sistemul tradițional de unități (MKfS) deoarece transformarea în unitățile sistemului internațional (SI) are la bază, în mod aproximativ, relația 1 tf $\approx$ 10 kN.

II.1. CALCULUL RIGIDITĂȚILOR RELATIVE DE NIVEL

Rigiditățile relative de nivel au fost determinate prin intermediul relațiilor conținute la punctul 4 din tabelul 10.1, folosindu-se în acest sens notațiile din capitolul 10.

Ordinea în care se conduc operațiile numerice se prezintă sistematizat în continuare.

● *Coeficienții adimensionali*

$$k_{jk} = I_{jk}/I_0 \quad \text{și} \quad \lambda_{jk} = l_{jk}/l_0 \tag{II.1}$$

sînt calculați în tabelul II.1 și direct pe schema structurii, așa cum este arătat în figura II.2.

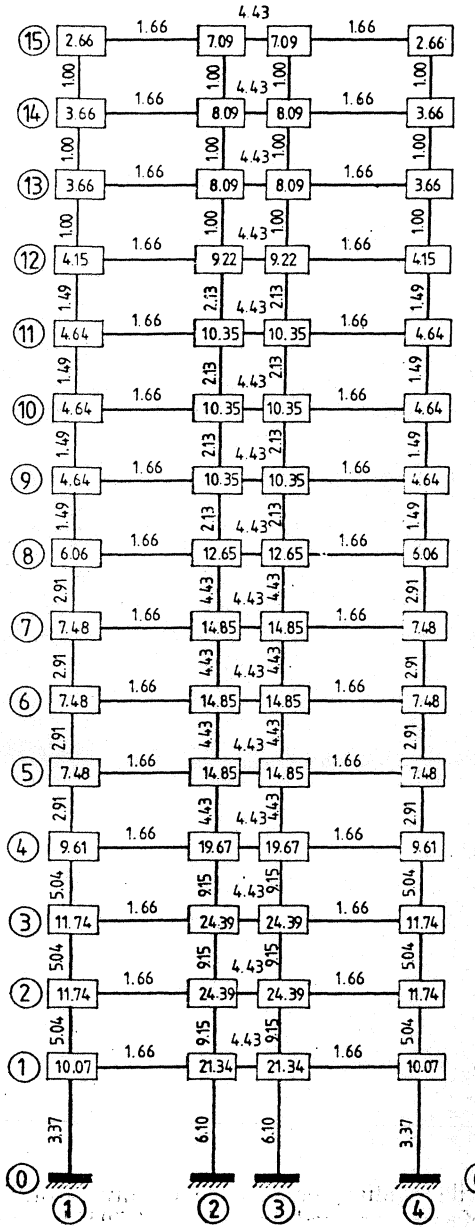


Fig. II.3

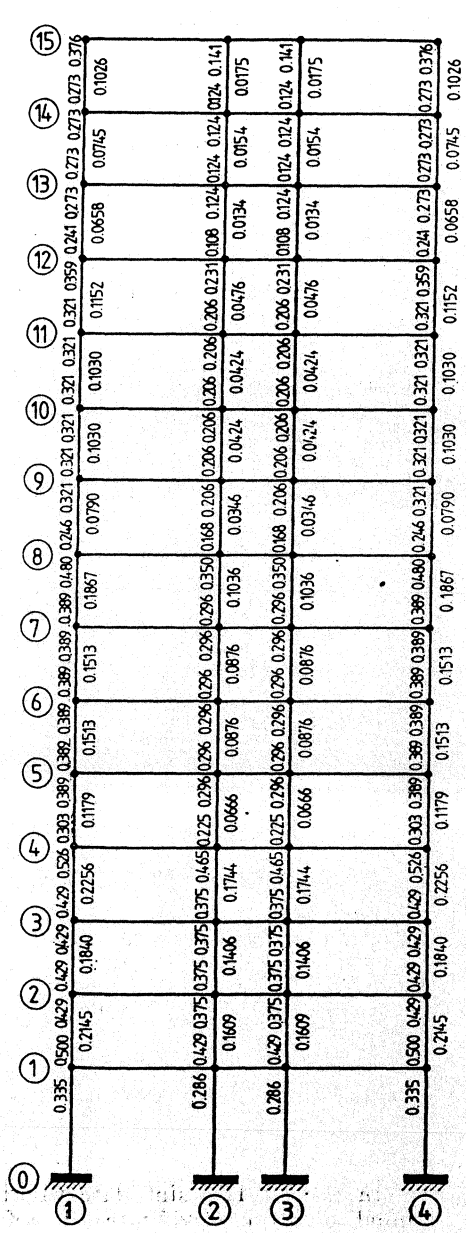


Fig. II.4

TABELUL II. 2

Nivel k	Q_k tf (10 kN)	$\alpha_k = Q_k/Q_0$	η_k	$R_k = \eta_k R_0$ tf/cm (10 kN/cm)	$u_k = \frac{1}{\eta_k}$	$u_k^* = \sum_{i=1}^{k} u_i$	$\alpha_k u_k^*$
1	100	1,25	78,027	140,07	0,012816	0,012816	0,016020
2	80	1,00	169,824	304,85	0,005888	0,018704	0,018704
3	80	1,00	179,040	321,39	0,005585	0,024289	0,024289
4	80	1,00	164,760	295,76	0,006069	0,030358	0,030358
5	80	1,00	109,848	197,19	0,009105	0,039463	0,039463
6	80	1 00	103,104	185,08	0,009699	0,049162	0,049162
7	80	1,00	103,104	185,08	0,009699	0,058861	0,058861
8	80	1,00	97,176	174,44	0,010291	0,069152	0,069152
9	80	1,00	60,792	109,13	0,016449	0,085601	0,085601
10	80	1,00	58,272	104,60	0,017161	0, 102762	0, 102762
11	80	1,00	58,272	104,60	0,017161	0, 119923	0, 119923
12	80	1,00	56,808	101,98	0,017603	0, 137526	0, 137526
13	80	1,00	36,000	64,62	0,027778	0, 165304	0, 165304
14	80	1,00	35,328	63,42	0,028306	0, 193610	0, 193610
15	60	0,75	33,696	60,49	0,029675	0,223285	0, 167465
Σ	1200	15	—	—	—	—	1,278200

II.2. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR PROPRII DE VIBRAȚIE

● *Calculul direct al perioadelor proprii de vibrație* s-a făcut cu ajutorul formulelor stabilite în § 10.2.3.

Perioada fundamentală rezultă prin aplicarea formulei (10.33), adică

$$T_1 = \psi_1 \sqrt{\frac{m_0}{R_0}}, \qquad \text{(II.10)}$$

unde

$$\psi_1 = 5{,}45 \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k u_k^* \right]^{\frac{1}{2}} \quad (n \geqslant 3), \qquad \text{(II.11)}$$

iar perioadele de ordin superior se aproximează cu formula (10.38)

$$T_i = \frac{T_1}{1{,}3i}; \qquad (i = 2{,}3 \ldots n). \qquad \text{(II.12)}$$

Toate notațiile care intervin mai sus au fost explicate în capitolul 10. Coeficienții de masă $\alpha_k = m_k/m_0 = Q_k/Q_0$ și coeficienții de flexibilitate de nivel $u_k = 1/\gamma_{ik}$ sînt calculați în tabelul II.2.

În baza datelor inițiale și a celor din tabelul II.2

$$\sqrt{m_0/R_0} = 0{,}2125\text{s}, \quad \sum_{k=1}^{15} \alpha_k u_k^* = 1{,}2782,$$

s-au obținut următoarele valori ale primelor trei perioade proprii de vibrație

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 1{,}312 \text{ s},\\ T_2 &= 0{,}505 \text{ s},\\ T_3 &= 0{,}336 \text{ s}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.13)}$$

● *Calculul exact al perioadelor proprii de vibrație* a fost efectuat prin analiză numerică automată, utilizînd metoda matriceală iterativă standard, specifică determinării valorilor și vectorilor proprii (v. § 6.5). Pentru cele trei moduri proprii de vibrație au rezultat

$$\begin{aligned} T_1 &= 1{,}309 \text{ s}, & \omega_1 &= 4{,}799 \text{ rad/s},\\ T_2 &= 0{,}522 \text{ s}, & \omega_2 &= 12{,}036 \text{ rad/s},\\ T_3 &= 0{,}325 \text{ s}, & \omega_3 &= 19{,}333 \text{ rad/s}, \end{aligned} \qquad \text{(II.14)}$$

ceea ce confirmă valabilitatea practică a rezultatelor obținute prin metoda directă propusă în § 10.2.3.

● *Formele proprii de vibrație* $\Phi_{k,i}$ au rezultat direct pe baza programului elaborat pentru calculatorul electronic. În consecință, vectorii proprii care sînt dați în tabelul II.3 reprezintă mărimile exacte care satisfac proprietatea de ortogonalitate

$$\sum_{k=1}^{n} Q_k \Phi_{k,i} \Phi_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi_{k,i} \Phi_{k,j} = 0 \qquad (i \neq j). \qquad \text{(II.15)}$$

II.3. DETERMINAREA ÎNCĂRCĂRILOR SEISMICE ORIZONTALE

Forțele seismice, a căror acțiune este static echivalentă, s-au determinat în conformitate cu normativul românesc P.100-81. Forța tăietoare de bază, corespunzătoare modului i de vibrație, se calculează cu relația (9.7).

$$F_i = c_i Q \quad \left(Q = \sum_{k=1}^{n} Q_k\right), \qquad \text{(II.16)}$$

unde coeficientul seismic total c_i are expresia (anexa I)

$$c_i = K_s \beta_i \psi \varepsilon_i. \qquad \text{(II.17)}$$

Semnificația fiecărui parametru care intervine în (II.17) a fost definită în § 9.6.2.

Întrucît structura este în cadre de B/A și se află amplasată într-o zonă cu seismicitatea de gradul 8, *coeficientul de reducere* al răspunsului are valoarea $\psi = 0{,}20$, iar *coeficientul de intensitate seismică* $K_s = 0{,}20$ (v. anexa I).

TABELUL II.3

Nivel k	α_k	Modul 1 de vibrație				Modul 2 de vibrație				Modul 3 de vibrație			
		$\Phi_{k,1}$	$\Phi^2_{k,1}$	$\alpha_k \Phi_{k,1}$	$\alpha_k \Phi^2_{k,1}$	$\Phi_{k,2}$	$\Phi^2_{k,2}$	$\alpha_k \Phi_{k,2}$	$\alpha_k \Phi^2_{k,2}$	$\Phi_{k,3}$	$\Phi^2_{k,3}$	$\alpha_k \Phi_{k,3}$	$\alpha_k \Phi^2_{k,3}$
15	0,75	1,000	1,000	0,750	0,750	1,000	1,000	0,750	0,750	1,000	1,000	0,750	0,750
14	1,00	0,977	0,954	0,977	0,954	0,854	0,729	0,854	0,729	0,624	0,389	0,624	0,389
13	1,00	0,925	0,856	0,925	0,856	0,557	0,310	0,557	0,310	−0,033	0,001	−0,033	0,001
12	1,00	0,848	0,719	0,848	0,719	0,164	0,027	0,164	0,027	−0,662	0,438	−0,662	0,438
11	1,00	0,784	0,615	0,784	0,615	−0,104	0,011	−0,104	0,011	−0,864	0,746	−0,864	0,746
10	1,00	0,707	0,500	0,707	0,500	−0,354	0,125	−0,354	0,125	−0,812	0,659	−0,812	0,659
9	1,00	0,617	0,381	0,617	0,381	−0,564	0,318	−0,564	0,318	−0,523	0,273	−0,523	0,273
8	1,00	0,520	0,271	0,520	0,271	−0,704	0,496	−0,704	0,496	−0,102	0,010	−0,102	0,010
7	1,00	0,454	0,206	0,454	0,206	−0,745	0,554	−0,745	0,554	0,179	0,032	0,179	0,032
6	1,00	0,387	0,150	0,387	0,150	−0,735	0,540	−0,735	0,540	0,415	0,172	0,415	0,172
5	1,00	0,316	0,100	0,316	0,100	−0,679	0,461	−0,679	0,461	0,582	0,339	0,582	0,339
4	1,00	0,247	0,061	0,247	0,061	−0,587	0,345	−0,587	0,345	0,651	0,424	0,651	0,424
3	1,00	0,199	0,040	0,199	0,040	−0,502	0,252	−0,502	0,252	0,630	0,397	0,630	0,397
2	1,00	0,154	0,024	0,154	0,024	−0,405	0,164	−0,405	0,164	0,550	0,302	0,550	0,302
1	1,25	0,105	0,011	0,131	0,014	−0,287	0,082	−0,359	0,102	0,412	0,174	0,515	0,212
Σ	15,00	—	—	8,016	5,641	—	—	−3,413	5,148	—	—	1,900	5,144

Prin introducerea valorilor proprii (II.14) în relația

$$\beta_i = \frac{3}{T_i}, \qquad 0{,}75 \leqslant \beta_i \leqslant 2, \tag{II.18}$$

se obțin valorile *coeficienților dinamici modali* $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 2$, întrucît $T_i < 1{,}5$ s $(i = 1, 2, 3)$.

În aceste condiții expresia de calcul a *coeficientului seismic total* (II.17) va avea forma particulară

$$c_i = 0{,}08\ \varepsilon_i \tag{II.19}$$

Coeficienții de echivalență se determină cu relația (8.95) transformată astfel

$$\varepsilon_i = \frac{(P_i^*)^2}{mM_i^*} = \frac{(\bar{P}_i^*)^2}{\alpha \bar{M}_i^*} = \frac{\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi_{k,i}\right]^2}{\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right]\left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi_{k,i}^2\right]}. \tag{II.20}$$

în care intervin expresiile adimensionale ale factorului de participare modal P_i^*, masei generalizate modale M_i^* (8.68) și masei efective totale m (8.94)

$$\left.\begin{aligned} P_i^* &= \sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,i} = m_0 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi_{k,i} = m_0 \bar{P}_i^*, \\ M_i^* &= \sum_{k=1}^{n} m_k \Phi_{k,i}^2 = m_0 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi_{k,i} = m_0 \bar{M}_i^*, \\ m &= \sum_{k=1}^{n} m_k = m_0 \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = m_0 \alpha, \end{aligned}\right\} \tag{II.21}$$

deoarece $m_k = \alpha_k m_0$ sau $Q_k = \alpha_k Q_0$.

Prin utilizarea datelor numerice cuprinse în tabelul II.3, se obțin valorile coeficienților ε_i și c_i, precum și ale forțelor tăietoare de bază F_i (v. tab. II.4).

Forțele seismice de nivel modale rezultă în urma operației de distribuție a *forțelor tăietoare de bază modale* prin intermediul relației (8.81).

$$F_{k,i} = d_{k,i} F_i = \frac{\alpha_k \Phi_{k,i}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Phi_{k,i}}. \tag{II.22}$$

TABELUL II.4

MOD i	$\bar{P}_i^*$	$\bar{M}_i^*$	ε_i	c_i	F_i (tf)	A_i	SA_i (cm/s²)	SD_i (cm)	$x_{k,i} = A_i \Phi_{k,i}$ (cm)
1	8,016	5,641	0,759	0,061	73,2	1,421	78,95	3,428	4,871 $\Phi_{k,1}$
2	−3,413	5,148	0,150	0,012	14,4	−0,663	78,48	0,542	−0,359 $\Phi_{k,2}$
3	1,900	5,144	0,047	0,004	4,8	0,370	83,49	0,223	0,083 $\Phi_{k,3}$

TABELUL II.5

Nivel k	Modul 1 de vibrație			Modul 2 de vibrație				Modul 3 de vibrație				Valori de calcul			
	$d_{k,1}$	$F_{k,1}$ (tf)	$\mathcal{S}_{k,1}$ (tf)	$x_{k,1}$ (cm)	$d_{k,2}$	$F_{k,2}$ (tf)	$\mathcal{S}_{k,2}$ (tf)	$x_{k,2}$ (cm)	$d_{k,3}$	$F_{k,3}$ (tf)	$\mathcal{S}_{k,3}$ (tf)	$x_{k,3}$ (cm)	$\mathcal{S}_{k(I)}$ (tf)	$\mathcal{S}_{k(II)}$ (tf)	$x_{k(I)}$ (cm)	$x_{k(II)}$ (cm)
15	0,094	6,880	6,880	4,871	−0,220	−3,170	−3,170	−0,359	0,395	1,895	1,895	0,083	7,81	7,67	4,885	4,925
14	0,122	8,930	15,810	4,757	−0,250	−3,600	−6,770	−0,307	0,328	1,575	3,470	0,052	17,55	17,50	4,767	4,803
13	0,115	8,420	24,230	4,508	−0,163	−2,345	−9,115	−0,200	−0,017	−0,080	3,390	−0,003	26,11	26,50	4,512	4,538
12	0,106	7,760	31,990	4,113	−0,048	−0,690	−9,805	−0,059	−0,348	−1,670	1,720	−0,055	33,50	34,44	4,134	4,142
11	0,098	7,175	39,165	3,819	0,030	0,430	−9,375	0,037	−0,454	−2,180	−0,460	−0,072	40,27	41,51	3,820	3,825
10	0,088	6,440	45,605	3,445	0,104	1,500	−7,875	0,127	−0,427	−2,050	−2,510	−0,068	46,34	45,57	3,448	3,464
9	0,077	5,635	51,240	3,008	0,165	2,375	−5,500	0,202	−0,275	−1,320	−3,830	−0,044	51,68	52,62	3,015	3,038
8	0,065	4,760	56,000	2,539	0,206	2,965	−2,535	0,252	−0,053	−0,255	−4,085	−0,009	56,21	56,63	2,551	2,577
7	0,057	4,170	60,170	2,218	0,218	3,140	0,605	0,267	0,094	0,450	−3,635	0,015	60,28	60,32	2,234	2,258
6	0,048	3,515	63,685	1,893	0,215	3,095	3,700	0,264	0,218	1,045	−2,590	0,034	63,84	64,61	1,912	1,933
5	0,039	2,855	66,540	1,549	0,199	2,865	6,565	0,244	0,306	1,470	−1,120	0,048	66,87	68,18	1,569	1,586
4	0,031	2,270	68,810	1,211	0,172	2,475	9,040	0,210	0,342	1,640	0,520	0,034	69,40	71,07	1,230	1,243
3	0,025	1,830	70,640	0,980	0,148	2,130	11,170	0,180	0,331	1,590	2,110	0,052	71,54	73,43	0,996	1,007
2	0,019	1,390	72,030	0,759	0,119	1,715	12,885	0,145	0,289	1,390	3,506	0,046	73,26	75,25	0,774	0,781
1	0,016	1,170	73,200	0,523	0,105	1,515	14,400	0,102	0,271	1,300	4,800	0,034	74,76	76,80	0,531	0,538

În tabelul II.5 sînt calculate valorile numerice ale coeficienților de distribuție și ale forțelor tăietoare de nivel a căror variație este reprezentată în figura II.5, *a*.

II.4. DETERMINAREA DEPLASĂRILOR ELASTICE LATERALE

● *Calculul deplasărilor laterale modale prin intermediul rigidităților relative de nivel* se face în baza relației (10.1), adică

$$x_{k,i} = x_{j,i} + \Delta_{k,j}^{(i)}, \tag{II.23}$$

unde deplasarea relativă dintre nivelurile k și j se obține astfel

$$\Delta_{k,j}^{(i)} = \frac{\mathcal{F}_{jk}^{(i)}}{R_{kj}}. \tag{II.24}$$

Calculul deplasărilor laterale modale se face pornind de jos în sus și anume

$$x_{1,i} = \Delta_{1,0}^{(i)} = \frac{\mathcal{F}_{0,1}^{(i)}}{R_{1,0}},$$

$$x_{2,i} = x_{1,i} + \Delta_{2,1}^{(i)}, \quad \left(\Delta_{2,1}^{(i)} = \frac{\mathcal{F}_{1,2}^{(i)}}{R_{2,1}}\right),$$

$$\vdots$$

$$x_{k+1,i} = x_{k,i} + \Delta_{k+1,k}^{(i)}, \quad \left(\Delta_{k+1,k}^{(i)} = \frac{\mathcal{F}_{k,k+1}^{(i)}}{R_{k+1,k}}\right),$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1,i} + \Delta_{n,n-1}^{(i)}, \quad \left(\Delta_{n,n-1}^{(i)} = \frac{\mathcal{F}_{n-1,n}^{(i)}}{R_{n,n-1}}\right)$$

● *Calculul deplasărilor laterale modale prin intermediul formelor proprii de vibrație* se efectuează cu expresia (8.69).

$$x_{k,i} = A_{k,i} SD_i \tag{II.25}$$

Dacă se ține seama de relațiile (8.67) și (II.21) rezultă

$$A_{k,i} = A_i \Phi_{k,i}, \quad A_i = \frac{P_i^*}{M_i^*} = \frac{\bar{P}_i^*}{\bar{M}_i^*}, \tag{II.26}$$

încît expresia (II.24) devine

$$x_{k,i} = \frac{\bar{P}_i^*}{\bar{M}_i^*} SD_i \Phi_{k,i}, \tag{II.27}$$

unde, în conformitate cu (8.69) și (8.98)

$$SD_i = \frac{SA_i}{\omega_i^2}, \quad SA_i = g\frac{c_i}{\epsilon_i},$$

toate operațiile de calcul fiind sistematizate în tabelul II.4.

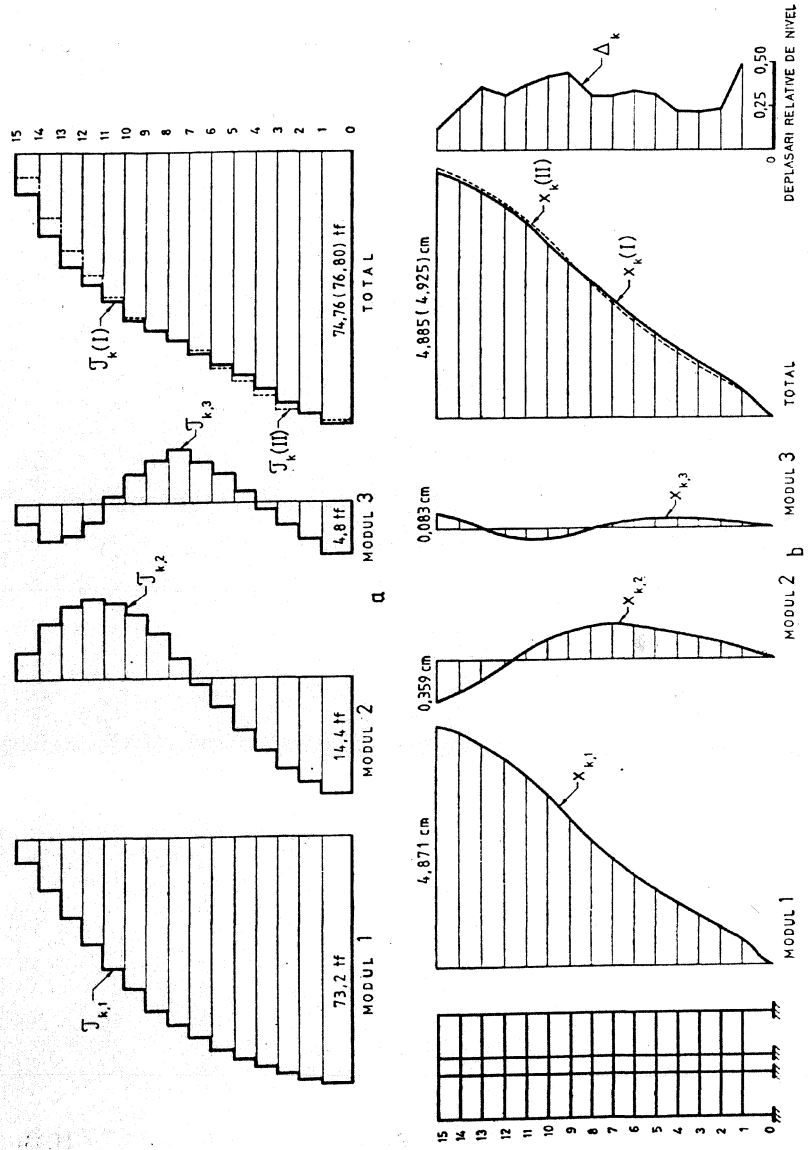


Fig. II.5

Se constată că deplasările modale la ultimul nivel ($k = n$) coincid cu cele determinate anterior ($\Phi_{n,i} = 1$, $i = 1, 2, .., n$). În figura II.5, *b* sînt reprezentate variațiile deplasărilor laterale corespunzătoare celor trei moduri proprii de vibrație.

● *Calculul direct al deplasării laterale maxime*, corespunzătoare modului fundamental, se determină cu formula (9.11) stabilită în § 9.6.2, adică

$$x_{1,\,max} = x_{n,1} = 35\,\frac{c_1}{\varepsilon_1}\,T_1^2 = 4{,}82\ \text{cm},$$

în care s-au introdus mărimile deja calculate. Se constată aproximarea satisfăcătoare rezultată prin aplicarea formulei directe.

II.5. SUPERPOZIȚIA FORȚELOR TĂIETOARE ȘI DEPLASĂRILOR LATERALE MODALE

Superpoziția valorilor modale obținute pentru forțe tăietoare și deplasări laterale se va face utilizînd unele din formulele comentate în capitolul 8.

● *Superpoziția forțelor tăietoare* s-a obținut aplicînd următoarele două variante de calcul

$$T_k(\mathrm{I}) = \left[\sum_{i=1}^{3} (T_{k,i}^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad i = (1,\ 2,\ 3) \tag{II.28}$$

$$T_k(\mathrm{II}) = T_{k,1} + 0{,}25\ |T_{k,2}|. \tag{II.29}$$

● *Superpoziția deplasărilor laterale* a rezultat tot prin aplicarea celor două variante de mai sus

$$x_k(\mathrm{I}) = \left[\sum_{i=1}^{3} (x_{k,i}^2)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{II.30}$$

$$x_k(\mathrm{II}) = x_{k,1} + 0{,}15\ |x_{k,2}|. \tag{II.31}$$

Valorile totale obținute pentru forțele tăietoare și deplasările laterale sînt date în tabelul II.5 și reprezentate grafic în figura II.5.

II.6. UNELE OBSERVAȚII ȘI CONCLUZII

● Deoarece

$$\sum_{k=1}^{n} d_{k,i} = 1, \tag{II.32}$$

rezultă

$$\sum_{k=1}^{n} F_{k,i} = \mathfrak{F}_{1,i} = F_i. \tag{II.33}$$

● Ținînd seama de proprietatea coeficienților de echivalență (8.100)

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 1, \qquad (i = 1, 2, \ldots n), \tag{II.34}$$

precum și de faptul că

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0{,}956,$$

se obține

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = 0{,}044 \tag{II.35}$$

Acest rezultat dovedește că influența celorlalte moduri superioare de vibrație asupra răspunsului este practic neglijabilă. Deoarece ε_1 are valoarea cea mai mare, se confirmă că cea mai importantă contribuție o are modul fundamental.

● În privința superpoziției efectuate anterior se constată că deplasările laterale totale sînt foarte apropiate de deplasările laterale maxime corespunzătoare modului fundamental. În schimb, în cazul forțelor tăietoare influența modurilor superioare este pusă în evidență în special în partea superioară a structurii.

● Se consideră că rădăcina sumei pătratelor (varianta I) aproximează cel mai satisfăcător răspunsul total probabil. De asemenea, prin aplicarea variantei II propusă, rezultă valori acceptabile ale răspunsului total. Avantajul acestei variante constă în aceea că nu implică determinarea caracteristicilor modului 3.

● Diagramele de momente încovoietoare se pot determina direct prin una din metodele aproximative expuse în capitolul 12.

BIBLIOGRAFIE

1. Aizenberg, Ia., M. *Construcții cu structură autoadaptabilă la solicitări seismice* (trad. l. rusă), Editura Tehnică, București, 1982.
2. Ambraseys, N., N. *Long-Period Effects in the Romanian Earthquake of March 4, 1977*, Nature, 268/1977.
3. Ambraseys, N., N. and Sarma, S., K. *The Response of Earth Dams to Strong Earthquakes*. Géotechnique, nr. 17, September, London, 1967.
4. Arias, A. *A Measure of Earthquake Intensity, in Seismic Design for Nuclear Power Plants* (R. Hansen editor), Massachusetts Institute of Technology, 1969.
5. Arias, A. y Husid, R. *Fórmula empirica para cálculo del periodo propio de vibration de edificios de hormigón armado con muros de rigide*. Revista del IDIEM, vol. 1, nr. 1, Marzo, Santiago, Chile, 1962.
6. Arias, A., Husid, R. y Baeza, M. *Periódos de vibración de edificios chilenos de hormigón armado*. Primeras Jordanas Chilenas de Sismologia e Ingenieria Antisísmica, Santiago, Chile, 1963.
7. Baeza, M. *Determinacion experimental de periódos de oscilación de edificios de hormigón armado*. Revista del IDIEM, vol. 12, nr. 1, Abril, Santiago, Chile, 1963.
8. Bathe, K. J., Wilson, E. L., *Numerical Methods in Finit Element Analysis*, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1976.
9. Bălan, Șt., Ifrim, M. și Pacoste, C. *Direct Determination Equivalence Coefficients of Masses in the Antiseismic Computation of Structures*. Proc. 3WCEE, Auckland-Wellington, New Zealand, 1965.
10. Bălan, Șt., Ifrim, M. și Pacoste, C. *Dynamic Equivalent of Antiseismic Structures Considering the Deformability of the Foundation Ground*. Proc. of the International Symposium RILEM, Mexico-City, 1966.
11. Bălan, Șt., Ifrim, M. și Pacoste, C. *The Criterion of Dynamic Equivalent in the Design of Antiseismic Structures*. Revue Roumaine de Sciences Techniques Série de Mécanique Appliquée, tome 11, nr. 6, București, 1966.
12. Bălan, Șt., Ifrim, M. și Pacoste, C. *Influența interacțiunii dintre teren și construcție asupra răspunsului seismic*. Buletinul științific ICB, anul XII, nr. 2, București, 1969.
13. Bălan, Șt., Ifrim, M. și Pacoste, C. *Analiza antiscismică a structurilor utilizînd modelele echivalente*. Buletinul științific ICB, anul XIII, nr. 1–2, București, 1971.
14. Bârsan, G. M., *Dinamica și stabilitatea construcțiilor*, E.D.P., București, 1979.
15. Beleș, A. A., *Cutremurul și construcțiile*, București, 1941.
16. Beleș, A. A. și Ifrim, M. *Engineering Aspects of Earthquakes in Romania in the Light of Modern Investigation*. Proc. 2WCEE, Tokyo, Japan, 1960.
17. Beleș, A. A. și Ifrim, M. *Aspecte actuale ale calculului construcțiilor la cutremur*. Revista de Studii și Cercetări de Astronomie și Seismologie, anul VI, nr. 2, București, 1961.
18. Beleș, A. A. și Ifrim, M. *Elemente de seismologie inginerească*. Editura Tehnică, București, 1962.
19. Beleș, A A, Bălan, Șt. și Ifrim, M. *Contributions à l'étude de certaines conditions locales sur la fondation des structures situées dans les zones sismiques*. Séminaire ONU-CEE, Bucarest, 1974.
20. Beleș, A. A., Ifrim, M. și Yagüe García, A. *Elementos de Ingeniería Sísmica*, Ediciones Omega, S. A., Barcelona, 1975.
21. Benioff, H. *The Physical Evaluation of Seismic Destructiveness*. B. SSA, vol. 24 1934.
22. Bertero, V. V. and Kamil, H. *Nonliniar Seismic Design of Multistory Frame*. 2nd CCEE, Hamilton/Ontario/-Canada, June, 1975.
23. Bertero, V. V. *Seismic Behaviour of R/C Wall Structural Sistem*. UCB/EERC, Report No. 80/37, September, 1980.
24. Bertero, V. V. *Seismic Behaviour of Liniar Elements*. State of the Art in Earthquake Engineering, Ankara, October, 1981.
25. Biggs, J. M. *Introduction to Structural Dynamics*. McGraw-Hill Books Company, New York, 1964.
26. Biot, M. A. *A Mechanical Analyser for the Prediction of Earthquakes Stresses*. B.SSA, vol. 31, nr. 2, April, 1941.
27. Biot, M. A. *Analytical and Experimental Methods in Engineering Seismology*. Transaction ASCE, vol. 108, 1943.
28. Blume, J. A., Newmark, N. M. and Corning, J. A. *Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions*. Portland Cement Association, 1961.
29. Blume, J. A. *Dynamic Characteristics of Multistory Buildings*. Journal of the Structural Division, Proc. ASCE, vol. 94, No. ST2, February, 1968.
30. Bolt, B. A. *Causes of Earthquake*. Earthquake Engineering, Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
31. Bolt, B. A. *Duration of Strong Ground Motion*. Proc. 5WCEE, Rome, Italy, 1973.
32. Bolt, B. A. *The Fault Plane Solutions of March 4, 1977 Earthquakes*. Report 1977.
33. Bonjer, K. P. and collab. *The Romanian Earthquake of March 4, 1977 and its Aftershocks*. Newsletter, no. 14, European Geophysical Society, 1979.
34. Borges, J. F. *Principles of Earthquake Resistant Design*. 6 WCEE New Delhi,India, 1977.
35. Brady, A., Rojahn, C., Pérez, V., Carydis, P. C., Sbokos, J. G. *Seismic Engineering Data Raport, Romanian and Greek Records 1972-78*. USGS, Report 78-1022, 1978.
36. Buzdugan, Gh., Fetcu, L. și Radeș, M. *Vibrațiile sistemelor mecanice*. Editura Academiei, 1975.
37. Cardan, B. *Concrete Shear Walls Combined with Rigid Frames in Multistory Buildings Subjected to Lateral Loads*. J. ACI, vol. 58, nr. 3, Sept. 1961.
38. Carmona, J. S. and Cano, J. H. *Periods of Building of Mendoza City, Argentina*, Proc. 4WCEE, Santiago, Chile, 1969.
39. Carvalho Cansado, E. *O seismo da Roménia de março de 1977*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, Lisboa, nr. 1, 1978.
40. Casagrande, A. and Shannon, W. L. *Strength of Soils under Dynamic Loads*. Transactions ASCE, nr. 114, 1949.
41. Chang Tsai-yung and Chen Da-sheng. *General Features of the Tangshan Earthquake*. CO.P.I.S.E.E. Congress on the Earthquake Protection of Constructions in Seismic Areas, Bucharest, 1978.

42. Ciongradi, C. *Contribuții privind interacțiunea dintre schelet și pereții de umplutură la clădiri supuse acțiunilor seismice.* Teză pentru obținerea titlului de doctor-inginer, Iași, 1979.
43. Ciongradi, I. *Contribuții la determinarea răspunsului seismic neliniar al structurilor în cadre.* Teză pentru obținerea titlului de doctor-inginer, Iași, 1971.
44. Cișmigiu, Al. *După 4 martie 1977.* Revista Arhitectura nr. 4, București, 1977.
45. Cișmigiu, Al., Dogaru, L. și Bădescu, L. *Analiza spectrală a seismului „Vrancea 77"*, București 1980.
46. Cloud, W. K. and Perez, V. *Strong Motion Records and Acceleration*, Proc. 4WCEE, Santiago, Chile, 1969.
47. Clough, R. W. *On the Importance of Higher Modes of Vibration in the Earthquake Response of a Tall Building.* B.SSA. vol. 45, 1955.
48. Clough, R. W. *Earthquake Analysis by Response Spectrum Superposition.* B. SSA, vol. 52, nr. 3, 1962.
49. Clough, R. W. and Chopra, A. K. *Earthquake Stress Analysis in Earth Dams.* Proc. of the Structural Engineer, ASCE, New York, 1964.
50. Clough, R. W. *Earthquake Response of Structures.* Earthquake Engineering, Ch. 12, New Jersey, 1970.
51. Clough, R. W. and Penzien, J. *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.
52. Cohn, M. Z. and Ghosh, S. K. *The Flexural Ductility of Reinforced Concrete Sections.* International Association of Bridge and Structural Engineers, vol. 32/2 1972.
53. Como, M. e Giorgio, L. *Elementi di construzioni antisismiche.* Edizioni scientifiche A. Cremonese, Roma, 1979.
54. Cornea, I. și Lăzărescu, V. *România în cadrul structural și seismic al Europei.* Cercetări seismologice asupra cutremurului din 4 martie 1977, București, 1979.
55. Derecho, A. and Fintel, M. *Earthquake — Resistant Structures, Handbook of Concrete Engineering.* Van Nostrand Reinhold Company, New-York, 1974.
56. Dobry, R., Idriss, I. M. and NG, E. *Duration Characteristics of Horizonta. Components of Strong-Motion Earthquake Records.* B. SSA, vol. 68, nr. 5, 1978.
57. Dogaru, L. și Bădescu, A. *Prelucrarea accelerogramelor cutremurului din 4 martie 1977.* COCC, București, 1977.
58. Donovan, D. C. *A Statistical Evaluation of Strong Motion Data Including the Feb. 9, 1971 San Fernando Earthquake.* Proc. 5WCEE, Rome, Italy, 1973.
59. Enescu, D., Crișan, E. și Plaviță, R. *Parametrii geometrici și dinamici ai focarului cutremurului din 4 martie 1977 în comparație cu parametrii altor cutremure vrâncene.* Cercetări seismologice asupra cutremurului din 4 martie 1977, București, 1979.
60. Fintel, M. (editor), *Handbook of Concrete Engineering.* Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1974.
61. Gheorghiu, Al. *Concepții moderne în calculul structurilor.* Editura Tehnică, București, 1975.
62. Grandori, E., Grandori, G. e Petrini, V. *Engineering Decisions and Seismic Risk Prevention.* Proc. of the Seminar IABSE on Constructions in Seismic Zones, Bergamo, Italy, 1978.
63. Grases, G. *El sismo de Caracas de 1967.* Boletin IMME, año VI, nr. 23—24, Universidad Central de Venezuela, Caracas, 1968.
64. Gulkan, P. and Sozen, M. A. *Inelastic Responses of Reinforced Concrete Structures to Earthquake Motions.* ACI Journal, No-71-41, December 1974.
65. Gutenberg, B. and Richter, C. F. *Earthquake Magnitude, Intensity, Energy and Acceleration.* B. SSA, vol. 32, nr. 3, 1942.

66. Gutenberg, B. and Richter, C. F. *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena.* Princeton University Press, 1952.
67. Harris, C. M. and Crede, Ch. E. *Șocuri și vibrații* (trad. l. engleză). Editura Tehnică, București, 1969.
68. Hart, G. C., DiJulio, R. M. and Lew, M. *Torsional Response of High-Rise Buildings.* J.STD, Proc. ASCE, vol. 101, No. ST 2, February, 1975.
69. Hartzell, S. *Analysis of the Bucharest Strong Ground Motion Record for the March 4, 1977 Romanian Earthquake.* B.SSA, vol. 69, nr. 2, 1979.
70. Housner, G. W. *Intensity of Ground Motion During Strong-Earthquake.* California Institute of Technology, Pasadena, 1952.
71. Housner, G. W. *Geotechnical Properties of Destructive Earthquake.* Géotechnique, London, déc., 1954.
72. Housner, G. W. *Interaction of Building and Ground During Earthquake.* B. SSA vol. 45, nr. 3, July, 1955.
73. Housner, G. W. *Properties of Strong Ground Motion Earthquake.* B. SSA, vol. 45, nr. 3, 1955.
74. Housner, G. W. and Outinen, H. *The Effect of Torsional Oscillations on Earthquake Stresses.* B. SSA, July, 1958.
75. Housner, G. W. *Behaviour of Structures During Earthquake.* J. EMD. Proc. ASCE No. EM4, Oct., 1959.
76. Housner, G. W. and Brady, A. G. *Natural Periods of Vibrations of Buildings.* J. EMD, Proc. ASCE, vol. 89. No. EM4, August, 1963.
77. Housner, G. W. and Jennings, P. C. *Generation of Artificial Earthquake* J. EMD. Proc. ASCE, vol 90 No. EM1, February, 1964.
78. Housner, G. W. *Intensity of Ground Shaking Near the Causative Fault.* Proc. 3 WCEE, Auckland-Wellington, New Zealand, 1965.
79. Housner, G. W. *Strong Ground Motion and Design Spectrum,* Earthquake Engineering. Ch. 4 and 5, Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
80. Housner, G. W. *Measures of Severity of Earthquake Ground Shaking.* Proc. U.S. National Conference on Earthquake Engineering, Ann Arbor, Michigan, 1975.
81. Housner, G. W. and Jennings, P. C. *Earthquake Design Criteria for Structures,* CALTECH-EERL 77-06, Pasadena, California, November, 1977.
82. Hudson, D. E. *Response Spectrum Techniques in Engineering Seismology.* Proc. 1WCEE, Berkeley, California, 1956.
83. Hudson, D. E. *Some Problems in the Application of Spectrum Techniques Strong-Motion Earthquake Analysis.* B. SSA, vol. 52, nr. 2, April, 1962.
84. Hudson, D. E. *Reading and Interpreting Strong Motion Accelerograms.* EERI, Berkeley, California, 1979.
85. Hurty, W. C. and Rubinstein, M. F. *Dynamics of Structures.* Prentice-Hall, New Jersey, 1964.
86. Husid, R. *Cálculo del periodo fundamental de vibracion de edificios con rigidez de corte.* Revista del IDIEM, vol. 2, nr. 2, Agosto, Santiago, Chile, 1963.
87. Husid, R. *Analisis de terremotos.* Revista del IDIEM nr. 8, Santiago, Chile, 1969.
88. Husid, R., Pieber, W. and Romo, J. *Dynamic Characteristics of Tall Building in Chile.* Proc. of the Conference on Earthquake Analysis of Structures, Jassy, Romania, 1970.
89. Ifrim, M. *Contribution to the Problem of Building Vibrations During Earthquake.* Revue de Mécanique Appliquée, tome III, nr. 2, București, 1958.
90. Ifrim, M. *Appreciation on the Fundamental Vibration Frequency of Tall Structures Subjected to Seismic Action.* Revue de Mécanique Appliquée, tome IV, nr. 1, București, 1959.

91. Ifrim, M *Calculul direct al frecvențelor proprii la clădirile acționate de cutremure.* Studii și Cercetări de Mecanică Aplicată, tomul X, nr. 1, București, 1959.
92. Ifrim, M. *Dynamic Analysis of Tall Structures Subjected to Earthquake Motion.* Proc. 2WCEE, Tokyo, Japan, 1960.
93. Ifrim, M. *Utilizarea spectrelor de răspuns în seismologia inginerească.* Buletinul științific ICB, nr. 10, București, 1963.
94. Ifrim, M. *Contributions to the Seismic Analysis of Frames.* Proc. 3WCEE, Auckland-Wellington, New Zealand, 1965.
95. Ifrim, M. *Cálculo del period fundamental de vibratión de edificios.* Revista del IDIEM, vol. 5, nr. 1, Santiago, Chile, 1966.
96. Ifrim, M. *Un método para la determinación de los periodos naturales y los modos normales de vibración de las estructuras de edificios utilizando una calculadora digital.* Revista de la Sociedad Méxicana de Ingineria Sismica, vol. IV, nr. 2, México, 1966.
97. Ifrim, M. și alții. *A simplified Method for Determining with a Digital Computer the Dynamic Characteristics of Storied Structures.* Revue Roumaine de Sciences Techniques, Série de Mecanique Appliqué, tome 12, nr. 5, București, 1967.
98. Ifrim, M. *The Effect of Seismic Action on the Dynamic Behaviour of Elemented Water Tanks.* Proc. 4WCEE, Santiago, Chile, 1969.
99. Ifrim, M. *Contribuții la elaborarea unei teorii unitare privind comportarea și calculul structurilor etajate la acțiuni seismice.* Teză pentru obținerea titlului de doctor-inginer, București, 1969.
100. Ifrim, M. *A Generalized Expression on the Seismic Response.* Proc. of the Conference on Earthquake Analysis of Structures, Jassy, România, 1970.
101. Ifrim, M. *Earthquake Modal Analysis of Multistory Structures. Relative Stiffness, Eingevalues and Eingevectors.* Proc. of the Conference on Earthquake Analysis of Structures, Jassy, Romania, 1970.
102. Ifrim, M. *The Variation of the Intensity of Seismic Waves and its Influence upon the Structural Response.* Fourth Symposium on Earthquake Engineering, University of Roorke, India, 1970.
103. Ifrim, M. and Lungu, D. *Antiseismic Analysis and Design of Reinforced Concrete Multistoried Structures with the Help of Story Relative Rigidities.* Bulletin of the Indian Society of Earthquake Technology, vol. 8, No. 3, Sept. 1971.
104. Ifrim, M. *Simplified Analysis of Shear Walls in Tall Buildings to Earthquake Action.* Proc. 5WCEE, Roma, Italy, 1973.
105. Ifrim, M. *Aplicații în analiza dinamică a structurilor și ingineric seismică.* Editura Didactică și Pedagogică, 1974.
106. Ifrim, M. *A New Semiprobabilistic Concept Concerning the Codification of the Seismic Action.* Proc. 6WCEE New Delhi, India, 1977.
107. Ifrim, M. *Observații privind consolidarea construcțiilor afectate de cutremur.* Sesiunea tehnico-științifică IPB, București, 1978.
108. Ifrim, M. *Some Fundamental Aspects of Earthquake Engineering.* Proc. of the Seminar IABSE on Constructions in Seismic Zones, Bergamo, Italy, 1978.
109. Ifrim, M. *Earthquake of March 4, 1977 in Romania — Damage and Strengthening of Structures,* Proc. 3CCEE, Montréal, Canada, 1979.
110. Ifrim, M. *Strengthening Concept After Romanian Strong Earthquake on March 4, 1977.* 7WCEE, Istambul, Turkey, 1980.
111. Ifrim, M. *Romanian Earthquake of March 4, 1977, Some Specific Engineering Aspects.* 7ECEE, Athens, Greece, 1982.
112. Iosif, T. și Iosif, S. ***Cutremurul vrâncean din 4 martie 1977 — eveniment seismic multiplu și implicațiile lui seismotectonice, Cercetări seismologice asupra cutremurului din 4 martie 1977,*** București, 1979.

113. Jacobsen, L. S. *Steady Forced Vibration as Influenced by Damping.* Transactions of the ASME, APM-52-15, 1930.
114. Jacobsen, I. S. and Ayre, R. S. *Engineering Vibrations.* Mc.Graw-Hill Books Company, New York, 1958.
115. Jain, S. K. *Analitical Model for the Dynamic of Building.* CALTECH-EERL 83-02, Pasadena, California, May, 1983.
116. Jennings, P. C. *Engineering Features of the San Fernando Earthquake,* February 1971. California Institute of Technology, Pasadena, 1971.
117. Jennings, P. C. (editor) *Earthquake Engineering and Hazards Reduction in China.* National Academy of Sciences, Washington, D. C., 1980.
118. Kanai, K., Takashi, R. and Kawasumi, H. *Seismic Characteristics o. Ground.* Proc. of 1WCEE, Berkeley, California, 1956.
119. Kanai, K. *An Empirical Formula for the Spectrum of Strong Earthquake Motion.* Proc. 2WCEE, Tokyo, Japan, 1960.
120. Kolsky, H. *Stress Waves in Solids.* Clarendon Press, Oxford, 1953.
121. Krishna, J. *On Earthquake Engineering.* State of the Art in Earthquake Engineering, Ankara, 1981.
122. Lauletta, E. *Theoretical consideration on the Behaviour of Tall Building During Earthquake,* ICEE Milano — ISMES Bergamo, 1965.
123. Lee, D. M., Jennings, P. C. and Housner, G. W. *A selection of Important Strong Motion Earthquake Records.* CALTECH-EERL, Report No. 80-01, Pasadena, California, January, 1980.
124. Ledwon, J. *Dynamics of Industrial Chimneys under Seismic Loads.* Proc. of the Conference on Earthquake Analysis of Structure, Jassy, Romania, 1970.
125. Lemasson, J. et Lallemant, F. *Analyse sismique des ossatures en beton armé dans le domain non élastique.* Annales de l'ITBTP, No. 380, Paris, Février, 1980.
126. Lin, T. Y., *Lateral Force Distribution in a Concrete Building Story.* J. ACI, vol. 23, nr. 4, December, 1951.
127. Lungu, D. și Ghiocel, D. *Metode probabilistice în calculul construcțiilor,* Editura tehnică, București, 1982.
128. Macavei, F. *A Method for Determining the Vibration Eigenmodes of the Structures by Succesive Coordinate Decoupling.* Bul. IPI, tomul XXVI (XXX), Iași, 1980.
129. Macavei, F. *Contribuții la determinarea răspunsului dinamic al structurilor spațiale.* Teză pentru obținerea titlului de doctor-inginer, București, 1983.
130. MacGregor, J. G. *Ductility of Structural Element.* Handbook of Concrete Engineering. Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1974.
131. Mândrescu, N. *Cutremurul vrâncean din 4 martie 1977 — aspecte ale comportării terenului.* Cercetări seismologice asupra cutremurului din 4 martie 1977, București, 1979.
132. Mark, F. *Multistory Structures.* Handbook of Concrete Engineering, Van Nostrand, Reinhold Company, New York, 1974.
133. Mazilu, P. *Statica construcțiilor II.* Editura Tehnică, București, 1959.
134. Meirovitch, L. *Elements of Vibration Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1975.
135. Merchant, H. C. and Hudson, D. F. *Mode Superposition in Multi-Degree of Freedom System Using Earthquake Response Spectrum Data.* B.SSA, vol. 52, nr. 2, April, 1962.
136. Milne, W. G. and Davenport, A. G. *Earthquake Probability.* Proc. 4WCEE, Santiago, Chile, 1969.
137. Montgomery, C. J. *Influence of P-Delta Effect on Seismic Design,* Proc. 3 CCEE Montréal, Canada, 1979.

138. Müller, G., Bonjer, K. P., Stückl, H. şi Enescu, D. *Cutremurul românesc din 4 martie 1977.* Cercetări seismologice asupra cutremurului din 4 martie 1977, Bucureşti, 1979.
139. Muto, K. *Seismic Analysis of Reinforced Concrete Buildings.* Proc. 1WCEE, Berkeley, California, 1956.
140. Muto, K. *Earthquake Resistent Design of Tall Buildings in Japan.* Proc. of the High-Rise and Long-Span Structures, Japan, Tokyo, 1964.
141. Muto, K. *Aseismic Design Analysis of Buildings.* Tokyo, Japan, 1974.
142. Naito, T. *Theory of Seismic Design of Framed Buildings.* Journal of the Architectural Institute of Japan, 1922.
143. Nakagawa, K. *Vibrational Characteristics of Reinforced Concrete Buildings Existing in Japan.* Proc. 2WCEE, Tokyo, Japan, 1960.
144. Newmark, K. M. *Computation of Dynamic Structural Response in the Range Approaching Failure.* Proc. of the Symposium on Earthquake and Blast Effects on Structures, Los Angeles, 1952.
145. Newmark, N. M. *A Method of Computation for Structural Dynamics.* Trans. ASCE, vol. 127,. 1962.
146. Newmark, N. M. *Current Trends in the Seismic Analysis and Design of High-Rise Structures.* Earthquake Engineering, Ch. 16, Prentice-Hall, New Jersey, 1970.
147. Newmark, N. M. and Rosenblueth, E. *Fundamentals of Earthquake Engineering.* Prentice-Hall, New Jersey, 1971.
148. Nielsen, N. N. *Dynamic Response of Multistory Buildings* California Institute of Technology, EERL, Pasadena, California, 1964.
149. Nigam, N. C. and Jennings, P. C. *Digital Calculation of Response Spectra from Strong-Motion Earthquake Records.* CALTECH-EERL, Pasadena, California, June, 1968.
150. Norris, Ch. H. and Wilbur, J. B.. *Elementary Structural Analysis.* McGraw-Hill Books Company, New York, 1960.
151. Okamoto, S. *Introduction to Earthquake Engineering.* John Wiley, New York, 1973.
152. Palacios, C. *Estudio de rigideces en marcos de edificios.* Universidad Nacional Autonoma de México, 1958.
153. Papoulis, A. *Probability Random Variables and Stochastic Processes.* McGraw-Hill, Kogakusha, Tokyo, 1965.
154. Park, R. and Paulay, R. *Reinforced Concrete Structures.* John Wiley and Sons, New York, 1975.
155. Paulay, Th. *Design Aspect of Shear Walls for Seismic Areas.* Proc. 2 CCEE, Hamilton, Ontario, Canada, June, 1975.
156. Paulay, Th. *Capacity Design of Earthquake Resistant Ductile Multistory Reinforced Concrete Frames,* 3CCEE, Montreal, Canada, June, 1979.
157. Peterschmitt, E. *Note sur le séisme de Vrancea, 4 Mars, 1977.* CSEM, Strasbourg 20 Jouillet 1977.
158. Petrescu, G. *Cutremure de pământ.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1959.
159. Prişcu, R. *Construcţii hidrotehnice,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.
160. Prişcu, R. ş. a. *Ingineria seismică a marilor baraje.* Editura Acade niei R.S.R., Bucureşti, 1980.
161. Radu, C. *Contribution à l'étude de la séismicité de la Roumanie et la comparaison avec la séismicité du bassin méditerranéean et en particulier avec la séismicité de la France de sud-est.* Thèse dr. ès sci. Université du Strasbourg, 1974.
162. Radu, C., Polonic, G., Kárnik, V., Procházkova, D. şi Schenkova, Z. *Harta macroseismică a cutremurului românesc din 4 martie 1977.* Cercetări seismologice asupra cutremurului din 4 martie 1977, Bucureşti, 1977.

163. Radu, C. şi Apopei, I. *Contribuţii la studiul mecanismului în focar al evenimentului seismic din 4 martie 1977.* Cercetări seismologice asupra cutremurului din 4 martie 1977, Bucureşti, 1979.
164. Radu, C. *Asupra magnitudinii cutremurului din 4 martie 1979.* Cercetări seismologice asupra cutremurului din 4 martie 1977, Bucureşti, 1979.
165. Radu, C. *Catalogul cutremurelor puternice produse pe teritoriul României în perioada 1901—1979.* Cercetări seismologice asupra cutremurului din 4 martie 1977, Bucureşti, 1979.
166. Rădulescu, D. *Studii asupra caracteristicilor de bază ale acţiunilor seismice.* Studiu INCERC, Bucureşti, 1983.
167. Richter, Ch. F. *Elementary Seismology.* W.H. Freeman Company, San Francisco, 1958.
168. Rosenblueth, E. *Estructuras a prueba de termblores cimentadas sobre terreno firme.* Revista de los Ingenieros Civiles Asociados, nr. 17, México, 1954.
169. Rosenblueth, E. (editor) *Design of Earthquake Resistant Structures.* Pentechpress, London, 1980.
170. Rumman, W. S. and Maugh, L. C. *Earthquake Forces on Tall Concrete Chimneys.* Association International des Ponts et Charpantes, VIII-ème Congrès, New York, 1968.
171. Salvadori, M. G. *Earthquake Stresses in Shear Building.* Proc. ASCE, nr. 79, 1953.
172. Sandi, H. and Şerbănescu, G. *Experimental Results of the Dynamic Deformation of Multistory Buildings.* Proc. 4WCEE, Santiago, Chile, 1969.
173. Sandi, H. *Elemente de dinamica structurilor.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1983.
174. Schnabel, P. B. and Seed, H. B. *Accelerations in Rock for Earthquake in the Western United States,* B. SSA, vol. 65, nr. 2, 1973.
175. Seed, B. H., Idriss, I. M. and Kiefer, F. M. *Characteristics of Rock Motions During Earthquake.* J. SMFD — ASCE, vol. 95, No. SM5, 1969.
176. Seed, H. B. and Idriss, I. M. *Influence of Soil Conditions on Ground Motion during Earthquakes.* J. SMFD—ASCE, vol. 95, nr. SM1, January, 1969.
177. Seed, H. B., Ugas, C. and Lysmer, J. *Site Dependent Spectra for Earthquake—Resistant Design,* B. SSA, vol. 66, No. 1, February, 1976.
178. Steinbrugge, K. V. and Bush, V. R. *Review of Earthquake Damage in the Western United States 1933—1964,* Washington, D. C., 1965.
179. Steinbrugge, K. V. *San Fernando Earthquake February 9, 1971.* Pacific Fire Rating Bureau, San Francisco, California, 1971.
180. Suko, M and Adams, P. F. *Empirical Formula for Fundamental Natural Period.* J. SD, Proc. ASCE, vol. 101, No. ST 2, February, 1971.
181. Suko, M. and Adams, P. F. *Empirical Ecuation for the Fundamental Natural Period.* Second Canadian Conference on Earthquake Engineering, Ontario, Canada, June, 1975.
182. Takeuchi, M. *Vibrational Characteristics of Actual Buildings Determined by Vibration Tests.* Proc. 2WCEE, Tokyo, Japan, 1960.
183. Taniguchi, T. *Seismic Wall Effect in Framed Structures in Relation to the Period of Tall Buildings.* Proc. 2WCEE, Tokyo, Japan, 1960.
184. Taniguchi, T. *Formulas of Base Shear Coefficient and Period Applied in Earthquake Design of Tall Building.* Proc. of the Japan National Symposium on Earthquake Engineering, Tokyo, 1962.
185. Tassios, T. P. *The Mechanics of Column Repair with a Reinforced Concrete Jacket.* 7ECEE, Athens, Greece, 1982.
186. Tauchert, R. T. *Energy Principles in Structural Mechanics.* McGraw-Hill Book Company, New York, 1974.